Travaux Dirigés no. 2
Algèbre Linéaire - Exponentielle de Matrices

Exercice 1

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie N et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On note $P_f(X) = (-1)^N \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ son polynôme caractéristique et Q_f son polynôme minimal. Pour tout i, soit $N_i = \ker(f - \lambda_i \mathrm{Id})^{\alpha_i}$ le sous-espace caractéristique de f associé à la valeur propre λ_i. Justifier les points suivants :

1. Pour tout i, N_i est stable par f.
2. On a $E = N_1 \oplus \cdots \oplus N_p$.
3. Pour tout i, $\dim N_i = \alpha_i$.
4. $Q_A(X)$ divise le polynôme caractéristique $P_A(X)$. On le note $Q_A(X) = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)^{\beta_i}$, avec $1 \leq \beta_i \leq \alpha_i$.
5. $N_i = \ker(f - \lambda_i \mathrm{Id})^{\beta_i}$.
6. f est diagonalisable si et seulement si $\beta_i = 1$ pour $i = 1, \cdots, p$.
7. Diagonaliser ou trigonaliser les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 7 & 8 & 4 \\ -4 & -5 & -2 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} ;$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2

Pour tout polynôme complexe $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ et pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^n$, on note

$$P(D)(f) = \sum_{i=0}^n a_i f^{(i)} = a_n f^{(n)} + \cdots + a_1 f' + a_0 f$$

(D est l'opérateur de dérivation).

1. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, on note $\mathcal{S}_P$ l'espace des solutions de l'équation différentielle $P(D)(y) = 0$. Si $P_1, \cdots, P_k \in \mathbb{C}[X]$ sont des polynômes premiers entre eux deux à deux, montrer que $\mathcal{S}_{P_1 \cdots P_k} = \mathcal{S}_{P_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{S}_{P_k}$.
2. Si $P_n(X) = (X - \alpha)^n$, déterminer la forme des solutions de l'équation différentielle $P_n(D)(y) = 0$.
3. En déduire, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$ ($\deg(P) \geq 1$), la forme des solutions de l'équation différentielle $P(D)(y) = 0$.

4. Adapter cette méthode à la résolution des relations de récurrence linéaires d'ordre n à coefficients constants.

Exercice 3

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie N et soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer qu'il existe un couple $(d, n) \in (\mathcal{L}(E))^2$ avec d diagonalisable et n nilpotente, tel que
$$(i)\ f = d + n \quad (ii)\ n \circ d = d \circ n$$
2. Montrer que le couple (d, n) satisfaisant les hypothèses de la question 1 est unique. On l'appelle la décomposition de Dunford de l'endomorphisme f.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_{N\times N}(\mathbb{K})$. Après avoir rappelé sa définition, expliciter $\exp(A)$ dans les cas suivants :
   (a) A est diagonalisable,
   (b) A est nilpotente,
   (c) A est quelconque.
4. Donner la décomposition de Dunford et calculer l'exponentielle des matrices suivantes :
$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}1&2&3\\0&4&5\\0&0&6\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}7&8&4\\-4&-5&-2\\-2&-3&0\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}1&1&1\\-1&2&1\\1&0&1\end{pmatrix};$$
$$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&-1\\0&2&1\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}.$$

Exercice 4

Pour $A, B \in \mathcal{M}_{N\times N}(\mathbb{K})$ on note le crochet de Lie $[A, B] = AB - BA$. Dans toute la suite A et B sont des matrices de $\mathcal{M}_{N\times N}(\mathbb{K})$.

1. Montrer que $[A, \exp(tA)] = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et que
$$\frac{d}{dt}\exp(tA) = A\exp(tA).$$
2. On suppose que $[A, B] = 0$. Montrer que $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$.
3. On suppose désormais que $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$. Le but de cette question est de montrer que dans ce cas on a
$$\begin{aligned}\exp(A+B) &= \exp(A)\exp(B)\exp(\frac{1}{2}[A,B])\\ &= \exp(A)\exp(B)\exp(-\frac{1}{2}[B,A]).\end{aligned}$$
   (a) Pour $x_0 \in \mathbb{K}^N$ fixé, posons
$$\begin{aligned}x_1(t) &= \exp(tA)x_0\\ x_2(t) &= \exp(tB)x_1\\ x_3(t) &= \exp(-t(A+B))x_2.\end{aligned}$$

Montrer que

$$\frac{dx_3}{dt} = \exp(-t(A+B))\varphi(t)\exp(tB)\exp(tA)x_0$$

où $\varphi(t) = -A + \exp(tB)A\exp(-tB)$.

(b) Calculer $\varphi'(t)$. En déduire que $x_3 = \exp(\frac{t^2}{2}[A,B])x_0$ puis le résultat cherché.

Exercice 5

Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_{N\times N}(\mathbb{K})$ on a :

$$\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{tr}A).$$

(Indication : identifier l'équation différentielle vérifiée par $t \mapsto \det(\exp(tA))$*).*