Travaux Dirigés no. 6
Equations Non Linéaires

Fonctions Lipschitziennes

Exercice 1

1. Les fonctions suivantes sont-elles Lipschitziennes ou localement Lipschitziennes en x sur les ouverts proposés ?
   (i) $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(t,x) = e^{tx}$.
   (ii) $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(t,x) = xe^{t^2}$.
   (iii) $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(t,x) = t\sqrt{|x|}$.
   (iv) $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(t,x) = \sin(tx^2)$.
   (v) $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(t,x) = \sin(tx)$.
   (vi) $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(t,x) = \ln(1+t^2)|x|$.
   (vii) $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$, $f(t,x) = (x_1^2 + 3x_2 + 1, x_1x_2)$.
   (viii) $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$, $f(t,x) = (|x_1 + x_2|, \cos(x_2))$.
   (ix) $\Omega =]0,1[\times\mathbb{R}$, $f(t,x) = \frac{\arctan x}{t}$.
2. Que peut-on en déduire concernant le problème de Cauchy

$$\begin{cases} u' = f(t,u) \\ u(t_0) = x_0, \qquad (t_0,x_0) \in \Omega \end{cases}$$

avec f l'une des fonctions étudiées ci-dessus ?

Exercice 2

Montrer que la fonction

$$f(t,x) := \sqrt{|t|}\sin\left(\frac{x}{|t|}\right)$$

est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, qu'elle est C^1 en x pour tout t fixé mais n'est pas Localement Lipschitzienne.

Exercice 3

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $\Omega = I \times \mathbb{R}$. Soit a et b deux fonctions définies et continues sur I, à valeurs réelles. On pose, pour tout $(t,x) \in \Omega$,

$$f(t,x) = a(t)x + b(t).$$

Montrer que f est localement Lipschitzienne par rapport à x sur Ω.

Exercice 4

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ouvert, $x_0 \in \Omega$, et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur Ω et de classe C^1 sur $\Omega \setminus \{x_0\}$. On suppose de plus que

$$\sup_{x \in \Omega \setminus \{x_0\}} \|\nabla f(x)\| < +\infty.$$

Montrer que f est localement Lipschitzienne sur Ω et donner un exemple non trivial d'une telle fonction f.

Exercice 5

Pour toute fonction f on note

$$f^* := \min_y \left(\|x - y\| - f(y)\right).$$

Montrer que $f^* = f$ si et seulement si f est 1-Lipschitzienne.

Équations de Bernoulli et de Riccati

Exercice 6

L'équation de Bernoulli est de la forme

$$y' = a(t)y^\alpha + b(t)y,$$

avec a et b continues sur un intervalle I. On cherche des solutions > 0. On effectue le changement de variable $z = y^{1-\alpha}$ qui ramène à une équation linéaire en z.

L'équation de Riccati est

$$y' = a(t)y^2 + b(t)y + c(t),$$

avec a, b et c continues sur l'intervalle I. Si l'on connaît une solution y_1 de cette équation, $z = y - y_1$ vérifie une équation de Bernoulli avec $\alpha = 2$ et $u = z^{-1}$ vérifie une équation linéaire.

Trouver toutes les solutions, sur des intervalles inclus dans $\mathbb{R}^{+*}$, des équations différentielles suivantes

$$\begin{aligned} 2ty' + y + 3t^2y^2 &= 0, \\ t^2y' &= t^2y^2 + ty + 1, \end{aligned}$$

en cherchant une solution particulière de la deuxième sous la forme $y(t) = -t^n$.

Solutions maximales

Exercice 7

On considère le problème suivant

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{\sin(y)} \\ y(0) = y_0 \in]0, \pi[\end{cases}$$

Supposons qu'il existe une solution (I, φ) où I est un intervalle ouvert contenant 0 et φ une fonction de classe C^1 sur I.

1. Prouver que pour tout $t \in I$, $\varphi(t) \in]0, \pi[$.
2. Prouver que, sur I, φ vérifie

$$\varphi'(t) \sin(\varphi(t)) = 1$$

et en déduire la valeur de $\cos(\varphi(t))$.

3. Déterminer φ et I, et en déduire que le problème ci-dessus admet une unique solution maximale.

Exercice 8

Pour chacun des problèmes de Cauchy suivants, prouver l'existence et l'unicité de la solution dans un voisinage du point x_0, puis déterminer la solution maximale.

$$(1) \begin{cases} y' = \frac{1+y^2}{y} \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad (2) \begin{cases} y' = \sqrt{|y|} \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad (3) \begin{cases} y' = \sqrt{|y|} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Exercice 9

On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} u' = \frac{t-u}{t+u} \\ u(1) = 1 \end{cases}$$

1. Prouver l'existence et l'unicité de la solution dans un voisinage de $t_0 = 1$.
2. On se propose de poser $v(t) = \frac{u(t)}{t}$. Montrer que cette opération est licite dans un voisinage de $t_0 = 1$. Attention : on ne prétend pas que ce voisinage est l'intervalle maximal de définition de la solution. Déterminer v, et en déduire u.
3. La fonction v ainsi trouvée est-elle la solution maximale du problème considéré ?

Exercice 10

Donner toutes les solutions maximales du système

$$\begin{cases} u'' = u'u \\ u(0) = 0 \\ u'(0) = u_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Exercice 11

On considère le problème de Cauchy

$$(1) \begin{cases} y'' = \frac{1}{y} \\ y'(0) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

1. Montrer que (1) possède une solution maximale φ définie sur un intervalle ouvert $]a, b[$ contenant 0.
2. Montrer que $a = -b$ et que φ est paire.
3. Etablir le tableau de variation de φ. Montrer que si $b \in \mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{x \to b} \varphi$ ou $\lim\limits_{x \to b} \varphi'$ est infinie.

4. Montrer que $]a, b[= \mathbb{R}$.
5. Exprimer φ à l'aide de la fonction $F : x \mapsto \int_0^x e^{t^2} dt$.

Exercice 12

On considère le problème de Cauchy suivant.

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} x' = x(2 - \frac{y'}{y}) \\ y' = 3(x + y) - x' \\ (x(0), y(0)) = (2, -1) \end{array} \right.$$

1. Peut-on utiliser les théorèmes du cours pour traiter le système (1) ?
2. On suppose qu'il existe une solution (x, y) de classe C^1 au voisinage de $(2, -1)$. On pose $u = xy$ et $v = x + y$. Montrer que (u, v) vérifie un système différentiel linéaire très simple.
3. Trouver une solution de (1).

Solutions globales et Lemme de Gronwall

Exercice 13

On considère le problème de Cauchy

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} u' = f(t, u) \\ u(0) = u_0 \end{array} \right.$$

où f est une fonction C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que si f est bornée sur $\mathbb{R}^2$ alors (1) possède une solution maximale définie sur $\mathbb{R}$.

Exercice 14

Problèmes de domaine.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$

1. On suppose que f vérifie $\forall t,\ \ \forall x \neq 0,\ \ x\, f(t, x) < 0$. Montrer que les solutions de l'équation différentielle $x' = f(t, x)$ sont définies jusqu'à $+\infty$ et admettent une asymptote horizontale. Préciser laquelle?
2. On supose maintenant que l'équation est à variables séparables, i.e. que $f(t, x) = g(x)\, h(t)$, et que g est de classe $\mathcal{C}^1$ et h de classe $\mathcal{C}^0$. On choisit deux zéros consécutifs $x_1 < x_2$ de la fonction g. Et on choisit une condition initiale t_0, x_0, avec $x_0 \in]x_1, x_2[$. Montrer qu'alors la solution maximale telle que $\phi(t_0) = x_0$ est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.
3. Application :
   (a) Résoudre explicitement l'équation $x' = x(x - 1) \cos(t)$.
   (b) Montrer qu'aucune solution autre que les solutions constantes ne possède d'asymptote horizontale. Peut-on raisonner sans utiliser la forme explicite des solutions ?
   (c) Dessiner l'allure générale des solutions, en distinguant suivant la position de $\phi(0)$ par rapport à 0 et 1.

Exercice 15

Explosions ou solutions globales?

1. Donner les solutions de
$$x' = x^\beta \quad \text{et} \;\; x(0) = x_0 > 0\,,$$
pour $\beta \in \mathbb{R}$. Pour quelle valeur de β les solutions “explosent”? Pour quelle valeur de β sont-elles globales (définies sur tout $\mathbb{R}$).
2. Donner les solutions de
$$x' = x(\ln x)^\beta \quad \text{et} \;\; x(0) = x_0 > 0\,,$$
pour $\beta \in \mathbb{R}$ (On pensera à utiliser le changement de variable $y = \ln(x)$). Pour quelle valeur de β les solutions “explosent”? Pour quelle valeur de β sont-elles globales (définies sur tout $\mathbb{R}$).

Soit $I =]a,b[$ et $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose qu'il existe $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ telle que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{ds}{h(s)}$ diverge et que $\forall\, t, x,\ |f(t,x)| \leq h(|x|)$. On pose $G(y) = \displaystyle\int_1^y \frac{ds}{h(s)}$, pour $y \geq 0$. Soit $x : U \to \mathbb{R}$ une solution maximale de $x' = f(t,x)$.

3. On pose $\phi(t) = G(|x(t)|)$. Calculer la dérivée de ϕ aux points où elle est définie. Montrer que G est bornée sur tout compact de I. En déduire que $U = I$, c-à-d que la solution est globale.

Exercice 16

1. (Lemme de Gronwall) Soient ψ et $y : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ deux fonctions continues et vérifiant
$$\exists C \geq 0, \forall t \in [a,b],\ y(t) \leq C + \int_a^t \psi(s)y(s)ds.$$
Alors : $\forall t \in [a,b],\ y(t) \leq C \exp\left(\int_a^t \psi(s)y(s)ds\right)$.
2. Soit $q : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, strictement positive et croissante. Montrer que toutes les solutions de l'équation différentielle
$$(L) :\ y'' + q(t)y = 0$$
sont bornées sur $\mathbb{R}^+$.

Partiel du 23 mars 2011

Exercice 17

On considère la solution maximale u de l'équation différentielle réelle
$$\begin{cases} u' &= e^u - 1 \\ u(0) &= \alpha \end{cases}$$
où $\alpha \in \mathbb{R}$ est donné. On notera $I_{\max}$ l'intervalle maximal d'existence de la solution.

1. Justifier l'existence et l'unicité de la solution maximale.
2. Quelle est la solution lorsque $\alpha = 0$? (Justifier votre réponse)
3. On suppose que $\alpha > 0$.
   (a) Montrer que $u(t) > 0$ pour tout $t \in I_{\max}$.
   (b) Montrer que la fonction u est croissante.
   (c) En déduire que $u'(t)e^{-u(t)} \geq 1 - e^{-\alpha}$ pour tout $t \in I_{\max} \cap [0; +\infty[$.
   (d) Montrer que u n'est pas une solution globale.
4. On suppose que $\alpha < 0$.
   (a) Montrer que $u(t) < 0$ pour tout $t \in I_{\max}$.
   (b) Montrer que la fonction u est décroissante, et en déduire que $u(t) \geq \alpha$ pour tout $t \in I_{\max} \cap] - \infty; 0]$.
   (c) Montrer que $\alpha - t \leq u(t) \leq \alpha$ pour tout $t \in I_{\max} \cap [0; +\infty[$.
   (d) À l'aide d'un résultat du cours, montrer que u est une solution globale.
5. On suppose que $\alpha \neq 0$.
   (a) Donner une primitive de la fonction $\dfrac{1}{e^x - 1}$ sur l'intervalle $] - \infty; 0[$ puis sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
   (b) A l'aide des questions (3.a), (4.a) et (5.a), déduire une expression de $u(t)$ en fonction de α.
   (c) Déterminer $I_{\max}$ en fonction de α.