Développements limités

1 Définitions et exemples

Définition 1 *Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et n un entier. Soit $a \in I$. On dit que f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de a s'il existe des constantes $a_0, \ldots, a_n$ et une fonction $\varepsilon : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in I$:*

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon(x),$$

avec $\lim\limits_{x \longrightarrow a} \varepsilon(x) = 0$.

Remarques.

1. Si f admet un développement limité à l'ordre n en a, elle admet aussi un développement limité à l'ordre m en a pour tout $m \leq n$:

$$\begin{aligned} f(x)a &= a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_m(x-a)^m \\ &\quad +(x-a)^m \underbrace{\left(a_{m+1}(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^{n-m} + (x-a)^{n+m}\varepsilon(x)\right)}_{\varepsilon'(x)}. \end{aligned}$$

2. Si f admet un développement limité en a à l'ordre 0, pour tout $x \in I$:

$$f(x) = a_0 + \varepsilon(x).$$

   En particulier, pour $x = a$, $a_0 = f(a)$. De plus, $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = f(a)$: f est continue en a. En conséquence, si f admet un développement limité à l'ordre $n \geq 0$ en a, alors f est continue en a et $a_0 = f(a)$.

3. Si f admet un développement limité en a à l'ordre 1, alors pour tout $x \in I$:

$$f(x) = f(a) + (x-a)a_1 + (x-a)\varepsilon(x).$$

   On obtient :

$$a_1 = \lim_{x \longrightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

   Donc f est dérivable en a et $f'(a) = a_1$. En conséquence, si f admet un développement limité en a à l'ordre $n \geq 1$, alors f est dérivable en a et $a_0 = f(a)$, $a_1 = f'(a)$.

4. En poursuivant ce raisonnement, on montre que le développement limité de f en a à l'ordre n est unique, lorsqu'il existe.

Théorème 2 (Formule de Taylor) *Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et n un entier. Soit $a \in I$. On suppose que la dérivée n-ième de f en a existe. Alors f admet un développement limité en a à l'ordre n, donné par :*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon(x).$$

Cette formule permet de démontrer les développements limités suivants :

$$\begin{aligned}
e^x &= 1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+x^n\varepsilon(x),\\
e^{-x} &= 1-x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^n}{n!}+x^n\varepsilon(x),\\
\cos(x) &= 1-\frac{x^2}{2!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+x^{2n+1}\varepsilon(x),\\
\sin(x) &= x-\frac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+x^{2n+2}\varepsilon(x),\\
\ln(1+x) &= x-\frac{x^2}{2}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+x^n\varepsilon(x),\\
\frac{1}{1-x} &= 1+x+\ldots+x^n+x^n\varepsilon(x).
\end{aligned}$$

2 Calculs de développements limités

Proposition 3 *Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ admettant toutes deux un développement limité à l'ordre n en a.*

1. *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors λf possède un développement limité en a à l'ordre n, obtenu en multipliant le développement limité de f par λ.*
2. *$f+g$ possède un développement limité en a à l'ordre n, obtenu en sommant les développements limités de f et g.*
3. *fg possède un développement limité en a à l'ordre n, obtenu en multipliant les développements limités de f et g et en les tronquant à l'ordre n.*

Exemples.

1. On obtient le développement limité de $ch(x)$ et $sh(x)$ ainsi :

$$\begin{aligned}
ch(x) &= 1+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{2n!}+x^{2n+1}\varepsilon(x),\\
sh(x) &= x+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+x^{2n+2}\varepsilon(x).
\end{aligned}$$

2. Calculons le développement limité de $e^x\cos(x)$ en 0 à l'ordre 2 :

$$e^x\cos(x) = (1+x+x^2/2+x^2\varepsilon(x))(1-x^2/2+x^2\varepsilon(x)) = 1+x+x^2\varepsilon(x).$$

Proposition 4 *Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$, admettant toutes deux un développement limité à l'ordre n en a. On suppose que $g(a) \neq 0$. Alors f/g possède un développement limité à l'ordre n en a, obtenu en divisant le développement limité de f par le développement limité de g suivant les puissances croissantes.*

Exemple. Calculons le développement limité de $\tan(x)$ en 0 à l'ordre 4 :

$$\begin{array}{r|l}
x-\dfrac{x^3}{6} & 1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}\\
0+\dfrac{x^3}{3} & x+\dfrac{x^3}{3}\\
0 &
\end{array}$$

Donc $\tan(x) = x+\dfrac{x^3}{3}+x^4\varepsilon(x^4)$.

Proposition 5 *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, dérivable, telle que f' admet un développement limité en a à l'ordre n :*

$$f'(x) = a_0 + \ldots + a_n(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon_1(x).$$

Alors f possède un développement limité à l'ordre n au voisinage de a, donné par :

$$f(x) = f(a) + a_0(x-a) + \ldots + \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1} + (x-a)^{n+1}\varepsilon_2(x).$$

Exemple. Calculons le développement limité de $Arctan(x)$ en 0. Comme $Arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, on déduit du développement limité de $\frac{1}{1-x}$ que :

$$Arctan'(x) = 1 - x^2 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + x^{2n+1}\varepsilon(x).$$

Donc :

$$Arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+2}\varepsilon(x).$$

Remarque. La réciproque est fausse (voir TD).