Séries

1 Définition et exemples

Définition 1 *Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels ou complexes. La* série *de terme général a_n est la suite définie par :*

$$\forall n \geq 0,\ b_n = \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

Lorsque la suite $(b_n)_{n\geq 0}$ converge, on dira que la série de terme général a_n converge. La limite de la suite $(b_n)_{n\geq 0}$ est appelée somme *de la série et est notée $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.*

Exemples.

1. Considérons la série $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k(k+1)}$. Pour tout $k \geq 1$:

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

   Donc :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{k+1}.$$

   Cette série converge donc et sa somme vaut 1.

2. Considérons la série $\sum_{k\geq 1} \ln(1+1/k)$. Pour tout $n \geq 1$, $\ln(1+1/n) = \ln(1+n) - ln(n)$, donc :

$$\sum_{k=1}^{n} \ln(1+1/k) = \ln(1+n) - \ln(1) = \ln(1+n).$$

   Ceci tend vers $+\infty$, donc cette série diverge vers l'infini.

3. Considérons la série $\sum_{k\geq 1} (-1)^k$.

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k = 1 \text{ si } n \text{ est pair et } 0 \text{ sinon.}$$

   Donc cette série diverge.

Proposition 2 *Si la série de terme général a_n converge, alors $(a_n)_{n\geq 0}$ tend vers 0 en $+\infty$. La réciproque est fausse.*

Preuve. La suite $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)_{n\geq 0}$ tend vers une limite l. En décalant les indices, la suite $\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k\right)_{n\geq 1}$ tend aussi vers l. En faisant la différence, la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ tend vers $l - l = 0$.

La série $\sum \ln(1+1/k)$ fournit un contre-exemple à la réciproque. □

2 Séries à termes positifs

2.1 Critères de convergence

Lorsque la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est positive, alors la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)_{n\geq 0}$ est croissante. Par suite, elle converge si, et seulement si, elle est majorée.

Proposition 3 (Critères de comparaison) *Soient $\sum a_k$ et $\sum b_k$ deux séries à termes positifs, tels que pour tout $n \geq 0$, $a_n \leq b_n$.*

1. *Si $\sum b_n$ converge, alors $\sum a_n$ converge.*
2. *Si $\sum a_n$ diverge, alors $\sum b_n$ diverge.*

Preuve. Si $\sum b_n$ converge, soit S sa somme. Comme le terme général b_n est positif, pour tout $n \geq 0$:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \leq \sum_{k=0}^{n} b_k \leq S.$$

La suite $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)_{n\geq 0}$ est donc majorée. Comme elle est croissante (car les a_n sont tous positifs), elle est convergente. Le deuxième point se prouve par contraposée. □

Remarque. Mutatis mutandis, ce théorème reste vrai si $a_n \leq b_n$ à partir d'un certain rang seulement.

Corollaire 4 (Critère de domination) *Soient $\sum a_k$ et $\sum b_k$ deux séries à termes positifs, telles que $a_n = \mathcal{O}(b_n)$ au voisinage de l'infini.*

1. *Si $\sum b_n$ converge, alors $\sum a_n$ converge.*
2. *Si $\sum a_n$ diverge, alors $\sum b_n$ diverge.*

Preuve. Il existe $M > 0$, telle que si n est assez grand, $a_n \leq M b_n$. Comme les séries de terme général b_n et Mb_n sont de même nature, on en déduit le résultat par les critères de comparaison. □

Corollaire 5 *Soient $\sum a_k$ et $\sum b_k$ deux séries à termes positifs, telles que $a_n \sim b_n$ au voisinage de l'infini. Alors les séries de terme général a_n et b_n sont de même nature.*

Preuve. On a alors $a_n = \mathcal{O}(b_n)$ et $b_n = \mathcal{O}(a_n)$ au voisinage de $+\infty$. On applique alors le résultat précédent. □

Voici une application directe de ces résultat.

Théorème 6 (Etude des séries de Riemann) *Soit $\alpha > 0$. La série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.*

Preuve. Remarquons d'abord qu'il s'agit de séries à termes positifs.
Premier cas. Si $\alpha = 1$, par un développement limité en $1/n$:

$$\ln(1 + 1/n) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right).$$

Donc au voisinage de l'infini, $\ln(1 + 1/n) \sim \frac{1}{n}$. Comme la série de terme général $ln(1 + 1/n)$ diverge, la série de terme général $1/n$ aussi.

Deuxième cas. Si $\alpha \leq 1$, alors pour tout $n \geq 0$, $\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n}$. Par le critère de comparaison, la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.

Troisième cas. Supposons $\alpha > 1$. Considérons la série de terme général a_n définie par :

$$a_n = \frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}.$$

On obtient :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = 1 - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}.$$

Comme $\alpha - 1 > 0$, la limite en l'infini de $(n+1)^{\alpha-1}$ est $+\infty$, donc la série de terme général converge (vers 1). D'autre part, en effectuant un développement limité en $1/n$:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\frac{1}{(1+1/n)^{\alpha-1}} \\ &= \frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}}(1+1/n)^{1-\alpha} \\ &= \frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}}(1+(1-\alpha)1/n + 1/n\varepsilon(1/n)) \\ &= \frac{\alpha-1}{n^{\alpha}} + \frac{1}{n^{\alpha}}\varepsilon(1/n). \end{aligned}$$

Donc $\frac{1}{n^\alpha} \sim a_n$. D'après le critère de comparaison, la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ converge. □

Remarque. Ces séries sont des séries de référence, elles peuvent être utilisées pour montrer que certaines séries à termes positifs sont convergentes ou divergentes en utilisant les critères de comparaison.

2.2 Séries absolument convergentes

Comment se ramener au cas de séries positives ?

Définition 7 *On dira que la série de terme général a_n est* absolument convergente *si la série de terme général $|a_n|$ est convergente.*

Proposition 8 *Si la série de terme général a_n est absolument convergente, alors elle est convergente. De plus :*

$$|\sum_{k=0}^{\infty} a_k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|.$$

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$. Comme la suite $(\sum |a_k|)_{n\geq 0}$ est convergente, elle vérifie le critère de Cauchy et donc il existe $p \geq 0$ tel que pour tout $l \geq 0$,

$$\sum_{k=p}^{p+l} |a_k| \leq \varepsilon.$$

Par l'inégalité triangulaire :

$$|\sum_{k=p}^{p+l} a_k| \leq \varepsilon.$$

On en déduit que la suite $(\sum a_k)_{n\geq 0}$ vérifie le critère de Cauchy et donc est convergente. De plus, pour tout $n \geq 0$:

$$|\sum_{k=0}^{n} a_k| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k|.$$

On obtient l'inégalité voulue en passant à la limite. □

On verra que la réciproque est fausse : on montrera que la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n}$ est convergente, alors que la série de terme général $\frac{1}{n}$ ne l'est pas. On parle de *semi-convergence*.

3 Comparaison à la série géométrique

Proposition 9 *Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. La série géométrique de raison α est la série de terme général α^n. Elle converge si, et seulement si, $|\alpha| < 1$. Dans ce cas, sa somme est $\frac{1}{1-\alpha}$.*

Preuve. Supposons la série géométrique de raison α convergente. Alors son terme général tend vers 0, donc α^n tend vers 0 : $|\alpha| < 1$.

Supposons $|\alpha| < 1$. On a :

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha^k = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}.$$

Comme α^{n+1} tend vers 0 en l'infini, ceci tend vers $\frac{1}{1-\alpha}$. □

Théorème 10 (Critère de Cauchy) *Soit $\sum a_k$ une série. On suppose que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} |a_n|^{1/n}$ existe et vaut λ.*

1. *Si $\lambda < 1$, la série $\sum a_k$ est absolument convergente.*
2. *Si $\lambda > 1$, la série $\sum a_k$ est divergente.*
3. *Si $\lambda = 1$, on ne peut pas conclure. C'est le* cas douteux *du critère de Cauchy.*

Preuve. 1. Supposons $\lambda < 1$. On choisit μ tel que $\lambda < \mu < 1$, par exemple $\mu = \frac{1+\lambda}{2}$. Alors si n est assez grand, $|a_n|^{1/n} \leq \mu$. Par suite, si n est assez grand, $|a_n| \leq \mu^n$. Par le critère de comparaison, $\sum |a_k|$ est convergente car $\sum \mu^k$ est convergente.

2. Supposons $\lambda > 1$. On choisit μ tel que $1 < \mu < \lambda$, par exemple $\mu = \frac{1+\lambda}{2}$. Alors si n est assez grand, $|a_n|^{1/n} \geq \mu$. Par suite, si n est assez grand, $|a_n| \geq \mu^n$. Par le critère de comparaison, $\sum |a_k|$ est divergente car $\sum \mu^k$ est divergente. □

Théorème 11 (Critère de d'Alembert) *Soit $\sum a_n$ une série dont le terme général ne s'annule pas si n est assez grand. On suppose que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ existe et vaut λ.*

1. *Si $\lambda < 1$, la série $\sum a_k$ est absolument convergente.*
2. *Si $\lambda > 1$, la série $\sum a_k$ est divergente.*
3. *Si $\lambda = 1$, on ne peut pas conclure. C'est le* cas douteux *du critère de d'Alembert.*

Preuve. 1. Supposons $\lambda < 1$. On choisit μ tel que $\lambda < \mu < 1$, par exemple $\mu = \frac{1+\lambda}{2}$. Alors si n est assez grand, $|a_{n+1}| \leq \mu |a_n|$. Une récurrence simple montre qu'il existe C tel que $|a_n| \leq C\mu^n$ pour n assez grand. Par le critère de comparaison, $\sum |a_k|$ est convergente car $\sum \mu^k$ est convergente.

2. Supposons $\lambda > 1$. On choisit μ tel que $1 < \mu < \lambda$, par exemple $\mu = \frac{1+\lambda}{2}$. Alors si n est assez grand, $|a_{n+1}| \geq \mu |a_n|$. Une récurrence simple montre qu'il existe C tel que $|a_n| \geq C\mu^n$ pour n assez grand. Par le critère de comparaison, $\sum |a_k|$ est divergente car $\sum \mu^k$ est divergente. □

4 Séries alternées

Définition 12 *On dira qu'une série est* alternée *si son terme général est de la forme $(-1)^{n+1}a_n$, avec $a_n \geq 0$.*

Théorème 13 (Critère des séries alternées) *Soit $\sum(-1)^{k+1}a_k$ une série alternée. Si la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ décroit vers 0, alors cette série est convergente. De plus, pour tout $n \geq 0$:*

$$\sum_{k=0}^{2n}(-1)^{k+1}a_k \leq \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k \leq \sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^{k+1}a_k.$$

Preuve. On pose pour tout $n \geq 0$:

$$u_n = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^{k+1} a_k, \; v_n = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^{k+1} a_k.$$

Pour tout $n \geq 0$,

$$v_n - u_n = (-1)^{2n+2} a_{2n+1} = a_{2n+1},$$

donc $u_n \leq v_n$ pour tout n et $\lim_{n \longrightarrow +\infty} v_n - u_n = 0$. D'autre part, pour tout $n \geq 1$:

$$u_{n+1} - u_n = (-1)^{2n+3} a_{2n+2} + (-1)^{2n+2} a_{2n+1} = -a_{2n+2} + a_{2n+1} \geq 0,$$

car la suite (a_n) décroît. Donc la suite (u_n) est croissante. De même, la suite (v_n) est décroissante. Les suites (u_n) et (v_n) sont donc adjacentes, elles ont donc une limite commune λ. Pour tout $n \geq 0$, $u_n \leq \lambda \leq v_n$. On en déduit également que la suite $(\sum (-1)^{k+1} a_k)_{n \geq 0}$ converge vers l, donc la série de terme général $(-1)^{n+1} a_n$ converge vers l. $\square$

Exemple. Si $\alpha > 0$, la série $\sum \frac{(-1)^k}{k^\alpha}$ est donc convergente. En particulier, si $0 < \alpha \leq 1$, elle est semi-convergente. Si $\alpha > 1$, elle est convergente.