Travaux Dirigés no. 6

Fonctions de Lyapunov et Intégrales Premières

Exercice 1

Montrer que les solutions maximales des problèmes de Cauchy suivants sont globales en temps positifs.

$$\begin{cases} x' = -y - t^2 x \\ y' = x \\ x(0) = x_0, \\ y(0) = y_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = -e^{x^2} x - y \\ y' = x \\ x(0) = x_0, \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Exercice 2

Soit $A \in \mathcal{M}_{N\times N}(\mathbb{R})$ une matrice symmétrique définie positive, et $b \in \mathbb{R}^N$.

1. Trouver une fonction de Lyapunov associée au système différentiel linéaire $u' = -Au + b$.
2. Montrer que le système linéaire $u' = -Au + b$ est du type "flot-gradient".

Indication : considérer $W(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$.

Exercice 3

Soit $V : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $V(q) \to +\infty$ lorsque $\|q\|_\star \to \infty$. On considère le système différentiel sur $\mathbb{R}^M$ d'ordre 2 suivant:

$$u'' = -\nabla V(u)\,. \tag{1}$$

1. Montrer que (1) est équivalent à un système Hamiltonien.
2. En déduire une intégrale première pour (1).

Exercice 4

Montrer que la solution maximale du problème de Cauchy suivant est globale.

$$\begin{cases} x'' = -x^3, \\ x(0) = x_0, \\ x'(0) = x_1 \end{cases}$$

Exercice 5

Soient $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues, localement Lipschitziennes. On supposera que

(i) $\alpha(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$;

(ii) $\beta(0) = 0$, et $x\beta(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

(iii) $\int_0^{+\infty} \beta(x)\,dx = \int_{-\infty}^0 |\beta(x)|\,dx = +\infty$.

On considère sur $[0,+\infty[$ le problème de Cauchy suivant (où $u_0, u_1 \in \mathbb{R}$ fixés) :

$$\begin{cases} u'' + \alpha(u)u' + \beta(u) = 0 \\ u(0) = u_0 \\ u'(0) = u_1 \end{cases} \tag{2}$$

1. Montrer qu'il existe $\tau > 0$ tel que le problème (2) admette une unique solution sur $[0, \tau]$.
2. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $A(x) = \int_0^x \alpha(s)\, ds$. Montrer qu'une fonction $u : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ est solution de (2) sur $[0, \infty[$ si et seulement si la fonction $v = (v_1, v_2) : I \to \mathbb{R}^2$ définie par $v_1 = u$ et $v_2 = u' + A(u)$, est solution sur $[0, \infty[$ de

$$\begin{cases} v_1' = v_2 - A(v_1) \\ v_2' = -\beta(v_1) \end{cases} \tag{3}$$

   et vérifie $v_1(0) = u_0$, $v_2(0) = u_1 + A(u_0)$.
3. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $B(x) = \int_0^x \beta(s)\, ds$. Montrer que la fonction Φ définie pour $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ par

$$\Phi(y) = \frac{1}{2}|y_2 - A(y_1)|^2 + B(y_1)$$

   est une fonction de Lyapunov pour le système (3).
4. En déduire que le problème de Cauchy (2) admet une unique solution sur $[0, +\infty[$.

Exercice 6

On considère sur $[0, \infty[$ le système différentiel réel suivant (avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) :

$$\begin{cases} u' + u^3 = v \\ v' + v^3 = u \\ u(0) = \alpha, v(0) = \beta \end{cases} \tag{4}$$

1. Montrer que le système (4) admet une solution locale quels que soient α et β.
2. Trouver une fonction de Lyapunov généralisée pour le système (4), et en déduire que pour tous α et β, (4) admet une unique solution globale.
3. Montrer que l'équation $w' + w^3 = w$ admet une unique solution globale satisfaisant $w(0) = \alpha$.
4. En déduire que si $\alpha = \beta$ alors $u(t) = v(t)$ pour tout $t \geq 0$.
5. Montrer que si $\alpha \neq \beta$ alors $u(t) \neq v(t)$ pour tout $t \geq 0$.
6. Montrer que si $\alpha = \beta$ avec $\alpha > 0$ alors $\lim_{t\to+\infty} u(t) = \lim_{t\to+\infty} v(t) = 1$.