**Interrogation no. 1 du Mercredi 6 Mars 2013**
Systèmes Différentiels Linéaires - Durée 1h30

**Exercice 1**

**(7 pts)** On considère le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = 5x - 2y + \exp(t) \\ y' = -x + 6y + t \end{cases} \qquad \text{(S)}$$

1. **(1,5 pts)** Déterminer l'ensemble des solutions du système homogène $(S_0)$ associé à $(S)$.
2. **(1 pt)** Déterminer l'unique solution du problème de Cauchy suivant
$$\begin{cases} (S_0) \\ (x(0), y(0)) = (x_0, y_0). \end{cases}$$
3. **(2 pts)** Donner la résolvante du système homogène $(S_0)$. En déduire l'exponentielle de la matrice $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$.
4. **(2,5 pts)** Déterminer la solution particulière de $(S)$ qui s'annule en $t = 0$. En déduire l'ensemble des solutions de $(S)$.

**Exercice 2**

**(9 pts)** On considère le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = -3x + y + 4z \\ y' = x + 3y - 2z \\ z' = -2x + y + 3z \end{cases} \qquad \text{(S)}$$

1. **(3 pts)** Déterminer l'ensemble des solutions de $(S)$.
2. **(1 pt)** Déterminer l'unique solution du problème de Cauchy suivant
$$\begin{cases} (S) \\ (x(0), y(0), z(0)) = (x_0, y_0, z_0). \end{cases}$$
3. **(2 pts)** Donner la résolvante associée à $(S)$. En déduire l'exponentielle de la matrice $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
4. **(1 pts)** En reprenant les calculs faits précédement, déterminer la décomposition de Dunford de $A$.
5. **(2 pts)** Retrouver $\exp(A)$ à partir de la décomposition de Dunford de $A$.

**Exercice 3**

**(4 pts)** Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $A : I \to \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ une application continue. On considère le système différentiel homogène suivant :

$$u' = A(t)u. \tag{S}$$

1. **(2 pts)** Rappeler la définition de la résolvante $R$ associée au système différentiel $(S)$.
2. **(2 pts)** Montrer que $R(t_2, t_1) \circ R(t_1, t_0) = R(t_2, t_0)$ (où $t_0, t_1, t_2 \in I$).

# Solution

**Exercice 1**

1. Tout d'abord, $(S)$ est un système différentiel linéaire d'ordre 1 à coefficients constants, avec second membre. Le système homogène $(S_0)$ associé à $(S)$ est

$$\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & 5x - 2y + \exp(t) \\ y' & = & -x + 6y + t \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{1}$$

avec $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$. On montre que le polynôme caractéristique de $A$ est

$$\chi_A(X) = (X - 4)(X - 7).$$

Ainsi $A$ a deux valeurs propres distinctes. $A$ est donc diagonalisable. On détermine les vecteurs propres associés :

$$\mathrm{Ker}(A - 4I_2) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ \mathrm{Ker}(A - 7I_2) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right).$$

On est dans le cas d'une matrice diagonalisable. Le cours nous donne exactement l'ensemble des solutions de $(S_0)$ : il s'agit de l'ensemble des fonctions de la forme

$$t \mapsto a \exp(4t) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + b \exp(7t) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}.$$

2. On cherche l'unique solution $u = (x, y)$ de $(S_0)$ tel que $u(0) = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Le système à résoudre est

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2a + b & = & x_0 \\ a - b & = & y_0 \end{array}\right.$$

Par la méthode du pivot de Gauss on obtient $a = \dfrac{x_0 + y_0}{3}$ et $b = \dfrac{x_0 - 2y_0}{3}$. L'unique solution du problème de Cauchy est donc

$$t \mapsto \frac{x_0 + y_0}{3} \exp(4t) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{x_0 - 2y_0}{3} \exp(7t) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

3. On construit la résolvante associée à $(S_0)$. Rappelons que pour cela, on place dans la première colonne (resp. deuxième colonne) l'unique solution du problème de Cauchy associé à $(S_0)$ avec pour condition initiale $u(0) = (x_0, y_0) = (1, 0)$ (resp. $u(0) = (x_0, y_0) = (0, 1)$). On obtient

$$R(t, 0) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2e^{4t} + e^{7t} & 2e^{4t} - 2e^{7t} \\ e^{4t} - e^{7t} & e^{4t} + 2e^{7t} \end{pmatrix}.$$

On vérifiera que l'on a bien $R(0, 0) = I_2$. Puisque l'on est dans le cas d'un système différentiel à coefficients constants, on a

$$R(t, t_0) = R(t - t_0, 0) = \exp((t - t_0)A), \forall t, t_0 \in \mathbb{R}.$$

En particulier,

$$\exp(A) = R(1, 0) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2e^{4} + e^{7} & 2e^{4} - 2e^{7} \\ e^{4} - e^{7} & e^{4} + 2e^{7} \end{pmatrix}.$$

4. Par la formule de Duhamel (cours), l'unique solution $u_0$ du système différentiel linéaire $(S)$ qui s'annule en $t = 0$ est donnée par

$$u_0(t) = \int_0^t R(t, s)B(s)\mathrm{ds},$$

avec $B(s) = \begin{pmatrix} e^s \\ s \end{pmatrix}$. Après calculs et intégrations par parties, on obtient

$$u_0(t) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \frac{2}{49} - \frac{1}{8} - \frac{3}{14}t - \frac{5}{6}e^t + \frac{2}{3}e^{4t} + \frac{1}{8}e^{4t} + \frac{1}{6}e^{7t} - \frac{2}{49}e^{7t} \\ -\frac{2}{49} - \frac{1}{16} - \frac{15}{28}t - \frac{1}{6}e^t + \frac{1}{3}e^{4t} + \frac{1}{16}e^{4t} - \frac{1}{6}e^{7t} + \frac{2}{49}e^{7t} \end{pmatrix}.$$

Les solutions de $(S)$ sont alors données par l'ensemble des fonctions de la forme

$$t \mapsto R(t, 0)X_0 + u_0(t),\ X_0 \in \mathbb{R}^2.$$

**Exercice 2**

1. $(S)$ est un système différentiel linéaire d'ordre 1 homogène, à coefficients constants. Notons $A$ la matrice associée à ce système. On calcule son polynôme caractéristique

$$\chi_A(X) = -(1 + X)(X - 2)^2.$$

On détermine les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre

$$\mathrm{Ker}(A + I_2) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ \mathrm{Ker}(A - 2I_2) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

En particulier $\dim(\mathrm{Ker}(A - 2I_2)) = 1 < 2$ qui est la multiplicité de 2 dans le polynôme caractéristique $\chi_A$. La matrice $A$ n'est donc pas diagonalisable. De plus son polynôme minimal $\pi_A$ divise $A$ et ne peut être scindé à racines simples puisque $A$ est non diagonalisable. Donc $\pi_A = (1 + X)(X - 2)^2$.

On détermine donc $\mathrm{Ker}((A-2I_2)^2)$ : c'est le plan d'équation $x=-z$. Ainsi,

$$\mathrm{Ker}((A-2I_2)^2)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right).$$

De plus, $A\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.
Par le théorème du cours, les solutions de $(S)$ sont des fonctions de la forme

$$t\mapsto C\exp(-t)\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}+\exp(7t)\left[(at+b)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+(ct+d)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right],\ C,a,b,c,d\in\mathbb{R}.$$

L'ensemble des fonctions de cette forme est un espace vectoriel de dimension 5. Or d'après le cours, l'espace des solutions de $(S)$ est lui de dimension 3. On a donc "trop" de fonctions et il faut substituer dans $(S)$ pour déterminer l'ensemble exact des solutions. On remplace donc dans $u'=Au$. On obtient $a=d$ et $c=0$. Finalement, les solutions de $(S)$ sont exactement les fonctions de la forme

$$t\mapsto C\exp(-t)\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}+\exp(7t)\left[(at+b)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+a\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right],\ C,a,b\in\mathbb{R}.$$

2. On cherche l'unique solution $u(t)=a\exp(-t)\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}+\exp(7t)\left[(bt+c)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right]$, $(a,b,c\in\mathbb{R})$ de $(S)$ telle que $u(0)=(x_0,y_0,z_0)$. Pour cela on doit résoudre le système linéaire suivant

$$\begin{cases}2a+c &= x_0\\ b+c &= y_0\\ a+c &= z_0\end{cases}$$

On obtient

$$\begin{cases}a &= x_0-z_0\\ b &= x_0+y_0-2z_0\\ c &= -x_0+2z_0\end{cases}$$

Ainsi

$$u(t)=(x_0-z_0)\exp(-t)\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}+\exp(7t)\left[((x_0+y_0-2z_0)t-x_0+2z_0)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+(x_0+y_0-2z_0)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right]$$

3. La résolvante associée au système est alors donnée par

$$R(t,0)=\begin{pmatrix}2e^{-t}+(t-1)e^{2t} & te^{2t} & -2e^{-t}+2(1-t)e^{2t}\\ te^{2t} & (1+t)e^{2t} & -2te^{2t}\\ e^{-t}+(t-1)e^{2t} & te^{2t} & -e^{-t}+2(1-t)e^{2t}\end{pmatrix}.$$

On vérifiera là aussi que l'on a bien $R(0,0) = I_3$. Enfin comme $(S)$ est à coefficients constants, on a $R(t,t_0) = R(t-t_0,0) = \exp((t-t_0)A)$ pour tout $t, t_0 \in \mathbb{R}$. En particulier,

$$\exp(A) = R(1,0) = \begin{pmatrix} 2e^{-1} & e^2 & -2e^{-1} \\ e^2 & 2e^2 & -2e^2 \\ e^{-1} & e^2 & -e^{-1} \end{pmatrix}.$$

4. On trigonalise $A$. Tout d'abord la matrice de passage à considérer est

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On détermine $P^{-1}$ par la méthode du pivot de Gauss. On obtient

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Notons que le calcul de $P^{-1}$ a déjà été effectué à la question 2. lors de la recherche de l'unique solution du problème de Cauchy associée à la donnée initial $u(0) = (x_0, y_0, z_0)$. On a alors

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

La décomposition de Dunford de $A$ est alors $(PDP^{-1}, PNP^{-1})$ avec

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On notera en effet que

- $A = PDP^{-1} + PNP^{-1}$,
- $PDP^{-1}$ est diagonalisable car semblable à la matrice diagonale $D$,
- $PNP^{-1}$ est nilpotente car semblable à la matrice nilpotente $N$ (triangulaire superieure stricte),
- ces deux matrices commutent puisque $D$ et $N$ commutent.

Par unicité, c'est donc bien la décomposition de Dunford de $A$.

5. Finalement on a

$$\begin{aligned} \exp(A) &= \exp(P(D+N)P^{-1}) = P\exp(D+N)P^{-1} \\ &= P\exp(D)\exp(N)P^{-1} \text{ car D et N commutent} \\ &= P\begin{pmatrix} e^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \end{aligned}$$

Reste à faire le produit de ces quatres matrices. On obtient après calcul

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} 2e^{-1} & e^2 & -2e^{-1} \\ e^2 & 2e^2 & -2e^2 \\ e^{-1} & e^2 & -e^{-1} \end{pmatrix}.$$

On retrouve en particulier le résultat de la question 3.

**Exercice 3**

1. La résolvante $R(.,t_0)$ ($t_0 \in \mathbb{R}$) associée à $(S)$ est l'unique solution du problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{d}{dt}R(t,t_0) & = & A(t)R(t,t_0) \\ R(t_0,t_0) & = & I_N \end{array} \right.$$

2. On considère le problème de Cauchy suivant ($t_0, t_1 \in \mathbb{R}$)

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u' & = & A(t)u \\ u(t_1) & = & R(t_1,t_0) \end{array} \right.$$

$t \mapsto R(t,t_0)$ est solution de ce système. De même pour $u : t \mapsto R(t,t_1) \circ R(t_1,t_0)$: en effet, on a bien $u' = A(t)u$ et $u(t_1) = R(t_1,t_1) \circ R(t_1,t_0) = I_N \circ R(t_1,t_0) = R(t_1,t_0)$. Par unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz, ces deux fonctions sont égales. D'où le résultat.