**Travaux Dirigés no. 3**

Champ Linéaire de Vecteurs - Portraits de Phase

## Exercice 1

1. Résoudre en fonction de $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ le système suivant d'inconnues $x, y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ :

$$\begin{cases} x' & = & 2x + y \\ y' & = & 4x - y \\ x(0) & = & x_0 \in \mathbb{R} \\ y(0) & = & y_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

2. Représenter graphiquement les solutions $(x(t); y(t))$ dans le plan pour les valeurs initiales $(x_0; y_0) = (1; 1)$ et $(x_0; y_0) = (1; -4)$ (en indiquant le sens de parcourt de la trajectoire).

   La suite de l'exercice a pour but de tracer la représentation graphique de $(x(t); y(t))$ pour $(x_0; y_0) = (5; 0)$.

3. Donner la solution $(x(t); y(t))$ lorsque $(x_0; y_0) = (5; 0)$.

   On définit maintenant la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

   et on note $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix}$ où $(x(t); y(t))$ est la solution du système pour $(x_0; y_0) = (5; 0)$.

4. Montrer que $Y(t) = CX(t)^\alpha$ pour un exposant $\alpha$ et une constante $C$ à déterminer.
5. En déduire la représentation graphique de $(x(t); y(t))$ pour $(x_0; y_0) = (5; 0)$ (en la justifiant).

## Exercice 2

On se propose cette fois de faire l'étude générale d'un système linéaire homogène d'ordre 1 dans $\mathbb{R}^2$, c'est à dire du type

$$u' = Au \text{ avec } A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

Décrire les solutions de ce système, en discutant des cas où $A$ est diagonalisable dans $\mathbb{R}$, diagonalisable dans $\mathbb{C}$ ou pas diagonalisable. Tracer l'allure les courbes solutions $u(t)$ correspondantes.