Travaux Dirigés no. 1
Rappels

Équations différentielles linéaires d'ordre 1 et 2

Exercice 1
D'après une loi due à Newton, le taux de refroidissement d'un corps plongé dans de l'air plus froid est proportionnel à la différence de température entre ce corps et l'air.

1. Écrire l'équation différentielle satisfaite par la température.
2. Si, dans de l'air à 20°, ce corps met 20 minutes pour passer de 100° à 60°, combien de temps met-il pour atteindre 30°.
3. On regarde maintenant l'évolution de la température du sol. On suppose pour simplifier que la température de l'air varie de façon régulière : $T_{air}(t) = -5 + 35\cos(2\pi t/365)$, et que le sol et l'air ont initialement la même température.
4. Même question avec une variation brusque de la température en une nuit : $T_{air}(t) = 25 - 25t^2$.

Exercice 2
Des nutriments entrent dans une cellule à la vitesse constante de R molécules par unité de temps, et en sortent proportionnellement à la concentration : si N est la concentration à l'instant t, le processus ci-dessus se modélise par l'équation:

$$\frac{dN}{dt} = R - KN.$$

Intégrer cette équation. Y a-t-il un équilibre (*i.e.* une solution constante) ? La concentration va-t-elle tendre vers un équilibre (*i.e.* l'équilibre est-il stable) ?

Exercice 3
Résoudre les équations différentielles suivantes. Sur quel intervalle la solution existe-t-elle ?

$$\begin{array}{ll} (a)\ y' - y = t - 2e^t & (b)\ (1+t^2)y' + ty = 0 \\ (c)\ (t^3-1)y' + ty = 0 & (d)\ y'\cos(t) + y\sin(t) = 2\cos(t) \end{array}$$

Exercice 4
Résoudre le problème de Cauchy suivant (Equations linéaires d'ordre 1 avec second membre).

$$\begin{cases} u'(t) = (t^2+1)u(t) + 5e^{\frac{t^3}{3}} \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

où $u_0 \in \mathbb{R}$.

Exercice 5

Résoudre les problèmes de Cauchy suivants (Equations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants).

$$\begin{cases} u''(t) = 5u(t)' - 6u(t) \\ u(0) = 3 \\ u'(0) = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} u''(t) = 2u(t)' - u(t) + \sin(t) \\ u(0) = 0 \\ u'(0) = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} u''(t) = 2u(t)' - 3u(t) \\ u(0) = 0 \\ u'(0) = 0 \end{cases}$$

Exercice 6

Vérifier que la fonction $t \mapsto e^t$ est solution de l'équation différentielle

$$(t+1)y'' - y' - ty = 0.$$

Déterminer une autre solution de cette équation, non proportionnelle à la première.

Exercice 7

Résoudre $u' = |u|$ sur $\mathbb{R}$.

Suites et séries de fonctions

Exercice 8

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Montrer que l'ensemble $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{K}^N)$ des applications continues de I dans $\mathbb{K}^N$ est un espace vectoriel normé complet pour la "norme de la convergence uniforme" :

$$\| v \|_\infty := \sup_{t \in I} \| v(t) \|_\star .$$

Exercice 9

Soit $\alpha \geq 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1]$ on pose $f_n(x) = n^\alpha x^n (1 - x)$.

1. Montrer que la suite de fonctions $\{f_n\}$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers une fonction limite que l'on déterminera.
2. Pour quelles valeurs de α la suite $\{f_n\}$ converge-t-elle uniformément sur $[0, 1]$?
3. Montrer que $\{f_n\}$ converge uniformément sur tous compacts de $]0, 1[$ pour tout $\alpha \geq 0$.

Exercice 10

Soit $f :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\int_1^{+\infty} s|f(s)|\, ds < \frac{1}{2}$. On considère l'équation différentielle scalaire suivante:

$$u'' + f(t)u = 0 \,. \tag{2}$$

Pour trouver une solution particulière de cette équation, nous allons construire par récurrence une suite de fonctions $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de la façon suivante: on pose $u_0(t) = 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in]1, +\infty[$,

$$u_{n+1}(t) = 1 + \int_t^{+\infty} (t - s) u_n(s) f(s)\, ds \,.$$

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_t^{+\infty}(t-s)u_n(s)f(s)\,ds$ est absolument convergente, que u_n est bornée, et que u_n est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]1,+\infty[$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in]1,+\infty[$,
$$|u_{n+1}(t) - u_n(t)| \leq \left(\int_t^{+\infty} s|f(s)|\,ds\right)^{n+1}.$$
3. En utilisant la question précédente, montrer que la suite $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction u_* bornée telle que
$$u_*(t) = 1 + \int_t^{+\infty}(t-s)u_*(s)f(s)\,ds.$$
4. Montrer que la fonction u_* est solution de l'équation (**??**) sur $]1,+\infty[$, et que
$$\lim_{t\to+\infty} u_*(t) = 1, \qquad \lim_{t\to+\infty} u_*'(t) = 0.$$

Inéquations différentielles

Exercice 11

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ une fonction dérivable qui vérifie l'inégalité différentielle suivante pour tout $x \in]0,1[$,
$$f(x) \leq Cx^{2+\alpha} + xf'(x), \tag{3}$$
où $C \geq 0$ et $\alpha > 0$ sont des constantes.

1. Montrer que l'énoncé est non vide (i.e. il existe de telles fonctions f).
2. Montrer que la limite $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x}$ existe et est finie.

Exercice 12

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction C^1 qui vérifie l'inégalité différentielle suivante pour tout $x \in [0,1]$,
$$f(x) \leq \alpha x f'(x), \tag{4}$$
où $\alpha > 0$. Montrer alors que pour tout $x \in [0,1]$,
$$f(x) \leq x^{\frac{1}{\alpha}} f(1).$$

Exercice 13

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue telle que
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

et soit $u : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction de classe C^1 qui vérifie

$$0 \leq \sqrt{u(x)} + u'(x) \leq f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^+. \tag{5}$$

On souhaite montrer alors que

$$\lim_{x \to +\infty} u(x) = 0. \tag{6}$$

1. Montrer que (**??**) est vrai lorsque u est décroissante à partir d'un certain x_0.
2. Montrer que si u ne tend pas vers 0 et n'est pas décroissante à partir d'un certain temps, alors il existe un $\varepsilon > 0$ et une suite x_n qui tend vers $+\infty$, telle que $u(x_n) > \varepsilon$ et $u'(x_n) > 0$.
3. Conclure.