Séries de Fourier

1 Fonctions 2π-périodiques

Définition 1 *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une application. On dira qu'elle est 2π-périodique si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x + 2\pi) = f(x)$. L'ensemble des fonctions 2π-périodiques est noté E. L'ensemble E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.*

Remarques.

1. Si $f \in E$, 2π est une période de f mais n'est pas nécessairement la plus petite période.
2. Pour définir une fonction 2π-périodique, il suffit de la définir sur un intervalle semi-ouvert de longueur 2π, par exemple $[0, 2\pi[$ ou $[-\pi, \pi[$.

Exemples.

1. (Exemples standards). Soit $k \in \mathbb{N}$. Les fonctions suivantes sont 2π-périodiques :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & \cos(kx), \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & \sin(kx). \end{array} \right.$$

2. (Autre exemple standard). Soit $k \in \mathbb{Z}$. La fonction suivante est 2π-périodique :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longrightarrow & e^{ikx}. \end{array} \right.$$

3. Il y a bien sûr beaucoup d'autres fonctions 2π-périodiques. Par exemple, on peut définir une fonction 2π-périodique de la façon suivante :

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ si } -\pi \leq x < 0, \\ 1 \text{ si } 0 \leq x < 2\pi. \end{array} \right.$$

2 Séries trigonométriques

Définition 2 *Soit $(c_p)_{p \in \mathbb{Z}}$ une suite de coefficients complexes. La* série trigonométrique *associée à ces coefficients est la fonction définie par :*

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longrightarrow & c_0 + \displaystyle\sum_{n \geq 1} (c_n e^{ix} + c_{-n} e^{-ix}), \end{array} \right.$$

dont le domaine de définition est l'ensemble des x pour lesquels cette série converge. On la note (avec un abus de notations) $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$. Cette fonction est 2π-périodique.

Remarque. On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$. Par suite, si x est dans le domaine de définition de $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$:

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx} &= c_0 + \sum_{n \geq 1} c_n (\cos(nx) + i \sin(nx)) + c_{-n} (\cos(nx) - i \sin(nx)) \\ &= c_0 + \sum_{n \geq 1} (c_n + c_{-n}) \cos(nx) + i(c_n - c_{-n}) \sin(nx). \end{aligned}$$

On pose alors, pour tout $n \geq 0$:

$$a_n = c_n + c_{-n},\ b_n = i(c_n - c_{-n}).$$

On a alors :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

De plus, pour tout $n > 0$:

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2},\ c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}.$$

Quand cette série converge t-elle ? Voici quelques exemples simples :

Proposition 3 *1. Si les séries* $\sum_{n\geq 1} |c_n|$ *et* $\sum_{n\geq 1} |c_{-n}|$ *convergent, alors la série* $\sum c_n e^{inx}$ *converge pour tout* $x \in \mathbb{R}$.

2. Si les séries $\sum_{n\geq 1} |a_n|$ *et* $\sum_{n\geq 1} |b_n|$ *convergent, alors la série* $\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ *converge pour tout* $x \in \mathbb{R}$.

Preuve. Il suffit de majorer $|e^{inx}|$, $|\cos(nx)|$ et $|\sin(nx)|$ par 1 et d'utiliser le critère de convergence absolue. □

Exemple. La série trigonométrique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} \cos(nx)$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3 Séries de Fourier

On se donne une fonction 2π-périodique. Peut-on l'écrire comme une série trigonométrique ?

3.1 Coefficients de Fourier

Définition 4 *Soit* $f \in E$. *On dira que* f *est localement intégrable si l'intégrale suivante existe :*

$$\int_0^{2\pi} f(t)dt.$$

Remarque. Comme f est 2π-périodique, si f est localement intégrable, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^{2\pi} f(t)dt = \int_x^{x+2\pi} f(t)dt.$$

Définition 5 *Soit* $f \in E$, *localement intégrable.*

1. *Les coefficients de Fourier exponentiels de* f *sont les nombres complexes :*

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt,\ n \in \mathbb{Z}.$$

2. *Les coefficients de Fourier trigonométriques de* f *sont les nombres complexes :*

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt,\ b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt,\ n \in \mathbb{N}.$$

On passe des uns aux autres par les formules suivantes. Pour tout $n \geq 0$:

$$a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f),\ b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f)).$$

Pour tout $n > 0$:

$$c_n(f) = \frac{a_n(f) - ib_n(f)}{2},\ c_{-n}(f) = \frac{a_n(f) + ib_n(f)}{2}.$$

Remarque. Comme $\sin(0t) = 0$, $b_0(f) = 0$.

Définition 6 *Soit $f \in E$, localement intégrable. On appelle série de Fourier de f la série trigonométrique :*

$$Sf(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)).$$

Exemple. On reprend la fonction 2π-périodique définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } -\pi \leq x < 0, \\ 1 \text{ si } 0 \leq x < 2\pi. \end{cases}$$

Alors, si $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} a_0(f) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi 1dt \\ &= 1, \\ a_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(nt)dt \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^\pi \\ &= 0, \\ b_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(nt)dt \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\cos(nt)}{n}\right]_0^\pi \\ &= \frac{1}{\pi}(1-(-1)^n) \\ &= \begin{cases} \frac{2}{\pi} \text{ si } n \text{ impair }, \\ 0 \text{ si } n \text{ pair.} \end{cases} \end{aligned}$$

La série de Fourier de f est donc :

$$Sf(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n\geq 0} \frac{2}{\pi(2n+1)}\sin((2n+1)t).$$

Les coefficients de Fourier ont les propriétés suivantes :

Proposition 7 *1. Si f est à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors $a_n(f)$ et $b_n(f)$ sont réels pour tout $n \geq 0$. De plus, $c_0(f)$ est réel et $c_n(f)$ et $c_{-n}(f)$ sont des complexes conjugués pour tout $n \geq 1$.*

2. Si f est impaire, alors pour tout $n \geq 0$, $a_n(f) = 0$ et :

$$b_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\cos(nt)dt.$$

3. Si f est paire, alors pour tout $n \geq 0$, $b_n(f) = 0$ et :

$$a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\sin(nt)dt.$$

Preuve. 1. Provient du fait que e^{-int} et e^{int} sont des complexes conjugués.
2. Comme f est 2π-périodique et par changement de variables $s = -t$:

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\cos(nt)dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{+\pi}^{-\pi} f(-s)\cos(-ns)(-ds) \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} -f(s)\cos(ns)ds \\ &= -a_n(f). \end{aligned}$$

Donc $a_n(f) = 0$. De plus :

$$\begin{aligned}
b_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\sin(nt)dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(t)\sin(nt)dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)\sin(nt)dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{+\pi}^{0} f(-s)\sin(-ns)(-ds) + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)\sin(nt)dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} (-f(s))(-\sin(ns))ds + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)\sin(nt)dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(s)\sin(ns)dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)\sin(nt)dt \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)\sin(nt)dt.
\end{aligned}$$

3. En exercice. □

Voici le théorème principal sur les séries de Fourier :

Théorème 8 (Dirichlet) *Soit $f \in E$, continue par morceaux. Alors la série de Fourier Sf de f converge en tout point. De plus, pour tout $x \in E$,*

$$Sf(x) = \frac{1}{2}(\lim_{t\to x^+} f(t) + \lim_{t\to x^-} f(t)).$$

En particulier, si f est continue en x, $Sf(x) = f(x)$.

Preuve. Admis. □

Exemple. Reprenons l'exemple f précédent. Comme f est continue par morceaux, $Sf(x)$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$. Si $x \neq 0[\pi]$, f est continue en x et donc $Sf(x) = f(x)$. Si $x = 0[2\pi]$, on obtient :

$$Sf(x) = \frac{1}{2}(0+1) = \frac{1}{2}.$$

Si $x = \pi[2\pi]$, on obtient :

$$f(x) = \frac{1}{2}(1+0) = \frac{1}{2}.$$

Notons qu'en 0 et π, $f(x) \neq Sf(x)$. On obtient donc, si $x \in [-\pi, \pi[$:

$$\frac{1}{2} + \sum_{n\geq 0} \frac{2}{\pi(2n+1)}\sin((2n+1)t) = \begin{cases} 0 \text{ si } -\pi < x < 0, \\ 1 \text{ si } 0 < x < \pi, \\ \frac{1}{2} \text{ si } x = 0 \text{ ou } x = -\pi. \end{cases}$$

Autrement dit :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{\sin((2n+1)t)}{2n+1} = \begin{cases} -\frac{\pi}{4} \text{ si } -\pi < x < 0, \\ +\frac{\pi}{4} \text{ si } 0 < x < \pi, \\ 0 \text{ si } x = 0 \text{ ou } x = -\pi. \end{cases}$$

Théorème 9 (Formule de Parseval) *Soit $f \in E$. Alors :*

$$\frac{|a_0(f)|^2}{4} + \sum_{n\geq 1} \frac{|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt.$$

Exemple. Pour la fonction f précédente, on obtient :

$$\frac{1}{4}+\sum_{n\geq 0}\frac{2}{\pi^2(2n+1)^2}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}dt=\frac{1}{2}.$$

Donc :

$$\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$