Géométrie différentielle

1 Formes différentielles

Définition 1 *Soit E un espace vectoriel et $k \geq 1$. Une* forme k-linéaire alternée *est une application $f : E^k \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :*

1. *Pour tout $1 \leq i \leq n$, pour tous $x_1, \ldots, x_n, y_i \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$,*

$$\begin{array}{rcl} f(x_1, \ldots, \lambda x_i, \ldots, x_n) & = & \lambda f(x_1, \ldots, x_n), \\ f(x_1, \ldots, x_i + y_i, \ldots, x_n) & = & f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) + f(x_1, \ldots, y_i, \ldots, x_n). \end{array}$$

2. *Pour tout $i < j$, pour tous $x_1, \ldots, x_n \in E$:*

$$f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = -f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n).$$

L'ensemble des formes k-linéaires alternées sur E est noté $A_k(E)$.

L'ensemble $A_k(E)$ est un espace vectoriel. Nous allons en décrire une base lorsque $E = \mathbb{R}^n$.

1. Pour tout $1 \leq i \leq n$, on pose :

$$dx_i : \left\{ \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longrightarrow & x_i. \end{array} \right.$$

   Autrement dit, dx_i est la i-ième coordonnée. Alors $(dx_1, \ldots, dx_n)$ est une base de $A_1(\mathbb{R}^n)$.

2. Si $f \in A_m(E)$ et $g \in A_n(E)$, on définit $f \wedge g \in A_{m+n}(E)$ (produit extérieur). Donnons seulement deux exemples sur $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{array}{rcl} dx_i \wedge dx_j((x_1, \ldots, x_n), (x'_1, \ldots, x'_n)) & = & x_i x'_j - x_j x'_i, \\ dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k((x_1, \ldots, x_n), (x'_1, \ldots, x'_n), (x''_1, \ldots, x''_n)) & = & x_i x'_j x''_k - x_i x'_k x''_j - x_j x'_i x''_k \\ & & + x_j x'_k x''_i + x_k x'_i x''_j - x_k x'_j x''_i. \end{array}$$

   Ce produit vérifie les relations suivantes : pour toutes formes linéaires alternées f et g.

$$f \wedge g = -g \wedge f, \; f \wedge f = 0.$$

3. Une base de $A_k(\mathbb{R}^n)$ est alors donnée par tous les produits extérieurs de k éléments dx_i, en tenant compte des relations précédentes.

Exemples.

1. Si $n = 2$: $A_1(\mathbb{R}^2)$ a pour base (dx, dy) et $A_2(\mathbb{R}^2)$ a pour base $(dx \wedge dy)$. De plus, $A_n(\mathbb{R}^2) = (0)$ si $n \geq 3$.
2. SI $n = 3$: $A_1(\mathbb{R}^3)$ a pour base (dx, dy, dz), $A_2(\mathbb{R}^3)$ a pour base $(dx \wedge dy, dy \wedge dz, dz \wedge dx)$ et $A_3(\mathbb{R}^3)$ a pour base $(dx \wedge dy \wedge dz)$. De plus, $A_n(\mathbb{R}^3) = (0)$ si $n \geq 4$.

Définition 2 *Soient E un espace vectoriel, Ω un ouvert de E, et $k \geq 1$. Une* forme différentielle de degré k sur Ω à valeurs dans E *est une application de Ω dans $A_k(E)$.*

Exemples.

1. Les formes différentielles de degré 1 à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ sont de la forme :

$$\alpha = f_1 dx_1 + \ldots + f_n dx_n,$$

où $f_1, \ldots, f_n$ sont des fonctions de Ω dans $\mathbb{R}$.

2. Les formes différentielles de degré 2 à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ sont de la forme :

$$\alpha = f dy \wedge dz + g dz \wedge dx + h dx \wedge dy,$$

où f, g, h sont des fonctions de Ω dans $\mathbb{R}$.

2 Cas de la dimension 1

2.1 Intégrales curvilignes

Définition 3 *Soit α une forme différentielle de degré un définie sur $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Soit un arc paramétré $\gamma : [a, b] \longrightarrow \Omega$. On pose :*

$$\alpha = f_1 dx_1 + \ldots + f_n dx_n, \gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t)).$$

L'intégrale curviligne de α le long de γ est :

$$\int_\gamma \alpha = \int_a^b \left(f_1(\gamma_1(t), \ldots, \gamma_m(t))\gamma_1'(t) + \ldots + f_n(\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))\gamma_n'(t) \right) dt.$$

Exemple. Soit γ le cercle unité de $\mathbb{R}^2$ et $\alpha = xdy - ydx$. On prend le paramétrage $(\cos(t), \sin(t))$, pour $t = [0, 2\pi]$ de γ. Alors :

$$x(t) = \cos(t),\ y(t) = \sin(t)dt,\ dx = -\sin(t)dt,\ dy = \cos(t)dt.$$

Donc :

$$\int_\gamma \alpha = \int_0^{2\pi} (\cos^2(t) + \sin^2(t))dt = 2\pi.$$

2.2 Formes fermées et formes exactes

Définition 4 *Soit $\alpha = f_1 dx_1 + \ldots + f_1 dx_n$ une forme différentielle de degré 1 sur $\mathbb{R}^n$.*

1. *On dira qu'elle est fermée si pour tous $1 \leq i, j \leq n$, $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$.*
2. *On dira qu'elle est exacte si il existe une fonction A telle que pour tout $1 \leq i \leq n$, $f_i = \frac{\partial A}{\partial x_i}$. On note $\alpha = dA$.*

Théorème 5 *Soit α une forme différentielle de degré 1 sur $\mathbb{R}^n$.*

1. *Si α est exacte, alors elle est fermée.*
2. *On suppose que le domaine de définition de α est étoilé en un de ses points. Si α est fermée, alors elle est exacte.*

Preuve. Posons $\alpha = f_1 dx_1 + \ldots + f_n dx_n$.

1. Supposons α exacte. Il existe une fonction A, telle que $f_i = \frac{\partial A}{\partial x_i}$ pour tout i. Pour tous i, j :

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 A}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 A}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}.$$

Donc α est fermée.

2. Supposons le domaine de définition Ω de α étoilé en un certain point O : autrement dit, si $A \in \Omega$, $[OA] \subseteq \Omega$. Quitte à changer de repère, on suppose que $O = 0$. On pose alors :

$$A(x_1, \ldots, x_n) = \int_0^1 (f_1(tx_1, \ldots, tx_n)x_1 + \ldots + f_n(tx_1, \ldots, tx_n)x_n)dt.$$

Comme Ω est étoilé en 0, ceci existe. De plus, en dérivant sous le signe somme, comme α est fermée :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A}{\partial x_i} &= \int_0^1 \left(t\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(tx)x_1 + \ldots + t\frac{\partial f_n}{\partial x_i}(tx)x_n + f_i(tx) \right) dt \\
&= \int_0^1 \left(t\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(tx)x_1 + \ldots + t\frac{\partial f_i}{\partial x_n}(tx)x_n + f_i(tx) \right) dt \\
&= [tf_i(tx)]_0^1 \\
&= f_i(x).
\end{aligned}$$

Donc α est exacte. □

Remarque. Il est facile de montrer que α est fermée puis de déduire que α est exacte. Il n'est pas toujours facile de trouver la fonction A qui convient.

Théorème 6 *Soit α une forme différentielle de degré un sur $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Soit un arc paramétré $\gamma : [a,b] \longrightarrow \Omega$. Si α est exacte, on considère A telle que $\gamma = dA$. Alors :*

$$\int_\gamma \alpha = A(\gamma(b)) - A(\gamma(a)).$$

Preuve. En effet :

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \alpha &= \int_a^b (f_1(\gamma(t))\gamma_1'(t) + \ldots + f_n(\gamma(t))\gamma_n'(t))dt \\
&= \int_a^b \left(\frac{\partial A}{\partial x_1}(\gamma(t)\gamma_1'(t) + \ldots + \frac{\partial A}{\partial x_n}(\gamma(t)\gamma_n'(t) \right) dt \\
&= [A(\gamma(t))]_a^b \\
&= A(\gamma(b)) - A(\gamma(a)).
\end{aligned}$$

□

Remarques.

1. En conséquence, l'intégrale curviligne de α le long de γ ne dépend que des extrémités de γ.
2. D'autre part, si γ est fermé, $\int_\gamma \alpha = 0$.

2.3 Champs de scalaires, champs de vecteurs

Il s'agit de reformuler les résultats précédents en changeant de vocabulaire.

Définition 7 *Soit E un espace vectoriel.*

1. *Un* champ de scalaires *est une application de E dans $\mathbb{R}$.*
2. *Un* champ de vecteurs *est une application de E dans E.*

Remarque. On peut représenter graphiquement un champ de scalaires du plan à l'aide des lignes de niveau. Un champ de vecteurs du plan se représente à l'aide de vecteurs, l'origine du vecteur étant le point où on applique le champ de vecteurs.

Définition 8 *Soit $F = (f_1, \ldots, f_n)$ un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$. Autrement dit, pour tout i, f_i est une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. La forme différentielle canoniquement associée à F est :*

$$\alpha_F = f_1 dx_1 + \ldots + f_n dx_n.$$

Si $\gamma = [a,b] \longrightarrow E$ est un arc paramétré, le travail *ou* circulation *du champ de vecteur F le long de γ est :*

$$\int_\gamma \alpha_F = \int_a^b \left(f_1(\gamma(t))\gamma_1'(t) + \ldots + f_n(\gamma(t))\gamma_n'(t)\right) dt.$$

Définition 9 *1. Soit f une fonction définie d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Son* gradient *est le champ de vecteurs :*

$$grad(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right).$$

2. *Soit F un champ de vecteurs. On dira que F* dérive d'un potentiel scalaire *s'il existe f telle que $F = grad(f)$. On dit alors que F dérive du potentiel scalaire f.*

Remarques.

1. Autrement dit, F dérive d'un potentiel scalaire si, et seulement si, α_F est exacte.
2. Par suite, si F dérive d'un potentiel scalaire, son travail le long d'un arc paramétré γ ne dépend que des extrémités de γ. Si γ est fermé, le travail de F le long de γ est nul.
3. Soit $F = (f_1, \dots, f_n)$ un champ de vecteurs défini sur un domaine étoilé en un de ses points. Pour montrer qu'il découle d'un potentiel scalaire, il suffit de montrer que $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ pour tous i, j.
4. Le gradient d'un champ de scalaires est orthogonal aux lignes de niveau de ce champ de scalaire et est orienté "en montant".

3 Cas de la dimension 2

3.1 Intégrale de surface

Définition 10 *Soient $\Gamma(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t))$ une surface paramétrée définie de $\mathbb{R}^3$ sur Ω et $\alpha = f dy \wedge dz + g dz \wedge dx + h dx \wedge dy$ une forme différentielle de degré 2 sur $\mathbb{R}^3$. L'intégrale de α sur Γ est :*

$$\begin{aligned}\int\int_\Gamma \alpha &= \int\int_\Omega f(x(s,t), y(s,t), z(s,t)) dy(s,t) \wedge dz(s,t) \\ &+ \int\int_\Omega g(x(s,t), y(s,t), z(s,t)) dz(s,t) \wedge dx(s,t) \\ &+ \int\int_\Omega h(x(s,t), y(s,t), z(s,t)) dx(s,t) \wedge dy(s,t),\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} dx(s,t) &= \left(\frac{\partial x}{\partial s}(s,t)ds, \frac{\partial x}{\partial t}(s,t)dt\right), \\ dy(s,t) &= \left(\frac{\partial y}{\partial s}(s,t)ds, \frac{\partial y}{\partial t}(s,t)dt\right), \\ dz(s,t) &= \left(\frac{\partial z}{\partial s}(s,t)ds, \frac{\partial z}{\partial t}(s,t)dt\right),\end{aligned}$$

et donc :

$$\begin{aligned} dy(s,t) \wedge dz(s,t) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial s}(s,t) & \frac{\partial z}{\partial s}(s,t) \\ \frac{\partial y}{\partial t}(s,t) & \frac{\partial z}{\partial t}(s,t) \end{vmatrix} dsdt, \\ dz(s,t) \wedge dx(s,t) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial s}(s,t) & \frac{\partial x}{\partial s}(s,t) \\ \frac{\partial z}{\partial t}(s,t) & \frac{\partial x}{\partial t}(s,t) \end{vmatrix} dsdt, \\ dx(s,t) \wedge dy(s,t) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s}(s,t) & \frac{\partial y}{\partial s}(s,t) \\ \frac{\partial x}{\partial t}(s,t) & \frac{\partial y}{\partial t}(s,t) \end{vmatrix} dsdt.\end{aligned}$$

Exemple. On considère la surface paramétrée $\Gamma = (cos(\theta)\sin(\phi), \sin(\theta)\sin(\phi), \cos(\phi))$, avec $0 < \theta < 2\pi$ et $0 < \phi < \pi/2$. Il s'agit d'une demi-sphère ouverte. On intègre $\alpha = x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy$ sur Γ. Alors :

$$\begin{aligned} dx &= (\cos(\theta)\cos(\phi)d\phi, -\sin(\theta)\sin(\phi)d\theta), \\ dy &= (\sin(\theta)\cos(\phi)d\phi, \cos(\theta)\sin(\phi)d\theta), \\ dz &= (-\sin(\phi)d\phi, 0).\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
dy \wedge dz &= \cos(\theta)\sin^2(\phi)d\theta d\phi, \\
dz \wedge dx &= \sin(\theta)\sin^2(\phi)d\theta d\phi, \\
dx \wedge dy &= (\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta))\cos(\phi)\sin(\phi)d\theta d\phi \\
&= \cos(\phi)\sin(\phi)d\theta d\phi.
\end{aligned}$$

Enfin :

$$\begin{aligned}
\int\int_\Gamma \alpha &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}(\cos^2(\theta)\sin^3(\phi)+\sin^2(\theta)\sin^3(\phi)+\cos^2(\phi)\sin(\phi))d\theta d\phi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}(\sin^3(\phi)+\cos^2(\phi)\sin(\phi))d\theta d\phi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}(\sin^2(\phi)+\cos^2(\phi))\sin(\phi)d\theta d\phi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\sin(\phi)d\theta d\phi \\
&= [\theta]_0^{2\pi}.[-\cos(\phi)]_0^{\pi/2} \\
&= 2\pi.
\end{aligned}$$

3.2 Formule de Stokes et rotationnel

Théorème 11 (Stokes) *Soit Γ une surface de $\mathbb{R}^n$ ayant un bord (orienté) donné par une courbe paramétrée γ. Soit $\alpha = f_1dx_1 + \ldots + f_ndx_n$ une forme différentielle de degré 1. On considère :*

$$\begin{aligned}
d\alpha &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}dx_n\right) \wedge dx_1 \\
&\quad + \ldots + \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}dx_n\right) \wedge dx_n.
\end{aligned}$$

Alors :

$$\int_\gamma \alpha = \int_\Gamma d\alpha.$$

Attention, le sens de parcours du bord est important. La surface Γ doit être "à gauche" lorsqu'on parcourt le bord.

Exemple. On se place en dimension 3. Alors $\alpha = f_1dx + f_2dy + f_3dz$. Alors :

$$\begin{aligned}
d\alpha &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}dx + \frac{\partial f_1}{\partial y}dy + \frac{\partial f_1}{\partial z}dz\right) \wedge dx \\
&\quad + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}dx + \frac{\partial f_2}{\partial y}dy + \frac{\partial f_2}{\partial z}dz\right) \wedge dy \\
&\quad + \left(\frac{\partial f_3}{\partial x}dx + \frac{\partial f_3}{\partial y}dy + \frac{\partial f_3}{\partial z}dz\right) \wedge dz \\
&= \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) dx \wedge dy.
\end{aligned}$$

Définition 12 *Soit $F = (f_1, f_2, f_3)$ un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$. le* rotationnel *de F est le champ de vecteurs défini par :*

$$rot(F) = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right).$$

Le théorème **??** implique :

Proposition 13 *Soit F un champ de vecteurs défini sur un domaine étoilé en un de ses points. Il dérive d'un potentiel scalaire si, et seulement si, $rot(F) = 0$.*

Définition 14 *Soit G un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On dit que G* dérive d'un potentiel vecteur *si il existe un champ de vecteurs F tel que $G = rot(F)$. On dit alors que G dérive du potentiel vecteur F.*

Définition 15 *Soit Γ une surface paramétrée et soit $F = (f_1, f_2, f_3)$ un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On pose :*

$$\omega_F = f_1 dy \wedge dz + f_2 dz \wedge dx + f_3 dx \wedge dy.$$

Le flux *du champ de vecteurs F à travers Γ est :*

$$\int\int_\Gamma \omega_F.$$

Théorème 16 (Stokes) *Soit Γ une surface de bord (orienté) γ. La circulation du champ F le long de γ est égale au flux du champ $rot(F)$ à travers la surface Γ.*

Remarque. En particulier, si G dérive d'un potentiel vecteur, le flux de G à travers une surface Γ ne dépend que du bord de cette surface. En particulier, si cette surface n'a pas de bord (par exemple une sphère...), le flux de G à travers cette surface est nul.

3.3 Formule d'Ostrogradski et divergence

Théorème 17 (Ostrogradski) *Soit K un compact à bord de $\mathbb{R}^3$, de bord une surface paramétrée γ. Soit $\alpha = f dy \wedge dz + g dz \wedge dx + h dx \wedge dy$ une forme différentielle de degré 2 sur $\mathbb{R}^3$. Alors :*

$$\int\int_\gamma \alpha = \int\int\int_K \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial h}{\partial z}(x,y,z) \right) dxdydz.$$

Attention, l'ordre dans lequel on considère les paramètres donnant γ est important. Quand on change l'ordre des paramètres, le vecteur normal associé change de sens. Il convient qu'il soit orienté vers l'intérieur de K.

Définition 18 *Soit $F = (f_1, \dots, f_n)$ un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$. La* divergence *de F est :*

$$div(F) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}.$$

Il s'agit d'un champ de scalaires.

Théorème 19 *Soit F un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$.*

1. *Si F dérive d'un potentiel vecteur, $div(F) = 0$.*
2. *Réciproquement, si le domaine de définition de F est étoilé en un de ses points, alors si $div(F) = 0$, F dérive d'un potentiel vecteur.*

Preuve. 1. Supposons que F dérive d'un potentiel vecteur G. Autrement dit, $F = rot(G)$. Par suite :

$$div(F) = \frac{\partial^2 f_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f_3}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f_1}{\partial z \partial y} = 0.$$

2. Posons $F = (f_1, f_2, f_3)$. On étudie la forme différentielle $\omega_F = f_1 dy \wedge dz + f_2 dz \wedge dx + f_3 dx \wedge dy$. Alors :

$$d\omega_F = div(F) dx \wedge dy \wedge dz = 0.$$

Donc d est fermée. Par suite, elle est exacte. Donc il existe une forme différentielle θ de degré 1 telle que $\omega_F = d\theta$. On pose $\theta = g_1 dx + g_2 dy + g_3 dz$. Un calcul direct montre que $(f_1, f_2, f_3) = rot(g_1, g_2, g_3)$. □

Théorème 20 (Ostrogradski) *Soit K un compact à bord (orienté) la surface Γ. Si F est un champ de vecteurs, alors le flux du champ à travers la surface γ est égal à l'intégrale triple de la divergence de F sur K.*

Remarque. En particulier, si F découle d'un potentiel vecteur, le flux de F à travers la surface γ est nul.