Travaux Dirigés no. 3
Systèmes Différentiels Linéaires

Systèmes différentiels linéaires d'ordre 1

Exercice 1
On considère le système $X' = AX$ où $A \in \mathcal{M}_{N\times N}(\mathbb{K})$. Décrire les solutions lorsque

1. $A^2 = 0$,
2. A est un projecteur.

Exercice 2
Soit $t \mapsto A(t)$ une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, et soit $X(t)$ une solution de l'équation

$$X'(t) = A(t) \circ X(t).$$

On suppose que la matrice $A(t)$ est antisymétrique pour tout $t \in \mathbb{R}$. Quelle est l'équation différentielle satisfaite par ${}^tX \circ X$? En déduire que si $X(t_0)$ est une matrice orthogonale, alors $X(t)$ est une matrice orthogonale pour tout t.

Exercice 3
Résoudre les systèmes différentiels suivants :

$$\left\{\begin{array}{rl} x' = & 2x + y + 2z \\ y' = & -2x - y - 4z \\ z' = & x + y + 3z \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rl} x' = & x - y + 1 \\ y' = & 2x + 4y + e^t \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rl} x' = & x - y \\ y' = & 3x + 4y \end{array}\right.$$

Exercice 4
Trouver la résolvante du système différentiel

$$\left\{\begin{array}{rl} x' = & x + y \\ y' = & 2x \end{array}\right. .$$

En déduire l'expression de la matrice

$$\exp(tA) \qquad \text{pour } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5
Soit le système

$$(S) \begin{cases} x'(t) = -x - y \\ y'(t) = -2x - 2y. \end{cases}$$

1. Déterminer toutes les "positions d'équilibre" du système, c'est-à-dire les solutions constantes. Les représenter sur un dessin et tracer les vecteurs $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$.

2. Résoudre le système (S). Qu'obtient-on lorsque t tend vers $+\infty$?

Exercice 6

1. Donner la forme générale des solutions du système différentiel $X' = AX$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. En déduire la matrice Résolvante associée, vérifier que $\det(R(t,0)) = e^{tr(A)t}$ et trouver $\exp(A)$.
3. Mêmes questions avec les matrices suivantes

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7

On considère la matrice M et les vecteurs X_0, B suivants :

$$M = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 4 \\ -4 & -5 & -2 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \ X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la solution générale du système $X' = MX$.
2. Déterminer l'unique solution valant X_0 en $t = 0$.
3. Trouver la solution générale du système (avec second membre) $X' = MX + B$.

Exercice 8

Intégrer les trois systèmes différentiels suivants (x, y, z, u désignant des fonctions dérivables de la variable t) :

$$(S) \begin{cases} x' = x + y + z + 1 \\ y' = -x + 2y + z + t \\ z' = x + z + t^2 e^t \end{cases} \quad (S') \begin{cases} x' = x - y + 2u \\ y' = -3x + 2y + z + u \\ z' = -2x + 2z + 2u \\ u' = -3x + y + z + 2u \end{cases} \quad (S'') \begin{cases} x' = 2x - y + u \\ y' = -x + y + z + u \\ z' = -2x + 2y + 2z - 2u \\ u' = -2x + y + z + u \end{cases}$$

Équations différentielles linéaires d'ordre N

Exercice 9

Soit à résoudre, sur $\mathbb{R}^{+*}$, l'équation différentielle

$$x^2 y'' + 2xy' - 2y = x - 1.$$

1. Montrer que l'équation homogène admet une base de solutions de la forme $x \mapsto x^\alpha$.
2. Trouver une solution particulière par la méthode de variation des constantes.

3. Trouver la solution vérifiant $y(1) = 1, y'(1) = 0$.

Une équation de la forme $\sum a_k x^k y^{(k)} = 0$, où les a_k sont des constantes, est appelée *équation d'Euler*. Elle admet toujours des solutions de la forme x^α et dans certains cas, une base de solutions de cette forme. On peut se ramener aux équations linéaires à coefficients constants en posant $x = e^t$.

Exercice 10

Donner la forme générale des solutions du système différentiel réel suivant:

$$\begin{cases} u' = -v \\ v'' = u \end{cases}$$

Exercice 11

Trouver toutes les solutions des équations différentielles suivantes :

$$\begin{array}{lc} (1) & y^{(3)} + y'' - y' - y = 1 + 2\mathrm{ch}(x) \\ (2) & y^{(4)} + y = -x^4 + 1 \\ (3) & y^{(4)} + 16y = \sin(2x)\cos(4x) \end{array}$$

Trouver l'unique solution du problème de Cauchy suivant.

$$\begin{cases} y^{(4)} - 2y'' + y = x \\ y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 0, y'''(0) = 4. \end{cases}$$