Travaux Dirigés no. 3

Exemples d'étude qualitative des solutions d'une EDL d'ordre 2

Exercice 1

Soient p et q deux fonctions continues sur un intervalle ouvert I. On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

1. Soit φ une solution non identiquement nulle de (E). Prouver qu'il n'existe aucun τ de I tel que $\varphi(\tau) = \varphi'(\tau) = 0$.
2. Prouver que, si deux solutions φ et ψ de (E) s'annulent en un point τ, elles sont proportionnelles. De même, prouver que, si $\varphi'(\tau) = \psi'(\tau) = 0$, elles sont proportionnelles.
3. Montrer que toute solution non nulle de l'équation (E) possède un nombre fini de zéros sur tout intervalle $[a, b] \subset I$.

Exercice 2

Soient p et q deux fonctions continues sur un intervalle ouvert I. On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

1. Soient u et v deux solutions linéairement indépendantes de l'équation ci-dessus. On suppose que u s'annule au moins deux fois sur I. Prouver qu'il existe deux zéros distincts de u, x_1 et x_2, entre lesquels u ne s'annule pas. Quitte à choisir $-u$ au lieu de u, on supposera que u reste > 0 entre x_1 et x_2.
2. (a) Déterminer le signe de $u'(x_1)$ et celui de $u'(x_2)$. La fonction v peut-elle s'annuler en x_1 ou x_2 ? Ou supposera $v(x_1) < 0$, quitte à travailler avec $-v$.
   (b) En étudiant le wronskien de u et v, montrer que v s'annule une fois dans $]x_1, x_2[$.
   (c) Prouver que v s'annule une seule fois sur $]x_1, x_2[$.

Exercice 3

Soit $q : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et telle que l'intégrale généralisée

$$\int_0^\infty |q(t)| dt$$

converge. On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad y'' - qy = 0.$$

1. Soit φ une solution, que l'on suppose bornée, de (E). En étudiant $\int_0^\infty \varphi''(t) dt$, montrer que φ' admet une limite finie en $+\infty$ puis que cette limite est nulle.
2. En déduire, à l'aide du Wronskien, que l'équation (E) a au moins une solution non bornée.