Travaux Dirigés

Table des matières

1 Rappels

Équations différentielles linéaires d'ordre 1 et 2

Exercice 1

D'après une loi due à Newton, le taux de refroidissement d'un corps plongé dans de l'air plus froid est proportionnel à la différence de température entre ce corps et l'air.

1. Écrire l'équation différentielle satisfaite par la température.
2. Si, dans de l'air à 20°, ce corps met 20 minutes pour passer de 100° à 60°, combien de temps met-il pour atteindre 30°.
3. On regarde maintenant l'évolution de la température du sol. On suppose pour simplifier que la température de l'air varie de façon régulière : $T_{air}(t) = -5 + 35\cos(2\pi t/365)$, et que le sol et l'air ont initialement la même température.
4. Même question avec une variation brusque de la température en une nuit : $T_{air}(t) = 25 - 25t^2$.

Exercice 2

Des nutriments entrent dans une cellule à la vitesse constante de R molécules par unité de temps, et en sortent proportionnellement à la concentration : si N est la concentration à l'instant t, le processus ci-dessus se modélise par l'équation :

$$\frac{dN}{dt} = R - KN.$$

Intégrer cette équation. Y a-t-il un équilibre (*i.e.* une solution constante) ? La concentration va-t-elle tendre vers un équilibre (*i.e.* l'équilibre est-il stable) ?

Exercice 3

Résoudre les équations différentielles suivantes. Sur quel intervalle la solution existe-t-elle ?

$$\begin{array}{ll} (a)\ y' - y = t - 2e^t & (b)\ (1+t^2)y' + ty = 0 \\ (c)\ (t^3-1)y' + ty = 0 & (d)\ y'\cos(t) + y\sin(t) = 2\cos(t) \end{array}$$

Exercice 4

Résoudre le problème de Cauchy suivant (Equations linéaires d'ordre 1 avec second membre).

$$\begin{cases} u'(t) = (t^2+1)u(t) + 5e^{\frac{t^3}{3}} \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

où $u_0 \in \mathbb{R}$.

Exercice 5

Résoudre les problèmes de Cauchy suivants (Equations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants).

$$\begin{cases} u''(t) = 5u(t)' - 6u(t) \\ u(0) = 3 \\ u'(0) = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} u''(t) = 2u(t)' - u(t) + \sin(t) \\ u(0) = 0 \\ u'(0) = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} u''(t) = 2u(t)' - 3u(t) \\ u(0) = 0 \\ u'(0) = 0 \end{cases}$$

Exercice 6

Vérifier que la fonction $t \mapsto e^t$ est solution de l'équation différentielle

$$(t+1)y'' - y' - ty = 0.$$

Déterminer une autre solution de cette équation, non proportionnelle à la première.

Exercice 7

Résoudre $u' = |u|$ sur $\mathbb{R}$.

Suites et séries de fonctions

Exercice 8

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Montrer que l'ensemble $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{K}^N)$ des applications continues de I dans $\mathbb{K}^N$ est un espace vectoriel normé complet pour la “norme de la convergence uniforme” :

$$\| v \|_\infty := \sup_{t \in I} \| v(t) \|_\star .$$

Exercice 9

Soit $\alpha \geq 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$ on pose $f_n(x) = n^\alpha x^n (1-x)$.

1. Montrer que la suite de fonctions $\{f_n\}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction limite que l'on déterminera.
2. Pour quelles valeurs de α la suite $\{f_n\}$ converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?
3. Montrer que $\{f_n\}$ converge uniformément sur tous compacts de $]0,1[$ pour tout $\alpha \geq 0$.

Exercice 10

Soit $f :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\int_1^{+\infty} s|f(s)|\, ds < \frac{1}{2}$. On considère l'équation différentielle scalaire suivante :

$$u'' + f(t)u = 0 . \tag{2}$$

Pour trouver une solution particulière de cette équation, nous allons construire par récurrence une suite de fonctions $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de la façon suivante : on pose $u_0(t) = 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in]1, +\infty[$,

$$u_{n+1}(t) = 1 + \int_t^{+\infty} (t-s) u_n(s) f(s)\, ds .$$

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_t^{+\infty} (t-s) u_n(s) f(s)\, ds$ est absolument convergente, que u_n est bornée, et que u_n est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]1, +\infty[$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in]1, +\infty[$,

$$|u_{n+1}(t) - u_n(t)| \leq \left(\int_t^{+\infty} s|f(s)|\, ds \right)^{n+1} .$$

3. En utilisant la question précédente, montrer que la suite $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction u_* bornée telle que

$$u_*(t) = 1 + \int_t^{+\infty} (t-s)u_*(s)f(s)\,ds\,.$$

4. Montrer que la fonction u_* est solution de l'équation (2) sur $]1,+\infty[$, et que

$$\lim_{t\to+\infty} u_*(t) = 1\,, \qquad \lim_{t\to+\infty} u_*'(t) = 0\,.$$

Inéquations différentielles

Exercice 11

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ une fonction dérivable qui vérifie l'inégalité différentielle suivante pour tout $x \in]0,1[$,

$$f(x) \le Cx^{2+\alpha} + xf'(x), \tag{3}$$

où $C \ge 0$ et $\alpha > 0$ sont des constantes.

1. Montrer que l'énoncé est non vide (i.e. il existe de telles fonctions f).
2. Montrer que la limite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x}$ existe et est finie.

Exercice 12

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction C^1 qui vérifie l'inégalité différentielle suivante pour tout $x \in [0,1]$,

$$f(x) \le \alpha x f'(x), \tag{4}$$

où $\alpha > 0$. Montrer alors que pour tout $x \in [0,1]$,

$$f(x) \le x^{\frac{1}{\alpha}} f(1).$$

Exercice 13

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue telle que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

et soit $u : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction de classe C^1 qui vérifie

$$0 \le \sqrt{u(x)} + u'(x) \le f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^+. \tag{5}$$

On souhaite montrer alors que

$$\lim_{x\to+\infty} u(x) = 0. \tag{6}$$

1. Montrer que (6) est vrai lorsque u est décroissante à partir d'un certain x_0.
2. Montrer que si u ne tend pas vers 0 et n'est pas décroissante à partir d'un certain temps, alors il existe un $\varepsilon > 0$ et une suite x_n qui tend vers $+\infty$, telle que $u(x_n) > \varepsilon$ et $u'(x_n) > 0$.
3. Conclure.

2 Algèbre Linéaire - Exponentielle de Matrices

Exercice 14

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie N et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On note $P_f(X) = (-1)^N \prod_{i=1}^{p}(X-\lambda_i)^{\alpha_i}$ son polynôme caractéristique et Q_f son polynôme minimal. Pour tout i, soit $N_i = \ker(f-\lambda_i \mathrm{Id})^{\alpha_i}$ le sous-espace caractéristique de f associé à la valeur propre λ_i. Justifier les points suivants :

1. Pour tout i, N_i est stable par f.
2. On a $E = N_1 \oplus \cdots \oplus N_p$.
3. Pour tout i, $\dim N_i = \alpha_i$.
4. $Q_A(X)$ divise le polynôme caractéristique $P_A(X)$. On le note $Q_A(X) = \prod_{i=1}^{p}(X-\lambda_i)^{\beta_i}$, avec $1 \leq \beta_i \leq \alpha_i$.
5. $N_i = \ker(f-\lambda_i \mathrm{Id})^{\beta_i}$.
6. f est diagonalisable si et seulement si $\beta_i = 1$ pour $i = 1, \cdots, p$.
7. Diagonaliser ou trigonaliser les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 7 & 8 & 4 \\ -4 & -5 & -2 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} ;$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 15

Pour tout polynôme complexe $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ et pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^n$, on note

$$P(D)(f) = \sum_{i=0}^{n} a_i f^{(i)} = a_n f^{(n)} + \cdots + a_1 f' + a_0 f$$

(D est l'opérateur de dérivation).

1. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, on note $\mathcal{S}_P$ l'espace des solutions de l'équation différentielle $P(D)(y) = 0$. Si $P_1, \cdots, P_k \in \mathbb{C}[X]$ sont des polynômes premiers entre eux deux à deux, montrer que $\mathcal{S}_{P_1 \cdots P_k} = \mathcal{S}_{P_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{S}_{P_k}$.
2. Si $P_n(X) = (X-\alpha)^n$, déterminer la forme des solutions de l'équation différentielle $P_n(D)(y) = 0$.
3. En déduire, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$ ($\deg(P) \geq 1$), la forme des solutions de l'équation différentielle $P(D)(y) = 0$.
4. Adapter cette méthode à la résolution des relations de récurrence linéaires d'ordre n à coefficients constants.

Exercice 16

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie N et soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer qu'il existe un couple $(d, n) \in (\mathcal{L}(E))^2$ avec d diagonalisable et n nilpotente, tel que

$$(i)\ f = d + n \quad (ii)\ n \circ d = d \circ n$$

2. Montrer que le couple (d, n) satisfaisant les hypothèses de la question 1 est unique. On l'appelle la décomposition de Dunford de l'endomorphisme f.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_{N\times N}(\mathbb{K})$. Après avoir rappelé sa définition, expliciter $\exp(A)$ dans les cas suivants :
   (a) A est diagonalisable,
   (b) A est nilpotente,
   (c) A est quelconque.
4. Donner la décomposition de Dunford et calculer l'exponentielle des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 7 & 8 & 4 \\ -4 & -5 & -2 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} ;$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Exercice 17

Pour $A, B \in \mathcal{M}_{N\times N}(\mathbb{K})$ on note le crochet de Lie $[A, B] = AB - BA$. Dans toute la suite A et B sont des matrices de $\mathcal{M}_{N\times N}(\mathbb{K})$.

1. Montrer que $[A, \exp(tA)] = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et que
$$\frac{d}{dt}\exp(tA) = A\exp(tA).$$
2. On suppose que $[A, B] = 0$. Montrer que $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$.
3. On suppose désormais que $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$. Le but de cette question est de montrer que dans ce cas on a
$$\begin{aligned} \exp(A + B) &= \exp(A)\exp(B)\exp(\frac{1}{2}[A, B]) \\ &= \exp(A)\exp(B)\exp(-\frac{1}{2}[B, A]). \end{aligned}$$
   (a) Pour $x_0 \in \mathbb{K}^N$ fixé, posons
$$\begin{aligned} x_1(t) &= \exp(tA)x_0 \\ x_2(t) &= \exp(tB)x_1 \\ x_3(t) &= \exp(-t(A + B))x_2. \end{aligned}$$
   Montrer que
$$\frac{dx_3}{dt} = \exp(-t(A + B))\varphi(t)\exp(tB)\exp(tA)x_0$$
   où $\varphi(t) = -A + \exp(tB)A\exp(-tB)$.
   (b) Calculer $\varphi'(t)$. En déduire que $x_3 = \exp(\frac{t^2}{2}[A, B])x_0$ puis le résultat cherché.

Exercice 18

Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_{N\times N}(\mathbb{K})$ on a :
$$\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{tr}A).$$
(Indication : identifier l'équation différentielle vérifiée par $t \mapsto \det(\exp(tA))$).

3 Systèmes Différentiels Linéaires

Systèmes différentiels linéaires d'ordre 1

Exercice 19

On considère le système $X' = AX$ où $A \in \mathcal{M}_{N\times N}(\mathbb{K})$. Décrire les solutions lorsque

1. $A^2 = 0$,
2. A est un projecteur.

Exercice 20

Soit $t \mapsto A(t)$ une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, et soit $X(t)$ une solution de l'équation

$$X'(t) = A(t) \circ X(t).$$

On suppose que la matrice $A(t)$ est antisymétrique pour tout $t \in \mathbb{R}$. Quelle est l'équation différentielle satisfaite par ${}^tX \circ X$? En déduire que si $X(t_0)$ est une matrice orthogonale, alors $X(t)$ est une matrice orthogonale pour tout t.

Exercice 21

Résoudre les systèmes différentiels suivants :

$$\left\{\begin{array}{rl} x' = & 2x + y + 2z \\ y' = & -2x - y - 4z \\ z' = & x + y + 3z \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rl} x' = & x - y + 1 \\ y' = & 2x + 4y + e^t \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rl} x' = & x - y \\ y' = & 3x + 4y \end{array}\right.$$

Exercice 22

Trouver la résolvante du système différentiel

$$\left\{\begin{array}{rl} x' = & x + y \\ y' = & 2x \end{array}\right. .$$

En déduire l'expression de la matrice

$$\exp(tA) \qquad \text{pour } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 23

Soit le système

$$(S) \begin{cases} x'(t) = -x - y \\ y'(t) = -2x - 2y. \end{cases}$$

1. Déterminer toutes les "positions d'équilibre" du système, c'est-à-dire les solutions constantes. Les représenter sur un dessin et tracer les vecteurs $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$.
2. Résoudre le système (S). Qu'obtient-on lorsque t tend vers $+\infty$?

Exercice 24

1. Donner la forme générale des solutions du système différentiel $X' = AX$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. En déduire la matrice Résolvante associée, vérifier que $\det(R(t,0)) = e^{tr(A)t}$ et trouver $\exp(A)$.
3. Mêmes questions avec les matrices suivantes

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 25

On considère la matrice M et les vecteurs X_0, B suivants :

$$M = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 4 \\ -4 & -5 & -2 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix},\ X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la solution générale du système $X' = MX$.
2. Déterminer l'unique solution valant X_0 en $t = 0$.
3. Trouver la solution générale du système (avec second membre) $X' = MX + B$.

Exercice 26

Intégrer les trois systèmes différentiels suivants (x, y, z, u désignant des fonctions dérivables de la variable t) :

$$(S) \begin{cases} x' = x + y + z + 1 \\ y' = -x + 2y + z + t \\ z' = x + z + t^2 e^t \end{cases} \quad (S') \begin{cases} x' = x - y + 2u \\ y' = -3x + 2y + z + u \\ z' = -2x + 2z + 2u \\ u' = -3x + y + z + 2u \end{cases} \quad (S'') \begin{cases} x' = 2x - y + u \\ y' = -x + y + z + u \\ z' = -2x + 2y + 2z - 2u \\ u' = -2x + y + z + u \end{cases}$$

Équations différentielles linéaires d'ordre N

Exercice 27

Soit à résoudre, sur $\mathbb{R}^{+*}$, l'équation différentielle

$$x^2 y'' + 2xy' - 2y = x - 1.$$

1. Montrer que l'équation homogène admet une base de solutions de la forme $x \mapsto x^\alpha$.
2. Trouver une solution particulière par la méthode de variation des constantes.
3. Trouver la solution vérifiant $y(1) = 1, y'(1) = 0$.

Une équation de la forme $\sum a_k x^k y^{(k)} = 0$, où les a_k sont des constantes, est appelée *équation d'Euler*. Elle admet toujours des solutions de la forme x^α et dans certains cas, une base de solutions de cette forme. On peut se ramener aux équations linéaires à coefficients constants en posant $x = e^t$.

Exercice 28

Donner la forme générale des solutions du système différentiel réel suivant :

$$\begin{cases} u' = -v \\ v'' = u \end{cases}$$

Exercice 29

Trouver toutes les solutions des équations différentielles suivantes :

$$\begin{array}{ll} (1) & y^{(3)} + y'' - y' - y = 1 + 2\mathrm{ch}(x) \\ (2) & y^{(4)} + y = -x^4 + 1 \\ (3) & y^{(4)} + 16y = \sin(2x)\cos(4x) \end{array}$$

Trouver l'unique solution du problème de Cauchy suivant.

$$\begin{cases} y^{(4)} - 2y'' + y = x \\ y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 0, y'''(0) = 4. \end{cases}$$

4 Champ Linéaire de Vecteurs - Portraits de Phase

Exercice 30

1. Résoudre en fonction de $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ le système suivant d'inconnues $x, y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$:

$$\begin{cases} x' &= 2x + y \\ y' &= 4x - y \\ x(0) &= x_0 \in \mathbb{R} \\ y(0) &= y_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

2. Représenter graphiquement les solutions $(x(t); y(t))$ dans le plan pour les valeurs initiales $(x_0; y_0) = (1; 1)$ et $(x_0; y_0) = (1; -4)$ (en indiquant le sens de parcourt de la trajectoire).

   La suite de l'exercice a pour but de tracer la représentation graphique de $(x(t); y(t))$ pour $(x_0; y_0) = (5; 0)$.

3. Donner la solution $(x(t); y(t))$ lorsque $(x_0; y_0) = (5; 0)$.

   On définit maintenant la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

   et on note $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix}$ où $(x(t); y(t))$ est la solution du système pour $(x_0; y_0) = (5; 0)$.

4. Montrer que $Y(t) = CX(t)^\alpha$ pour un exposant α et une constante C à déterminer.
5. En déduire la représentation graphique de $(x(t); y(t))$ pour $(x_0; y_0) = (5; 0)$ (en la justifiant).

Exercice 31

On se propose cette fois de faire l'étude générale d'un système linéaire homogène d'ordre 1 dans $\mathbb{R}^2$, c'est à dire du type

$$u' = Au \text{ avec } A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

Décrire les solutions de ce système, en discutant des cas où A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$, diagonalisable dans $\mathbb{C}$ ou pas diagonalisable. Tracer l'allure les courbes solutions $u(t)$ correspondantes.

5 Exemples d'étude qualitative des solutions d'une EDL d'ordre 2

Exercice 32

Soient p et q deux fonctions continues sur un intervalle ouvert I. On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

1. Soit φ une solution non identiquement nulle de (E). Prouver qu'il n'existe aucun τ de I tel que $\varphi(\tau) = \varphi'(\tau) = 0$.
2. Prouver que, si deux solutions φ et ψ de (E) s'annulent en un point τ, elles sont proportionnelles. De même, prouver que, si $\varphi'(\tau) = \psi'(\tau) = 0$, elles sont proportionnelles.
3. Montrer que toute solution non nulle de l'équation (E) possède un nombre fini de zéros sur tout intervalle $[a, b] \subset I$.

Exercice 33

Soient p et q deux fonctions continues sur un intervalle ouvert I. On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

1. Soient u et v deux solutions linéairement indépendantes de l'équation ci-dessus. On suppose que u s'annule au moins deux fois sur I. Prouver qu'il existe deux zéros distincts de u, x_1 et x_2, entre lesquels u ne s'annule pas. Quitte à choisir $-u$ au lieu de u, on supposera que u reste > 0 entre x_1 et x_2.
2. (a) Déterminer le signe de $u'(x_1)$ et celui de $u'(x_2)$. La fonction v peut-elle s'annuler en x_1 ou x_2 ? Ou supposera $v(x_1) < 0$, quitte à travailler avec $-v$.
   (b) En étudiant le wronskien de u et v, montrer que v s'annule une fois dans $]x_1, x_2[$.
   (c) Prouver que v s'annule une seule fois sur $]x_1, x_2[$.

Exercice 34

Soit $q : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et telle que l'intégrale généralisée

$$\int_0^\infty |q(t)|dt$$

converge. On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad y'' - qy = 0.$$

1. Soit φ une solution, que l'on suppose bornée, de (E). En étudiant $\int_0^\infty \varphi''(t)dt$, montrer que φ' admet une limite finie en $+\infty$ puis que cette limite est nulle.
2. En déduire, à l'aide du Wronskien, que l'équation (E) a au moins une solution non bornée.

6 Equations Non Linéaires

Fonctions Lipschitziennes

Exercice 35

1. Les fonctions suivantes sont-elles Lipschitziennes ou localement Lipschitziennes en x sur les ouverts proposés ?
   (i) $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(t, x) = e^{tx}$.
   (ii) $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(t, x) = xe^{t^2}$.
   (iii) $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(t, x) = t\sqrt{|x|}$.
   (iv) $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(t, x) = \sin(tx^2)$.
   (v) $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(t, x) = \sin(tx)$.
   (vi) $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(t, x) = \ln(1 + t^2)|x|$.
   (vii) $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$, $f(t, x) = (x_1^2 + 3x_2 + 1, x_1x_2)$.
   (viii) $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$, $f(t, x) = (|x_1 + x_2|, \cos(x_2))$.
   (ix) $\Omega =]0, 1[\times\mathbb{R}$, $f(t, x) = \frac{\arctan x}{t}$.
2. Que peut-on en déduire concernant le problème de Cauchy

$$\begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(t_0) = x_0, \qquad (t_0, x_0) \in \Omega \end{cases}$$

avec f l'une des fonctions étudiées ci-dessus ?

Exercice 36

Montrer que la fonction

$$f(t, x) := \sqrt{|t|} \sin\left(\frac{x}{|t|}\right)$$

est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, qu'elle est C^1 en x pour tout t fixé mais n'est pas Localement Lipschitzienne.

Exercice 37

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $\Omega = I \times \mathbb{R}$. Soit a et b deux fonctions définies et continues sur I, à valeurs réelles. On pose, pour tout $(t, x) \in \Omega$,

$$f(t, x) = a(t)x + b(t).$$

Montrer que f est localement Lipschitzienne par rapport à x sur Ω.

Exercice 38

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ouvert, $x_0 \in \Omega$, et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur Ω et de classe C^1 sur $\Omega \setminus \{x_0\}$. On suppose de plus que

$$\sup_{x\in\Omega\setminus\{x_0\}} \|\nabla f(x)\| < +\infty.$$

Montrer que f est localement Lipschitzienne sur Ω et donner un exemple non trivial d'une telle fonction f.

Exercice 39

Pour toute fonction f on note

$$f^* := \min_y \left(\|x - y\| - f(y)\right).$$

Montrer que $f^* = f$ si et seulement si f est 1-Lipschitzienne.

Équations de Bernoulli et de Riccati

Exercice 40

L'équation de Bernoulli est de la forme

$$y' = a(t)y^\alpha + b(t)y,$$

avec a et b continues sur un intervalle I. On cherche des solutions > 0. On effectue le changement de variable $z = y^{1-\alpha}$ qui ramène à une équation linéaire en z.

L'équation de Riccati est

$$y' = a(t)y^2 + b(t)y + c(t),$$

avec a, b et c continues sur l'intervalle I. Si l'on connaît une solution y_1 de cette équation, $z = y - y_1$ vérifie une équation de Bernoulli avec $\alpha = 2$ et $u = z^{-1}$ vérifie une équation linéaire.

Trouver toutes les solutions, sur des intervalles inclus dans $\mathbb{R}^{+*}$, des équations différentielles suivantes

$$2ty' + y + 3t^2y^2 = 0,$$
$$t^2y' = t^2y^2 + ty + 1,$$

en cherchant une solution particulière de la deuxième sous la forme $y(t) = -t^n$.

Solutions maximales

Exercice 41

On considère le problème suivant

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{\sin(y)} \\ y(0) = y_0 \in]0, \pi[\end{cases}$$

Supposons qu'il existe une solution (I, φ) où I est un intervalle ouvert contenant 0 et φ une fonction de classe C^1 sur I.

1. Prouver que pour tout $t \in I$, $\varphi(t) \in]0, \pi[$.
2. Prouver que, sur I, φ vérifie

$$\varphi'(t)\sin(\varphi(t)) = 1$$

   et en déduire la valeur de $\cos(\varphi(t))$.
3. Déterminer φ et I, et en déduire que le problème ci-dessus admet une unique solution maximale.

Exercice 42

Pour chacun des problèmes de Cauchy suivants, prouver l'existence et l'unicité de la solution dans un voisinage du point x_0, puis déterminer la solution maximale.

$$(1) \begin{cases} y' = \frac{1+y^2}{y} \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad (2) \begin{cases} y' = \sqrt{|y|} \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad (3) \begin{cases} y' = \sqrt{|y|} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Exercice 43

On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} u' = \frac{t-u}{t+u} \\ u(1) = 1 \end{cases}$$

1. Prouver l'existence et l'unicité de la solution dans un voisinage de $t_0 = 1$.
2. On se propose de poser $v(t) = \frac{u(t)}{t}$. Montrer que cette opération est licite dans un voisinage de $t_0 = 1$. Attention : on ne prétend pas que ce voisinage est l'intervalle maximal de définition de la solution. Déterminer v, et en déduire u.
3. La fonction v ainsi trouvée est-elle la solution maximale du problème considéré ?

Exercice 44

Donner toutes les solutions maximales du système

$$\begin{cases} u'' = u'u \\ u(0) = 0 \\ u'(0) = u_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Exercice 45

On considère le problème de Cauchy

$$(1) \begin{cases} y'' = \frac{1}{y} \\ y'(0) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

1. Montrer que (1) possède une solution maximale φ définie sur un intervalle ouvert $]a, b[$ contenant 0.
2. Montrer que $a = -b$ et que φ est paire.
3. Etablir le tableau de variation de φ. Montrer que si $b \in \mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{x\to b} \varphi$ ou $\lim\limits_{x\to b} \varphi'$ est infinie.
4. Montrer que $]a, b[= \mathbb{R}$.
5. Exprimer φ à l'aide de la fonction $F : x \mapsto \int_0^x e^{t^2} dt$.

Exercice 46

On considère le problème de Cauchy suivant.

$$(1) \begin{cases} x' = x(2 - \frac{y'}{y}) \\ y' = 3(x+y) - x' \\ (x(0), y(0)) = (2, -1) \end{cases}$$

1. Peut-on utiliser les théorèmes du cours pour traiter le système (1) ?
2. On suppose qu'il existe une solution (x, y) de classe C^1 au voisinage de $(2, -1)$. On pose $u = xy$ et $v = x + y$. Montrer que (u, v) vérifie un système différentiel linéaire très simple.
3. Trouver une solution de (1).

Solutions globales et Lemme de Gronwall

Exercice 47

On considère le problème de Cauchy

$$(1)\ \begin{cases} u' = f(t,u) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

où f est une fonction C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que si f est bornée sur $\mathbb{R}^2$ alors (1) possède une solution maximale définie sur $\mathbb{R}$.

Exercice 48

Problèmes de domaine.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$

1. On suppose que f vérifie $\forall t,\ \forall x \neq 0,\ x\, f(t,x) < 0$. Montrer que les solutions de l'équation différentielle $x' = f(t,x)$ sont définies jusqu'à $+\infty$ et admettent une asymptote horizontale. Préciser laquelle ?
2. On supose maintenant que l'équation est à variables séparables, i.e. que $f(t,x) = g(x)\,h(t)$, et que g est de classe $\mathcal{C}^1$ et h de classe $\mathcal{C}^0$. On choisit deux zéros consécutifs $x_1 < x_2$ de la fonction g. Et on choisit une condition initiale t_0, x_0, avec $x_0 \in]x_1, x_2[$. Montrer qu'alors la solution maximale telle que $\phi(t_0) = x_0$ est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.
3. Application :
   (a) Résoudre explicitement l'équation $x' = x(x-1)\cos(t)$.
   (b) Montrer qu'aucune solution autre que les solutions constantes ne possède d'asymptote horizontale. Peut-on raisonner sans utiliser la forme explicite des solutions ?
   (c) Dessiner l'allure générale des solutions, en distinguant suivant la position de $\phi(0)$ par rapport à 0 et 1.

Exercice 49

Explosions ou solutions globales ?

1. Donner les solutions de
$$x' = x^\beta \quad \text{et} \quad x(0) = x_0 > 0\,,$$
pour $\beta \in \mathbb{R}$. Pour quelle valeur de β les solutions “explosent” ? Pour quelle valeur de β sont-elles globales (définies sur tout $\mathbb{R}$).
2. Donner les solutions de
$$x' = x(\ln x)^\beta \quad \text{et} \quad x(0) = x_0 > 0\,,$$
pour $\beta \in \mathbb{R}$ (On pensera à utiliser le changement de variable $y = \ln(x)$). Pour quelle valeur de β les solutions “explosent” ? Pour quelle valeur de β sont-elles globales (définies sur tout $\mathbb{R}$).

Soit $I =]a,b[$ et $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose qu'il existe $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ telle que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{ds}{h(s)}$ diverge et que $\forall\, t, x,\ |f(t,x)| \leq h(|x|)$.

On pose $G(y) = \displaystyle\int_1^y \frac{ds}{h(s)}$, pour $y \geq 0$. Soit $x : U \to \mathbb{R}$ une solution maximale de $x' = f(t,x)$.

3. On pose $\phi(t) = G(|x(t)|)$. Calculer la dérivée de ϕ aux points où elle est définie. Montrer que G est bornée sur tout compact de I. En déduire que $U = I$, c-à-d que la solution est globale.

Exercice 50

1. (Lemme de Gronwall) Soient ψ et $y : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ deux fonctions continues et vérifiant
$$\exists C \geq 0, \forall t \in [a, b],\ y(t) \leq C + \int_a^t \psi(s)y(s)ds.$$
Alors : $\forall t \in [a, b],\ y(t) \leq C \exp\left(\int_a^t \psi(s)y(s)ds\right)$.
2. Soit $q : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, strictement positive et croissante. Montrer que toutes les solutions de l'équation différentielle
$$(L) :\ y'' + q(t)y = 0$$
sont bornées sur $\mathbb{R}^+$.

Partiel du 23 mars 2011

Exercice 51

On considère la solution maximale u de l'équation différentielle réelle
$$\begin{cases} u' &= e^u - 1 \\ u(0) &= \alpha \end{cases}$$
où $\alpha \in \mathbb{R}$ est donné. On notera $I_{\max}$ l'intervalle maximal d'existence de la solution.

1. Justifier l'existence et l'unicité de la solution maximale.
2. Quelle est la solution lorsque $\alpha = 0$? (Justifier votre réponse)
3. On suppose que $\alpha > 0$.
   (a) Montrer que $u(t) > 0$ pour tout $t \in I_{\max}$.
   (b) Montrer que la fonction u est croissante.
   (c) En déduire que $u'(t)e^{-u(t)} \geq 1 - e^{-\alpha}$ pour tout $t \in I_{\max} \cap [0; +\infty[$.
   (d) Montrer que u n'est pas une solution globale.
4. On suppose que $\alpha < 0$.
   (a) Montrer que $u(t) < 0$ pour tout $t \in I_{\max}$.
   (b) Montrer que la fonction u est décroissante, et en déduire que $u(t) \geq \alpha$ pour tout $t \in I_{\max} \cap] - \infty; 0]$.
   (c) Montrer que $\alpha - t \leq u(t) \leq \alpha$ pour tout $t \in I_{\max} \cap [0; +\infty[$.
   (d) À l'aide d'un résultat du cours, montrer que u est une solution globale.
5. On suppose que $\alpha \neq 0$.
   (a) Donner une primitive de la fonction $\dfrac{1}{e^x - 1}$ sur l'intervalle $] - \infty; 0[$ puis sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
   (b) A l'aide des questions (3.a), (4.a) et (5.a), déduire une expression de $u(t)$ en fonction de α.
   (c) Déterminer $I_{\max}$ en fonction de α.

7 Fonctions de Lyapunov et Intégrales Premières

Exercice 52

Montrer que les solutions maximales des problèmes de Cauchy suivants sont globales en temps positifs.

$$\begin{cases} x' = -y - t^2 x \\ y' = x \\ x(0) = x_0, \\ y(0) = y_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = -e^{x^2} x - y \\ y' = x \\ x(0) = x_0, \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Exercice 53

Soit $A \in \mathcal{M}_{N \times N}(\mathbb{R})$ une matrice symmétrique définie positive, et $b \in \mathbb{R}^N$.

1. Trouver une fonction de Lyapunov associée au système différentiel linéaire $u' = -Au + b$.
2. Montrer que le système linéaire $u' = -Au + b$ est du type "flot-gradient".

Indication : considérer $W(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$.

Exercice 54

Soit $V : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $V(q) \to +\infty$ lorsque $\|q\|_\star \to \infty$. On considère le système différentiel sur $\mathbb{R}^M$ d'ordre 2 suivant :

$$u'' = -\nabla V(u)\,. \tag{8}$$

1. Montrer que (8) est équivalent à un système Hamiltonien.
2. En déduire une intégrale première pour (8).

Exercice 55

Montrer que la solution maximale du problème de Cauchy suivant est globale.

$$\begin{cases} x'' = -x^3, \\ x(0) = x_0, \\ x'(0) = x_1 \end{cases}$$

Exercice 56

Soient $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues, localement Lipschitziennes. On supposera que

(i) $\alpha(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$;

(ii) $\beta(0) = 0$, et $x\beta(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

(iii) $\int_0^{+\infty} \beta(x)\,dx = \int_{-\infty}^0 |\beta(x)|\,dx = +\infty$.

On considère sur $[0, +\infty[$ le problème de Cauchy suivant (où $u_0, u_1 \in \mathbb{R}$ fixés) :

$$\begin{cases} u'' + \alpha(u)u' + \beta(u) = 0 \\ u(0) = u_0 \\ u'(0) = u_1 \end{cases} \tag{9}$$

1. Montrer qu'il existe $\tau > 0$ tel que le problème (9) admette une unique solution sur $[0, \tau]$.

2. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $A(x) = \int_0^x \alpha(s)\, ds$. Montrer qu'une fonction $u : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ est solution de (9) sur $[0, \infty[$ si et seulement si la fonction $v = (v_1, v_2) : I \to \mathbb{R}^2$ définie par $v_1 = u$ et $v_2 = u' + A(u)$, est solution sur $[0, \infty[$ de

$$\begin{cases} v_1' = v_2 - A(v_1) \\ v_2' = -\beta(v_1) \end{cases} \tag{10}$$

et vérifie $v_1(0) = u_0$, $v_2(0) = u_1 + A(u_0)$.

3. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $B(x) = \int_0^x \beta(s)\, ds$. Montrer que la fonction Φ définie pour $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ par

$$\Phi(y) = \frac{1}{2}|y_2 - A(y_1)|^2 + B(y_1)$$

est une fonction de Lyapunov pour le système (10).

4. En déduire que le problème de Cauchy (9) admet une unique solution sur $[0, +\infty[$.

Exercice 57

On considère sur $[0, \infty[$ le système différentiel réel suivant (avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) :

$$\begin{cases} u' + u^3 = v \\ v' + v^3 = u \\ u(0) = \alpha, v(0) = \beta \end{cases} \tag{11}$$

1. Montrer que le système (11) admet une solution locale quels que soient α et β.
2. Trouver une fonction de Lyapunov généralisée pour le système (11), et en déduire que pour tous α et β, (11) admet une unique solution globale.
3. Montrer que l'équation $w' + w^3 = w$ admet une unique solution globale satisfaisant $w(0) = \alpha$.
4. En déduire que si $\alpha = \beta$ alors $u(t) = v(t)$ pour tout $t \geq 0$.
5. Montrer que si $\alpha \neq \beta$ alors $u(t) \neq v(t)$ pour tout $t \geq 0$.
6. Montrer que si $\alpha = \beta$ avec $\alpha > 0$ alors $\lim_{t\to+\infty} u(t) = \lim_{t\to+\infty} v(t) = 1$.

8 Flot

Exercice 58

Pour $N = 1$ et $I = \mathbb{R}$, on considère le flot φ^0 en 0 de l'équation différentielle scalaire

$$(1) \begin{cases} u' = u^2 \\ u(0) = x_0 \end{cases}$$

Déterminer explicitement $\varphi^0(t, x)$ et son domaine $\mathcal{D}^0$.

Exercice 59

Si $f = (f_1, \ldots, f_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ on rappelle que l'opérateur de divergence est défini par

$$\mathrm{div} f = \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} f_i.$$

Soit φ^{t_0} le flot associé à une équation différentielle $u' = f(t,u)$ sur $\mathbb{R}^n$. On suppose que f vérifie

$$\mathrm{div}_x f(t,x) = 0 \qquad \forall (t,x) \in I \times \mathcal{U}.$$

Montrer alors que la différentielle du flot par rapport à x est de déterminant 1.

Exercice 60

(Examen 2011 2ème session) Soit $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ une application de classe C^2. Pour $t \in \mathbb{R}$ on note $\phi_t : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ l'application définie par $\phi_t(x) = G(t,x)$. On supposera que

(a) pour tout $t \in \mathbb{R}$, ϕ_t est une bijection de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$;

(b) $\phi_{t+s}(x) = \phi_t(\phi_s(x)) = \phi_s(\phi_t(x))$ pour tous $s, t \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^N$;

1. Montrer que $\phi_0(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$.
2. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, ϕ_t est un difféomorphisme de classe C^2 de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$.

On considère maintenant l'application $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ définie par

$$f(x) = \frac{\partial G}{\partial t}(0,x)\,,$$

et on s'intéresse au problème de Cauchy

$$\begin{cases} u' = f(u) \\ u(0) = x \end{cases} \tag{13}$$

où $x \in \mathbb{R}^N$ est donné arbitraire.

3. Montrer que le problème (13) admet une unique solution maximale u.
4. En utilisant la propriété *(b)*, montrer que la solution u du problème (13) est donnée par $u(t) = G(t,x)$.

Exercice 61

On considère une population animale séparée en J juvéniles et A adultes. La dynamique de ces populations est donnée par

$$(1) \begin{cases} J' = \alpha A - J \\ A' = J - \beta A^2 \\ (J(0), A(0)) = (J_0, A_0) \in \mathbb{R}_+^2 \end{cases}$$

avec $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. On note Φ_t le flot associé au système (1).

1. Montrer que A et J restent toujours positifs.
2. Trouver les points d'équilibre du système (1).
3. Montrer que
$$\Psi(J,A) = \frac{1}{2}(J - \beta A^2)^2 + \frac{\beta}{3}A^3 - \frac{\alpha}{2}A^2$$
est une fonction de Lyapunov pour le système (1). En déduire que toutes les trajectoires existent sur $[0, +\infty[$.

Exercice 62

On considère l'équation autonome

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} x' = F(x) \\ x(0) = x_0 \end{array} \right.$$

avec F globalement Lipschitzienne sur $\mathbb{R}^n$.

1. Soit K un fermé de $\mathbb{R}^n$. On suppose que le bord ∂K de K est invariant par le flot de F, c'est-à-dire que pour tout $x_0 \in \partial K$, une solution de (1) est entièrement contenue dans ∂K. Montrer que si $x(t)$ est une solution de (1) avec $x_0 \in K$, alors pour tout $t > 0$, $x(t) \in K$.
2. Exemple : pour tout $R > 0$ on pose $K_R = \partial B(0, R) \subset \mathbb{R}^n$. On suppose de plus que $\langle x, F(x) \rangle = 0$ pour tout $x \neq 0$. Donner un exemple d'une telle fonction F en dimension plus grande que 1, puis chercher une intégrale première pour montrer que K_R est invariant par le flot de (1).
3. Soit K un fermé de $\mathbb{R}^n$. On suppose cette fois ci que le champ de vecteur F est entrant sur ∂K, c'est-à-dire que pour tout $x_1 \in \partial K$, il existe un voisinage O_1 de x_1, un C^1-difféomorphisme h de O_1 dans un voisinage O_2 de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et une forme linéaire $\phi \in C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ tels que $h(O_1 \cap K) = \{z \in O_2;\ \phi(z) \geq 0\}$ et $\phi(Dh \circ F(y)) \geq 0$ pour tout $y \in O_1$. Soit $x(t)$ une solution de (1) avec $x_0 \in K$. Montrer que $x(t)$ reste dans K pour tout $t \in I \cap [t_0, +\infty[$.

Exercice 63

Soit $x'(t) = f(x(t))$ une équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}^n$ avec f globalement lipschitzienne, et Φ_t le flot associé au champ de vecteur f, i.e. $\Phi_t(x_0) = x(t)$, où $x(t)$ est solution de (E) avec donnée initiale $x(0) = x_0$. On appelle ensemble ω-limite de x_0 l'ensemble

$$\omega(x_0) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\bigcup_{s \geq t} \Phi_t(x_0)} = \{x^* \in \mathbb{R}^n \ ; \exists t_n \to +\infty \ ; \ \Phi_{t_n} x_0 \to x^*\}.$$

1. Montrer que si l'orbite $\mathrm{Orb}(x_0)$ est bornée, alors $\omega(x_0)$ est un compact non vide connexe et invariant i.e. $\Phi_t \omega(x_0) = \omega(x_0)$.
2. Montrer que si (E) est de type "flot-gradient", alors Φ_t n'a pas d'orbites périodiques autres que les solutions stationnaires.
3. On suppose qu'il existe une fonction de Ljapunov "stricte" Ψ pour le système (E), c'est à dire
$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad \langle \nabla \Psi(x), f(x) \rangle < 0 \text{ sauf si } f(x) = 0,$$
et pour tout M, l'ensemble $\{\Psi(x) \leq M\}$ est compact.
   (a) Justifier le fait que le champ de vecteur f soit complet.
   (b) Montrer que Ψ est constante sur l'ensemble ω-limite.
   (c) On suppose que les points d'équilibre sont isolés. Montrer que si $\Phi_{t_n}(x_0)$ est une suite convergente, alors elle converge vers un point d'équilibre.
   Indication : raisonner par l'absurde supposant que $\Phi_t(v)$ n'est pas stationnaire (où v est la limite des $\Phi_{t_n}(x_0)$) et contredire la stricte décroissance de Ψ.
   (d) On suppose toujours que les points d'équilibre sont isolés. Montrer que toute trajectoire converge vers l'un d'entre eux et qu'ils sont asymptotiquement stables.
   Indication : Si a est un point d'équilibre, on pourra considérer un voisinage stable par Φ_t autour de a sous la forme $B(a, r) \cap \{\Psi < \alpha\}$ où $\alpha = \inf_{\partial B(a,r)} \Psi$.

9 Stabilité et Autres

Exercice 64

Que dire de la stabilité du point d'équilibre $(0,0)$ pour les deux systèmes suivants

$$\left\{\begin{array}{l} x' = -y \\ y' = x \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x' = -x \\ y' = y \end{array}\right.$$

Exercice 65

Vérifier les assertions suivantes :

1) L'équation

$$x' = \mu x - x^3$$

a un unique point d'équilibre stable pour $\mu \leq 0$, qui devient instable pour $\mu > 0$, tandis que deux nouveaux points d'équilibre stables apparaissent, pour $\mu > 0$.

2) L'équation

$$x' = \mu + x^2$$

a deux points d'équilibre pour $\mu < 0$, un stable et un instable, qui se rejoignent pour $\mu = 0$ puis disparaissent pour $\mu > 0$.

Exercice 66

On considère le problème de Cauchy

$$\left\{\begin{array}{r} x'' + x^5 = 0, \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}, \\ x'(0) = 0. \end{array}\right. \tag{16}$$

1. Trouver une fonction constante le long des trajectoires, c'est-à-dire $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de classe C^1, telle que, pour toute solution x de (16) définie sur un intervalle $J \subset \mathbb{R}$:

$$\text{pour tout } t \in J, \qquad F(x(t), x'(t)) = F(x(0), x'(0)).$$

2. Montrer que la solution maximale de (16) est globale.

Exercice 67

On considère le système différentiel suivant

$$(S) \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x' & = & \sin(x+y) \\ y' & = & e^x - 1 \end{array}\right.$$

1. Montrer que pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, le système (S) admet une unique solution maximale prenant la valeur (x_0, y_0) en $t = 0$. On notera I l'intervalle maximal de définition de cette solution.

2. Montrer que pour tout $t \in I$, on a $\|x(t) - x_0\| \leq |t|$. En déduire que $I = \mathbb{R}$.

3. Déterminer tous les points d'équilibre de (S) et leur nature.

Exercice 68

On considère l'équation différentielle $u' = t(3u^2 - 1)$. En étudier qualitativement les solutions maximales (on précisera notamment si les intervalles de définition sont bornés à droite ou à gauche ainsi que les asymptotes éventuelles).

Exercice 69

On considère le système différentiel linéaire

$$(S) \qquad \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les solutions du système linéaire homogène associé.

2. Déterminer une solution particulière de (S) . Montrer que (S) admet une unique solution Φ_0 périodique.

3. Montrer que, si Φ est une solution de (S), $\|\Phi(t) - \Phi_0(t)\|$ tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$.

Exercice 70

On considère le système suivant :

$$(\Sigma) \qquad \begin{cases} x' = 2x(1-y) \\ y' = 2y - x^2 + y^2 \end{cases}$$

1. Montrer que les solutions maximales de (Σ) sont de classe C^∞ sur leur intervalle de définition. Montrer que les trajectoires de ce système forment une partition du plan $\mathbb{R}^2$.

2. Montrer que l'ensemble des trajectoires du système est symétrique par rapport à l'axe des y .

3. Déterminer le lieu des points du plan où le champ de vecteur est horizontal (respectivement vertical). En déduire un régionement du plan suivant la direction du champ que l'on résumera par un schéma.

4. Montrer qu'il existe des solutions de la forme $(0, \psi(t))$ et les étudier. En déduire les trajectoires du système (Σ) qui sont portées par l'axe des y .

5. Montrer qu'il existe des solutions de la forme $(\epsilon\sqrt{3}\lambda(t), \lambda(t))$ (où $\epsilon = \pm 1$). Les étudier. En déduire les trajectoires du système (Σ) qui sont portées par les droites $x = \epsilon\sqrt{3}y$.

6. Déterminer les points d'équilibre de (Σ). Etudier et déterminer la stabilité de chaque point d'équilibre et dessiner l'allure des trajectoires au voisinage de chacun d'entre eux .

7. Posons $u = \frac{y}{x}$. Déterminer une équation différentielle $u' = f(t, u) = x(t)g(u)$ dont u est solution lorsque (x, y) est une solution maximale de (Σ). En déduire que les trajectoires du quadrant $x > 0$ et $y < 0$ ont une direction asymptotique.

8. Résumer l'étude de ce système en donnant un schéma donnant quelques trajectoires du système (Σ).

Exercice 71

Soit E l'espace affine des fonctions $C^1([0,1], \mathbb{R}^+)$ qui vérifient

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 1, \quad \text{et} \quad u'(0) = 0.$$

Pour tout $u \in E$ on note

$$F(u) = \int_0^1 u^2(x) + e^{-u'(x)} dx.$$

Le but de l'exercice est de montrer que F n'admet pas de minimum sur E, c'est à dire qu'il n'existe pas de fonction $u \in E$ telle que

$$F(u) = \inf_{v \in E} F(v). \tag{17}$$

1) Soit $u \in E$ et φ une fonction $C^1([0,1])$. Montrer que la fonction $f(t) := F(u + t\varphi)$ est dérivable pour $t \in]-1,1[$ et calculer sa dérivée en 0.

2) On suppose par l'absurde qu'une fonction $u \in E$ qui vérifie (17) existe. Montrer que u vérifie une équation différentielle ordinaire sur $]0,1[$. *(On pourra admettre le lemme suivant : si f est une fonction continue telle que $\int_0^1 f\varphi dx = 0$ pour toute fonction C^1 à support compact φ, alors $f = 0$ sur* $]0,1[$*).*

3) Trouver une loi de conservation d'énergie pour l'équation différentielle trouvée à la question précédente. *Indication : multiplier le tout par u' et introduire la primitive de xe^{-x}.*

4) Conclure en observant ce qui se passe pour $x = 0$ et $x = 1$.