Notes de cours:

Équations Différentielles Ordinaires

VINCENT MILLOT

Licence 3 *Mathématiques Appliquées*
Université Paris Diderot - Paris 7

2010-2011

Table des matières

Chapitre 1

Introduction : contexte général et linéaire

Dans toutes ces notes, $\mathbb{K}$ désignera le corps des nombres réels $\mathbb{R}$, ou celui des nombres complexes $\mathbb{C}$, et N sera un entier strictement positif.

1.1 Systèmes sous forme normale, problème de Cauchy

Définition 1.1. Soient q et r deux entiers strictement positifs, et soit $u : I \to \mathbb{K}^N$ une fonction r fois dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $F : \mathcal{O} \to \mathbb{K}^q$ une application définie sur un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{K}^{N\times(r+1)}$. On dit que u est une solution sur I du *système différentiel ordinaire*

$$F(t, u, u', \ldots, u^{(r)}) = 0\,, \tag{1.1}$$

si pour tout $t \in I$,

$$\big(t, u(t), u'(t), \ldots, u^{(r)}(t)\big) \in \mathcal{O}\,,$$

et

$$F\big(t, u(t), u'(t), \ldots, u^{(r)}(t)\big) = 0\,.$$

L'entier r est appelé ordre du système différentiel. Lorsque $q = 1$, on parle d'*équation différentielle*, et cette équation est dite *scalaire* si $N = 1$.

En pratique, pour résoudre un système différentiel, on se ramène presque toujours à un système d'ordre 1 par le changement d'inconnue suivant.

Proposition 1.2 (Réduction à l'ordre 1)**.** *Soient u et F comme dans la Définition 1.1 avec $r \geqslant 2$. Posons $v = (v_j)_{j=1}^r : I \to \mathbb{K}^{N\times r}$ définie par $v_1 := u$, et $v_j := u^{(j-1)}$ la $(j-1)$-ième dérivée de u pour $j = 2, \ldots, r$. Alors u est une solution sur I de* (1.1) *si et seulement si v est une solution sur I du système différentiel d'ordre 1 suivant :*

$$\begin{cases} F(t, v_1, \ldots, v_r, v_r') = 0\,, \\ v_j' = v_{j+1} \ \textit{pour}\ j = 1, \ldots, r-1\,. \end{cases} \tag{1.2}$$

Remarque 1. Le système (1.2) vérifié par la nouvelle inconnue v peut s'écrire sous la forme

$$G(t, v, v') = 0\,,$$

où l'application $G = (G_1, \ldots, G_{q+r-1}) : \widetilde{\mathcal{O}} \to \mathbb{K}^{q+r-1}$ est définie sur l'ouvert

$$\widetilde{\mathcal{O}} = \big\{(t, x, y) = (t, (x_j)_{j=1}^r, (y_j)_{j=1}^r) \in \mathbb{R} \times \mathbb{K}^{N\times r} \times \mathbb{K}^{N\times r} : \\ (t, x_1, \ldots, x_r, y_r) \in \mathcal{O}\big\}$$

par

$$G_i(t, x, y) = y_i - x_{i+1} \quad \text{pour } i = 1, \ldots, r-1\,,$$

et

$$G_i(t, x, y) = F_{i+1-r}(t, x_1, \ldots, x_r, y_r) \quad \text{pour } i = r, \ldots, q+r-1\,,$$

avec $F = (F_1, \ldots, F_q)$.

Dans ce cours, nous ne considérerons que des systèmes différentiels sous forme dite *normale* (appelés parfois *équations résolues* par rapport aux dérivées), ou pouvant se ramener à un système sous *forme normale*.

Définition 1.3. On appelle *système différentiel normal* tout système différentiel du premier ordre de la forme

$$u' = f(t, u)\,, \tag{1.3}$$

où $f : \mathcal{O} \to \mathbb{K}^N$ désigne une application donnée et définie sur un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{K}^N$.

Remarque 2. Considérons par exemple le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $N = q = 1$, et d'une équation du type

$$F(t, u, u') = 0\,,$$

où $F : \mathscr{O} \to \mathbb{R}$ est une application définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^3$. Pour trouver une solution de ce problème, on peut d'abord déterminer une racine (t_0, x_0, y_0) de l'équation $F(t, x, y) = 0$. Ayant obtenu une telle racine (t_0, x_0, y_0), si l'on a

$$\frac{\partial F}{\partial y}(t_0, x_0, y_0) \neq 0\,,$$

d'après le Théorème des fonctions implicites, on peut trouver un voisinage $\mathscr{V} \subset \mathbb{R}^2$ de (t_0, x_0), un voisinage $J \subset \mathbb{R}$ de y_0, et une application $f_0 : \mathscr{V} \to J$ de classe $\mathscr{C}^1$ tels que

$$F\big(t, x, f_0(t, x)\big) = 0 \qquad \forall (t, x) \in \mathscr{V}\,.$$

Toute solution de $u' = f_0(t, u)$ sera alors une solution de $F(t, u, u') = 0$.

Dans la suite, on désigne par $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{K}^N$, et I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : \mathcal{O} \to \mathbb{K}^N$ une application donnée.

Définition 1.4. Etant donné $(t_0, x_0) \in \mathcal{O}$, le *problème de Cauchy* relatif à l'équation (1.3) et aux *données initiales* (t_0, x_0) consiste à chercher les solutions (1.3) vérifiant la condition

$$u(t_0) = x_0\,, \tag{1.4}$$

appelée *condition initiale*. Si le problème de Cauchy (1.3)-(1.4) admet une unique solution, on dit que *le problème de Cauchy est bien posé*.

Nous concluons cette première section d'introduction par un résultat simple mais important de *régularité* des solutions de (1.3).

Proposition 1.5. *Supposons que* $f : \mathcal{O} \to \mathbb{K}^N$ *soit de classe* $\mathscr{C}^k$ *sur* $\mathcal{O}$ *avec* $k \geqslant 0$. *Alors toute solution* $u : I \to \mathbb{K}^N$ *de* (1.3) *est de classe* $\mathscr{C}^{k+1}$ *sur* I.

Démonstration. Pour $k = 0$, la fonction $t \in I \mapsto f(t, u(t))$ est continue comme composée d'applications continues. On déduit alors de l'équation (1.3) que u' est continue sur I, et donc u est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I. Pour $k \geqslant 1$ procédons par récurrence en supposant que u est de classe $\mathscr{C}^k$, et montrons que u est en fait de classe $\mathscr{C}^{k+1}$. Comme composée d'applications de classe $\mathscr{C}^k$, la fonction $t \in I \mapsto f(t, u(t))$ est de classe $\mathscr{C}^k$, et donc u' est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I d'après (1.3), c'est à dire u est de classe $\mathscr{C}^{k+1}$. $\square$

1.2 Notations

Dans tout ce cours, nous noterons $\mathscr{L}(\mathbb{K}^N, \mathbb{K}^q)$ l'espace vectoriel des applications linéaires de $\mathbb{K}^N$ dans $\mathbb{K}^q$. Lorsque $q = N$ nous écrirons simplement $\mathscr{L}(\mathbb{K}^N)$. Rappelons également que $\mathscr{L}(\mathbb{K}^N, \mathbb{K}^q)$ peut être identifié à l'espace des matrices $q \times N$ à coefficients dans $\mathbb{K}$, noté $\mathscr{M}_{q\times N}(\mathbb{K})$. Cette identification sera souvent utilisée sans être mentionnée (sauf en cas de confusions possibles). L'écriture matricielle d'un élément de $\mathscr{L}(\mathbb{K}^N, \mathbb{K}^q)$ se fera alors dans la base canonique. La base canonique de $\mathbb{K}^N$ sera notée $e = (e_1, \ldots, e_N)$.

Nous désignerons par $\|\cdot\|_{\star,N}$ et $\|\cdot\|_{\star,q}$ des normes (quelconques) sur $\mathbb{K}^N$ et $\mathbb{K}^q$ (rappelons qu'en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes), et nous noterons $|||\cdot|||_{\star,(q,N)}$ la norme induite sur $\mathscr{L}(\mathbb{K}^N, \mathbb{K}^q)$ définie par

$$|||A|||_{\star,(q,N)} := \sup_{x\in\mathbb{K}^N\setminus\{0\}} \frac{\|Ax\|_{\star,q}}{\|x\|_{\star,N}} ,$$

qui est aussi appelée *norme d'opérateur*. Lorsque $q = N$, nous n'indiquerons pas les dimensions pour simplifier l'écriture.

Nous noterons également $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire de $\mathbb{R}^N$ lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, ou le produit Hermitien de $\mathbb{C}^N$ lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. La norme Euclidienne induite sera notée $\|\cdot\|_2$, et rappelons que pour $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{K}^N$,

$$\|x\|_2 := \sqrt{\langle x, x\rangle} = \left(\sum_{j=1}^{N} |x_j|^2\right)^{1/2} .$$

1.3 Systèmes différentiels linéaires

Définition 1.6. Un système différentiel d'ordre r est dit *linéaire* si il s'écrit sous la forme

$$A_0(t)u + \sum_{j=1}^{r} A_j(t)u^{(j)} = b(t) , \tag{1.5}$$

où pour $j = 0, \ldots, r$, $A_j : I \to \mathscr{L}(\mathbb{K}^N, \mathbb{K}^q)$ et $b : I \to \mathbb{K}^q$ sont des applications données. La fonction b est appelée *second membre* du système, et si $b = 0$, le système est dit *homogène*.

Remarque 3. Lorsque $q = N$, le système linéaire (1.5) peut s'écrire sous forme normale si l'application $A_r : I \to \mathscr{L}(\mathbb{K}^N)$ vérifie $\det(A_r(t)) \neq 0$ pour tout $t \in I$. En effet, $A_r(t)$ est alors inversible pour tout $t \in I$, et nous pouvons commencer par écrire (1.5) sous la forme

$$u^{(r)} = \widetilde{A}_0(t)u + \sum_{j=1}^{r-1} \widetilde{A}_j(t)u^{(j)} + \widetilde{b}(t)\,,$$

avec $\widetilde{A}_j(t) = -A_r^{-1}(t) \circ A_j(t)$ pour $j = 0, \dots, r-1$, et $\widetilde{b}(t) = A_r^{-1}(t)b(t)$. On considère alors l'application $M : I \to \mathscr{L}(\mathbb{K}^{N\times r})$ définie pour tout $t \in I$ par

$$M(t) : x = (x_j)_{j=1}^r \in \mathbb{K}^{N\times r} \mapsto \left(x_2, x_3, \dots, x_r, \sum_{j=1}^{r-1} \widetilde{A}_{j-1}(t)x_j \right)\,,$$

et la fonction $N : I \to \mathbb{K}^{N\times r}$ donnée par

$$N(t) = \left(0, \dots, 0, \widetilde{b}(t)\right)\,.$$

En opérant le changement d'inconnue de le Proposition 1.2, on se ramène au système sous forme normale

$$v' = M(t)v + N(t)\,.$$

Nous allons présenter maintenant quelques propriétés élémentaires des solutions de systèmes différentiels linéaires d'ordre 1 sous forme normale. L'existence de solutions n' est pas discutée ici, elle le sera dans le chapitre suivant. Toutefois les propriétés ci-dessous seront utilisées dans tout le reste de ces notes.

On se donne donc deux applications $A : I \to \mathscr{L}(\mathbb{K}^N)$ et $b : I \to \mathbb{K}^N$, et nous considérons le système différentiel

$$u' = A(t)u + b(t)\,, \tag{1.6}$$

où l'inconnue u est une fonction à valeurs dans $\mathbb{K}^N$, définie et dérivable sur un sous-intervalle $J \subset I$. Le système différentiel homogène

$$u' = A(t)u\,, \tag{1.7}$$

sera dit *associé* à (1.6).

Les démonstrations des deux propositions suivantes sont élémentaires et laissées en exercice.

Proposition 1.7. *En supposant que les solutions considérées ci-dessous sont définies sur un même sous-intervalle J de I :*

(i) si u_1 et u_2 sont deux solutions de (1.6)*, alors $u_1 - u_2$ est une solution du système homogène associé* (1.7)*;*

(ii) l'ensemble des solutions du système homogène (1.7) *forme un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$;*

(iii) l'ensemble des solutions de (1.6) *est un sous-espace affine de l'espace vectoriel des applications de J dans $\mathbb{K}^N$.*

Proposition 1.8. *Soient* $b_k : I \to \mathbb{K}^N$*,* $k = 1, \ldots, K$*, des applications données. Pour chaque* $k \in \{1, \ldots, K\}$*, soit* u_k *une solution définie sur* I *de* (1.6) *avec* $b = b_k$*. Alors pour tous* $\lambda_1, \ldots, \lambda_K \in \mathbb{K}$*, la fonction*

$$u = \sum_{k=1}^{K} u_k$$

est une solution sur I *de* (1.6) *avec* $b = \sum_k b_k$*.*

Remarque 4. D'après la Proposition 1.7, pour connaître toutes les solutions de (1.6), il suffit de connaître toutes les solutions de (1.7) et *une seule* solution particulière de (1.6). De plus, pour connaître toutes les solutions de (1.7), il suffit de connaître une base de l'espace vectoriel des solutions de (1.7). Nous verrons dans le chapitre suivant qu'une telle base existe, et que l'espace vectoriel des solutions de (1.7) est en fait isomorphe à $\mathbb{K}^N$.

Définition 1.9. Une base de l'espace vectoriel des solutions du système homogène (1.7) sera appelé *système fondamental* de solutions, ou *base de solutions*.

Chapitre 2

Résolution des systèmes différentiels linéaires

2.1 Résolution du problème de Cauchy

Théorème 2.1 (de Cauchy). *Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $A : I \to \mathscr{L}(\mathbb{K}^N)$ et $b : I \to \mathbb{K}^N$ deux applications continues. Pour tous $t_0 \in I$ et $x_0 \in \mathbb{K}^N$, le système différentiel*

$$u' = A(t)u + b(t) \tag{2.1}$$

admet une unique solution définie sur I vérifiant $u(t_0) = x_0$.

Un point clef de la démonstraton consiste à reformuler le problème sous forme dite d'*équation intégrale.*

Lemme 2.2. *Soit $u : I \to \mathbb{K}^N$ une fonction continue. La fonction u est une solution de* (2.1) *vérifiant $u(t_0) = x_0$, si et seulement si u satisfait l'équation intégrale*

$$u(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \big(A(s)u(s) + b(s)\big)\, ds \qquad \forall\, t \in I\,. \tag{2.2}$$

Démonstration. Supposons que u soit une solution de (2.1) vérifiant $u(t_0) = x_0$. D'après la Proposition 1.5, la fonction u est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, et en particulier $u(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} u'(s)\, ds$ pour tout $t \in I$. En utilisant (2.1), on déduit donc que u vérifie (2.2).

Réciproquement, supposons que u vérifie (2.2). Puisque u est continue, le membre de droite de (2.2) est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, et sa dérivée en t est égale à $A(t)u(t) + b(t)$. De (2.2) on déduit alors que u est dérivable sur I et satisfait (2.1). De plus, en prenant $t = t_0$ dans (2.2), nous obtenons $u(t_0) = x_0$. □

Démonstration du Théorème 2.1 lorsque I est compact. D'après le Lemme 2.2, il nous suffit de montrer l'existence et l'unicité de la solution de l'équation intégrale (2.2). Nous supposerons pour le moment que l'intervalle I est compact, et on écrira $I = [a, b]$. Nous allons maintenant construire une solution de (2.2) par une *méthode de point fixe*.

On définit une suite $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues de I dans $\mathbb{K}^N$ par la relation de récurrence

$$\begin{cases} u_{n+1}(t) = x_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} \big(A(s)u_n(s) + b(s)\big)\,ds & \text{pour } n \in \mathbb{N} \text{ et } t \in I\,, \\ u_0(t) = x_0 & \text{pour } t \in I\,. \end{cases} \tag{2.3}$$

Nous laissons au lecteur le soin de justifier la continuité de chaque fonction u_n. Notre but est de montrer que la suite $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une fonction continue $u : I \to \mathbb{K}^N$ qui sera solution de notre problème.

Étape 1 : Estimations a priori. On observe que les applications $t \in I \mapsto \|\!|A(t)|\!\|_\star$ et $t \in I \mapsto \|b(t)\|_\star$ sont continues comme composées d'applications continues. Puisque I est compact, il existe des nombres $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ tels que

$$\|\!|A(t)|\!\|_\star \leqslant \alpha \quad \text{et} \quad \|b(t)\|_\star \leqslant \beta \qquad \forall\, t \in I\,. \tag{2.4}$$

En conséquence, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} \|A(t)\big(u_n(t) - u_{n-1}(t)\big)\|_\star &\leqslant \|\!|A(t)|\!\|_\star \|u_n(t) - u_{n-1}(t)\|_\star \\ &\leqslant \alpha\|u_n(t) - u_{n-1}(t)\|_\star \qquad \forall\, t \in I\,. \end{aligned}$$

En combinant cette inégalité avec la relation de récurrence (2.3), nous obtenons pour tout $n \geqslant 1$ et tout $t \in I$,

$$\begin{aligned} \|u_{n+1}(t) - u_n(t)\|_\star &= \left\| \int_{t_0}^{t} A(s)\big(u_n(s) - u_{n-1}(s)\big)\,ds \right\|_\star \\ &\leqslant \int_{t_0}^{t} \big\|A(s)\big(u_n(s) - u_{n-1}(s)\big)\big\|_\star\,ds \leqslant \alpha \int_{t_0}^{t} \big\|u_n(s) - u_{n-1}(s)\big\|_\star\,ds\,. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Pour $n = 0$ et $t \in I$, nous avons

$$\begin{aligned} \|u_1(t) - u_0(t)\|_\star &= \left\| \int_{t_0}^{t} A(s)x_0 + b(s)\,ds \right\|_\star \\ &\leqslant \int_{t_0}^{t} \big\|A(s)x_0\big\| + \big\|b(s)\big\|_\star\,ds \leqslant \big(\alpha\|x_0\|_\star + \beta\big)|t - t_0|\,. \end{aligned} \tag{2.6}$$

En effectuant une récurrence sur l'entier n, nous déduisons de (2.5) et (2.6) que

$$\|u_{n+1}(t) - u_n(t)\|_\star \leqslant \big(\alpha\|x_0\|_\star + \beta\big)\frac{\alpha^n|t - t_0|^{n+1}}{(n+1)!} \qquad \forall\, t \in I\,,\ \forall\, n \in \mathbb{N}\,.$$

en particulier, nous avons obtenu

$$\sup_{t\in I} \|u_{n+1}(t) - u_n(t)\|_\star \leqslant C\frac{\alpha^n|b - a|^{n+1}}{(n+1)!} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\,. \tag{2.7}$$

avec $C = \alpha\|x_0\|_\star + \beta$.

Étape 2 : Convergence de $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Rappelons dans un premier temps le résultat classique suivant (démonstration en exercice) :

Lemme 2.3. *L'ensemble $\mathscr{C}^0(I,\mathbb{K}^N)$ des applications continues de I dans $\mathbb{K}^N$ est un espace vectoriel normé complet pour la "norme de la convergence uniforme" :*

$$\|v\|_\infty := \sup_{t\in I} \|v(t)\|_\star\,.$$

Montrons que la suite $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathscr{C}^0(I,\mathbb{K}^N)$. En effet, pour tous entiers $m>n$,

$$u_m-u_n = u_m-u_{m-1}+u_{m-1}-u_{m-2}+\ldots+u_{n+1}-u_n = \sum_{k=n}^{m-1}(u_{k+1}-u_k)\,.$$

On déduit alors de (2.7) que pour tous entiers $m>n$,

$$\|u_m-u_n\|_\infty \leqslant \sum_{k=n}^{m-1}\|u_{k+1}-u_k\|_\infty \leqslant C\sum_{k=n}^{m-1}\frac{\alpha^k|b-a|^{k+1}}{(k+1)!}\,. \tag{2.8}$$

Puisque la série numérique $\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{\alpha^k|b-a|^{k+1}}{(k+1)!}$ est convergente (exercice), nous avons

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k\geqslant n}\frac{\alpha^k|b-a|^{k+1}}{(k+1)!} = 0\,. \tag{2.9}$$

On se donne maintenant $\varepsilon>0$ arbitraire. D'après (2.9), il existe $N_\varepsilon\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geqslant N_\varepsilon$, $\sum_{k\geqslant n}\frac{\alpha^k|b-a|^{k+1}}{(k+1)!}<\varepsilon/C$. Nous déduisons alors de (2.8) que pour tous $n,m\in\mathbb{N}$ avec $m>n\geqslant N_\varepsilon$,

$$\|u_m-u_n\|_\infty \leqslant C\sum_{k=n}^{m-1}\frac{\alpha^k|b-a|^{k+1}}{(k+1)!} \leqslant C\sum_{k\geqslant n}\frac{\alpha^k|b-a|^{k+1}}{(k+1)!} < \varepsilon\,.$$

La suite $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bien de Cauchy dans $\mathscr{C}^0(I,\mathbb{K}^N)$.

D'après le Lemme 2.3, l'espace $\mathscr{C}^0(I,\mathbb{K}^N)$ munit de la norme $\|\cdot\|_\infty$ est complet. La suite $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc uniformément sur l'intervalle I vers une certaine fonction $u\in\mathscr{C}^0(I,\mathbb{K}^N)$.

Étape 3 : u est solution. Puisque la converge uniforme implique la convergence simple, nous déduisons que $u_n(t)\to u(t)$ pour tout $t\in I$ lorsque $n\to+\infty$. En particulier,

$$u(t_0) = \lim_{n\to+\infty} u_n(t_0) = x_0\,,$$

puisque $u_{n+1}(t_0) = x_0+\int_{t_0}^{t_0} A(s)u_n(s)+b(s)\,ds = x_0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. De plus,

$$\begin{aligned}\big\|A(t)u_n(t)-A(t)u(t)\big\|_\star &\leqslant |\!|\!|A(t)|\!|\!|_\star\|u_n(t)-u(t)\|_\star\\ &\leqslant \alpha\|u_n(t)-u(t)\|_\star \qquad \forall\, t\in I\,,\ \forall\, n\in\mathbb{N}\,,\end{aligned}$$

et donc

$$\sup_{t\in I}\big\|A(t)u_n(t)-A(t)u(t)\big\|_\star \leqslant \alpha\|u_n-u\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

La suite de fonctions $t\in I\mapsto A(t)u_n(t)+b(t)$ converge donc uniformément sur I vers la fonction $t\in I\mapsto A(t)u(t)+b(t)$, et en conséquence

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{t_0}^t A(s)u_n(s)+b(s)\,ds = \int_{t_0}^t A(s)u(s)+b(s)\,ds \qquad \forall\, t\in I\,. \tag{2.10}$$

Nous pouvons alors passer à la limite $n \to +\infty$ dans (2.3) pour déduire que u vérifie (2.2). La fonction continue u est donc bien solution de notre problème.

Étape 4 : Unicité de la solution. Supposons qu'il existe deux fonctions $u_1, u_2 \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{K}^N)$ vérifiant (2.2). On pose alors $v = u_1 - u_2$ et on remarque v est une fonction continue sur I vérifiant

$$v(t) = \int_{t_0}^{t} A(s)v(s)\, ds \qquad \forall\, t \in I\,. \tag{2.11}$$

En posant $M := \|v\|_\infty$, nous estimons

$$\|v(t)\|_\star \leqslant \int_{t_0}^{t} \big\|A(s)v(s)\big\|_\star\, ds \leqslant \int_{t_0}^{t} |\!|\!| A(s) |\!|\!|_\star \|v(s)\|_\star\, ds \leqslant \alpha M |t - t_0| \qquad \forall\, t \in I\,.$$

En réinjectant cette inégalité dans (2.11) nous obtenons

$$\begin{aligned} \|v(t)\|_\star \leqslant \int_{t_0}^{t} |\!|\!| A(s) |\!|\!|_\star \|v(s)\|_\star\, ds &\leqslant \alpha M \int_{t_0}^{t} |s - t_0|\, ds \\ &\leqslant M \frac{\alpha^2 |t - t_0|^2}{2} \qquad \forall\, t \in I\,. \end{aligned}$$

Par récurrence nous arrivons ainsi à

$$\|v(t)\|_\star \leqslant M \frac{\alpha^n |t - t_0|^n}{n!} \leqslant M \frac{\alpha^n |b - a|^n}{n!} \qquad \forall\, t \in I\,,\ \forall\, n \in \mathbb{N}\,.$$

On déduit alors que

$$\|v\|_\infty \leqslant M \frac{\alpha^n |b - a|^n}{n!} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0\,,$$

et donc $v = 0$, c'est à dire $u_1 = u_2$. □

Exercice 1. Démontrer (2.10) en utilisant le théorème de convergence dominée.

Démonstration du Théorème 2.1 lorsque I n'est pas compact. Soit $\{I_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'intervalles compacts tels que $I_k \subset I_{k+1}$, $t_0 \in I_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, et $I = \cup_k I_k$ (exercice : construire une telle suite). Puisque I_k est compact et $t_0 \in I_k$, pour chaque $k \in \mathbb{N}$ il existe une unique solution u_k de (2.1) définie sur I_k et vérifiant $u_k(t_0) = x_0$. Mais comme $I_k \subset I_{k+1}$, u_{k+1} est également une solution sur I_k de (2.1) vérifiant $u_{k+1}(t_0) = x_0$. Par unicité de la solution, nous avons donc $u_{k+1}(t) = u_k(t)$ pour tout $t \in I_k$, et cela pour tout $k \in \mathbb{N}$. Du fait que $I = \cup_k I_k$, nous pouvons maintenant définir une fonction $u : I \to \mathbb{K}^N$ par

$$u(t) = u_k(t) \quad \text{si } t \in I_k\,. \tag{2.12}$$

On vérifie alors que $u \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{K}^N)$, et que u satisfait l'équation intégrale (2.2) (exercice). La fonction u est donc bien une solution de (2.1) sur I, et $u(t_0) = u_k(t_0) = x_0$.

Montrons maintenant que u est l'unique solution de (2.1) sur I vérifiant $u(t_0) = x_0$. Si $\widetilde{u}$ est une autre solution sur I, alors $\widetilde{u}$ est également une solution I_k vérifiant $\widetilde{u}(t_0) = x_0$ pour tous les $k \in \mathbb{N}$. Par unicité sur I_k compact, nous avons donc $\widetilde{u}(t) = u_k(t)$ pour tout $t \in I_k$. Mais alors $\widetilde{u} = u$ d'après (2.12). □

Remarque 5. Toute solution u de l'équation $u' = A(t)u + b(t)$ définie sur un sous-intervalle J de I, est la restriction à I d'une solution définie sur tout I. Pour ce type d'équations, nous pourrons donc nous contenter de l'étude des solutions définies sur tout l'intervalle I. Nous verrons dans le chapitre suivant que dans un cadre plus général, ces solutions sont appelées *solutions globales*.

Dans le reste de ce chapitre, les solutions considérées seront donc définies sur tout l'intervalle I.

2.2 Systèmes homogènes

Une conséquence directe du Théorème 2.1 est le résultat suivant dont la preuve est laissée au lecteur.

Théorème 2.4. *Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $A : I \to \mathscr{L}(\mathbb{K}^N)$ une application continue. Soit $\mathscr{S}$ l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène*

$$u' = A(t)u\,. \tag{2.13}$$

Pour tout $t_0 \in I$, l'application $u \in \mathscr{S} \mapsto u(t_0) \in \mathbb{K}^N$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Corollaire 2.5. *L'espace vectoriel $\mathscr{S}$ des solutions de* (2.13) *est de dimension N.*

Définition 2.6. On dit que des solutions $u_1, \dots, u_p$ de (2.13) sont *linéairement dépendantes* si il existe des constantes $\mu_1, \dots, \mu_p \in \mathbb{K}$ non toutes nulles telles que

$$\sum_{k=1}^{p} \mu_k u_k(t) = 0 \qquad \forall\, t \in I\,.$$

Si les solutions $u_1, \dots, u_p$ ne sont pas linéairement dépendantes, on dit qu'elles sont *linéairement indépendantes*.

Proposition 2.7. *Pour que des solutions $u_1, \dots, u_p$ de* (2.13) *soient linéairement indépendantes, il faut et il suffit qu'il existe $t_0 \in I$ tel que $\big(u_1(t_0), \dots, u_p(t_0)\big)$ forme une famille libre de $\mathbb{K}^N$.*

Démonstration. Si il existe $t_0 \in I$ tel que $\big(u_1(t_0), \dots, u_p(t_0)\big)$ forme une famille libre de $\mathbb{K}^N$, alors le fait que $u_1, \dots, u_p$ soient linéairement indépendantes découle directement de la Définition 2.7. Pour montrer l'implication inverse, on suppose que $u_1, \dots, u_p$ sont linéairement indépendantes, et on se donne $t_0 \in I$ quelconque. Nous allons montrer que $\big(u_1(t_0), \dots, u_p(t_0)\big)$ forme une famille libre de $\mathbb{K}^N$. On procède par contradiction en supposant qu'il existe des constantes $\mu_1, \dots, \mu_p \in \mathbb{K}$ non toutes nulles telles que

$$\sum_{k=1}^{p} \mu_k u_k(t_0) = 0\,.$$

On pose alors pour $t \in I$, $v(t) := \sum_{k=1}^{p} \mu_k u_k(t)$, et on vérifie que v est une solution de (2.13) vérifiant $v(t_0) = 0$. Par unicité de la solution, on obtient $v(t) = 0$ pour tout $t \in I$, c'est à dire $\sum_{k=1}^{p} \mu_k u_k(t) = 0$ pour tout $t \in I$. Ceci contredit le fait que $u_1, \dots, u_p$ soient linéairement indépendantes, et donc $\big(u_1(t_0), \dots, u_p(t_0)\big)$ forme une famille libre de $\mathbb{K}^N$. $\square$

Définition 2.8. On dit qu'une famille de solutions $(u_1, \ldots, u_N)$ de (2.13) est une *base de solutions* (ou système fondamental) si cette famille est une base de l'espace des solutions $\mathscr{S}$.

Comme conséquence directe de la Proposition 2.7, nous avons le corollaire suivant.

Corollaire 2.9. *Pour que N solutions $u_1, \ldots, u_N$ de* (2.13) *forment une base de solutions, il faut et il suffit qu'il existe $t_0 \in I$ tel que*

$$\det\big(u_1(t_0), \ldots, u_N(t_0)\big) \neq 0\,,$$

où $\det$ *désigne le déterminant d'une famille de N éléments de $\mathbb{K}^N$.*

Remarque 6. Si $\tilde{e} = (\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_N)$ désigne une base quelconque de $\mathbb{K}^N$, on construit pour chaque $t_0 \in I$ une base de solutions $(u_1, \ldots, u_N)$ de (2.13) en considérant pour chaque $i = 1, \ldots, N$, la solution u_i de (2.13) satisfaisant $u_i(t_0) = \tilde{e}_i$.

Dans la définition suivante et pour toute la suite, on notera Id_N l'élément identité de $\mathscr{L}(\mathbb{K}^N)$.

Définition 2.10. On appelle *résolvante* de l'équation homogène (2.13), l'application $R : I \times I \to \mathscr{L}(\mathbb{K}^N)$ qui à $t_0 \in I$ associe $R(\cdot, t_0) : I \to \mathscr{L}(\mathbb{K}^N)$ l'unique solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} R(t, t_0) = A(t) \circ R(t, t_0)\,, \\ R(t_0, t_0) = Id_N\,. \end{cases} \tag{2.14}$$

Remarque 7. L'existence et l'unicité de la solution du problème de Cauchy (2.14) est obtenue à partir du Théorème 2.1. Pour cela on identifie $\mathscr{L}(\mathbb{K}^N)$ avec $\mathscr{M}_{N\times N}(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^{N^2}$, et on considère l'application continue $\mathcal{A} : I \mapsto \mathscr{L}\big(\mathscr{M}_{N\times N}(\mathbb{K})\big)$ définie pour chaque $t \in I$ par $\mathcal{A}(t) : U \mapsto A(t)U$. D'après le Théorème 2.1, pour tout $t_0 \in I$, il existe une unique solution de l'équation $U' = \mathcal{A}(t)U$ satisfaisant $U(t_0) = Id_N$, et l'on note $R(\cdot, t_0)$ cette solution.

Proposition 2.11. *Soient t_0, t_1 et t trois points de I. On a*

$$R(t, t_0) = R(t, t_1) \circ R(t_1, t_0)\,.$$

Démonstration. Fixons les points t_0 et t_1 dans I, et utilisons les notations de la Remarque 7. Posons $S(t) = R(t, t_1) \circ R(t_1, t_0)$. L'application $S : t \in I \to \mathscr{L}(\mathbb{K}^N)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ comme composée d'applications de classe $\mathscr{C}^1$ et

$$S'(t) = \left(\frac{d}{dt} R(t, t_1)\right) \circ R(t_1, t_0) = A(t) \circ R(t, t_1) \circ R(t_1, t_0) = \mathcal{A}(t) S(t)\,.$$

De plus,

$$S(t_1) = R(t_1, t_1) \circ R(t_1, t_0) = Id_N \circ R(t_1, t_0) = R(t_1, t_0)\,.$$

D'après le Théorème 2.1, il existe une unique solution de $U' = \mathcal{A}(t)U$ satisfaisant $U(t_1) = R(t_1, t_0)$. Or la fonction $t \in I \mapsto R(t, t_0) \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^N)$ est solution de cette équation. En conséquence $S = R(\cdot, t_0)$ ce qui montre le résultat annoncé. □

Corollaire 2.12. *Pour tous $t, t_0 \in I$, l'application linéaire $R(t,t_0)$ est un isomorphisme de $\mathscr{L}(\mathbb{K}^N)$ dans $\mathscr{L}(\mathbb{K}^N)$, d'inverse $R(t_0,t)$.*

Démonstration. D'après la Proposition 2.11, nous avons

$$R(t_0,t)\circ R(t,t_0) = R(t_0,t_0) = Id_N$$

et

$$R(t,t_0)\circ R(t_0,t) = R(t,t) = Id_N\ ,$$

d'où la conclusion. □

Remarque 8. En désignant par $\det(L)$ le déterminant d'un élément L de $\mathscr{L}(\mathbb{K}^N)$, nous avons donc $\det\big(R(t,t_0)\big) \neq 0$ pour tous $t, t_0 \in I$.

Remarque 9 (Représentation matricielle). Rappelons que l'on représente de façon canonique chaque élément $L \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^N)$ dans la base canonique $e = (e_1,\dots,e_N)$ par la matrice carré $(Le_1,\dots,Le_N)$ (de taille $N\times N$) formée des vecteurs colonnes $Le_1,\dots,Le_N$. On représente ainsi l'application continue $A : I \to \mathscr{L}(\mathbb{K}^N)$ dans la base e par l'application de I dans $\mathscr{M}_{N\times N}(\mathbb{K})$ qui à $t \in I$ associe la matrice $(A(t)e_1,\dots,A(t)e_N)$. Nous écrirons alors

$$A(t) = \big(a_{ij}(t)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant N}\ ,$$

où les $a_{ij}(t)$ sont les coefficients de la matrice $A(t)$, et $a_{ij} : I \to \mathbb{K}$ est une fonction continue pour tous $i,j \in \{1,\dots,N\}$. Etant donné $t_0 \in I$, considérons maintenant pour chaque $j = 1,\dots,N$, la solution $r_j : I \to \mathbb{K}^N$ de

$$\begin{cases} r_j' = A(t)r_j\ ,\\ r_j(t_0) = e_j\ . \end{cases}$$

La réprésentation matricielle de $R(t,t_0)$ dans la base canonique est alors donnée par la matrice $(r_1(t),\dots,r_N(t))$ formée des vecteurs colonnes $r_1(t),\dots,r_N(t)$.

Proposition 2.13. *Pour tous $t, t_0 \in I$,*

$$\det\big(R(t,t_0)\big) = \exp\left(\int_{t_0}^t \operatorname{tr}\big(A(s)\big)\,ds\right)\ ,$$

où $\operatorname{tr}(L)$ désigne la trace d'un élément L de $\mathscr{L}(\mathbb{K}^N)$.

[Rappel. On définit l'opérateur de *trace*, que l'on note tr, comme l'unique forme linéaire sur $\mathscr{L}(\mathbb{K}^N)$ (de $\mathscr{L}(\mathscr{L}(\mathbb{K}^N),\mathbb{K})$) vérifiant $\operatorname{tr}(A\circ B) = \operatorname{tr}(B\circ A)$ pour tous $A, B \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^N)$, et $\operatorname{tr}(Id_N) = N$.**]**

Remarque 10. Soit $L \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^N)$. Si $(l_{ij}) \in \mathscr{M}_{N\times N}(\mathbb{K})$ est la représentation matricielle de L dans une base quelconque, alors

$$\operatorname{tr}(L) = \sum_{i=1}^N l_{ii}\ . \tag{2.15}$$

En particulier, la trace de $L \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^N)$ ne dépend pas de la base choisie (voir Exercice 2 ci-dessous).

Exercice 2. Soit $e = (e_1, \dots, e_N)$ la base canonnique de $\mathbb{K}^N$.

1) Soient $(l_{ij}) \in \mathscr{M}_{N\times N}(\mathbb{K})$ une représentation matricielle de $L \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^N)$ dans une base quelconque. Montrer l'identité (2.15).

2) En déduire que

$$\operatorname{tr}(L) = \sum_{j=1}^{N} \det\left(e_1, \dots, Le_j, \dots, e_N\right).$$

Exercice 3. Montrer que la fonction $u : I \to \mathbb{K}$ définie par

$$u(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr}\big(A(s)\big)\, ds\right), \tag{2.16}$$

est l'unique solution de l'équation $u' = \operatorname{tr}\big(A(t)\big)u$ satisfaisant $u(t_0) = 1$.

Démonstation de la Proposition 2.13. Posons pour $t \in I$,

$$u(t) = \det\left(R(t, t_0)\right),$$

et remarquons que $u(t_0) = \det(Id_N) = 1$. Comme composée d'applications de classe $\mathscr{C}^1$, la fonction u est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I. Nous allons montrer que pour tout $t \in I$,

$$u'(t) = \operatorname{tr}\big(A(t)\big)u(t).$$

D'après l'Exercice 3, la fonction u sera alors donnée par (2.16) ce qui montrera le résultat annoncé.

Comme dans la Remarque 9, on note $r_j(t) = R(t, t_0)e_j$ pour $j = 1, \dots, N$, si bien que $u(t) = \det(r_1(t), \dots, r_N(t))$. Par la règle de dérivation d'une application multilinéaire, nous avons

$$\begin{aligned}
u'(t) &= \sum_{j=1}^{N} \det\left(r_1(t), \dots, r_j'(t), \dots, r_N(t)\right) \\
&= \sum_{j=1}^{N} \det\left(r_1(t), \dots, A(t)r_j(t), \dots, r_N(t)\right) \\
&= \left(\sum_{j=1}^{N} \det\left(e_1, \dots, R^{-1}(t, t_0)A(t)R(t, t_0)e_j, \dots, e_N\right)\right) \det\left(R(t, t_0)\right) \\
&= \left(\operatorname{tr}\big(R^{-1}(t, t_0)A(t)R(t, t_0)\big)\right) \det\left(R(t, t_0)\right) \\
&= \operatorname{tr}\big(A(t)\big)u(t),
\end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration. □

Théorème 2.14. *Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $A : I \to \mathscr{L}(\mathbb{K}^N)$ une application continue. Pour tous $t_0 \in I$ et $x_0 \in \mathbb{K}^N$, la solution du probème de Cauchy*

$$\begin{cases} u' = A(t)u, \\ u(t_0) = x_0, \end{cases}$$

est donnée par $u(t) = R(t, t_0)x_0$.

Démonstration. Si $u(t) = R(t, , t_0)x_0$ alors $u(t_0) = R(t_0, t_0)x_0 = x_0$, et u est de classe $\mathscr{C}^1$ puisque $R(\cdot, t_0)$ l'est. On a alors

$$u'(t) = \frac{d}{dt}\big(R(t,t_0)x_0\big) = \big(A(t) \circ R(t,t_0)\big)x_0 = A(t)u(t)\,,$$

et la conclusion découle du Théorème 2.1. □

Exercice 4. Soit $(v_1, \dots, v_N)$ une base de solutions du système $u' = A(t)u$. Pour $t \in I$, soit $V(t)$ l'élément de $\mathscr{L}(\mathbb{K}^N)$ dont représentation matricielle est donnée par la matrice formée des vecteurs colonnes $(v_1(t), \dots, v_N(t))$. Montrer que pour tous $t, t_0 \in I$,

$$R(t,t_0) = V(t) \circ V(t_0)^{-1}\,,$$

et que

$$\det\big(V(t)\big) = \det\big(V(t_0)\big)\exp\left(\int_{t_0}^t \operatorname{tr}\big(A(s)\big)\,ds\right)\,.$$

2.3 Équations homogènes d'ordre N

Nous allons maintenant considérer une équation (scalaire) d'ordre $N \geqslant 2$ de la forme

$$u^{(N)} = a_{N-1}(t)u^{(N-1)} + a_{N-2}(t)u^{(N-2)} + \ldots + a_1(t)u' + a_0(t)u\,, \qquad (2.17)$$

posée sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Ici, l'inconnue est la fonction $u : I \to \mathbb{K}$, et les fonctions $a_j : I \to \mathbb{K}$ sont données continues.

Pour traiter ce type d'équations, nous avons vu que l'on peut se ramener à un système d'ordre 1 en effectuant le changement d'inconnue suivant. On pose $v : I \mapsto \mathbb{K}^N$, $v = (v_1, \dots, v_N)^T$, comme étant donnée par $v_1 = u$, et

$$v_{j+1} = u^{(j)} \quad \text{pour } j = 1, \dots, N-1\,, \qquad (2.18)$$

si bien que u est solution de (2.17) si et seulement si v est solution du système

$$\begin{cases} v_j' = v_{j+1} & \text{pour } j = 1, \dots, N-1\,, \\ v_N' = \displaystyle\sum_{j=1}^N a_{j-1}(t)v_j\,. \end{cases}$$

Nous devons donc résoudre le système

$$v' = A(t)v\,, \qquad (2.19)$$

où $A : I \to \mathscr{M}_{N\times N}(\mathbb{K})$ est donnée par

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ a_0(t) & a_1(t) & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{N-1}(t) \end{pmatrix}\,. \qquad (2.20)$$

En particulier, nous avons le résultat suivant.

Proposition 2.15. *L'ensemble des solutions de* (2.17) *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$ *de dimension* N.

Remarque 11. Puisque le problème de Cauchy associé au système (2.19) consiste à se donner une condition initiale, le problème de Cauchy associé à l'équation (2.17) consiste à se donner $t_0 \in I$ et $x_0, x_1, \ldots, x_{N-1} \in \mathbb{K}$, et de chercher la solution u de (2.17) satisfaisant $u(t_0) = x_0$, et $u^{(j)}(t_0) = x_j$ pour $j = 1, \ldots, N-1$.

Notons maintenant $R(t, t_0)$ la résolvante du système (2.19). D'après le Théorème 2.14, la solution v de (2.19) vérifiant $v(t_0) = (x_0, \ldots, x_{N-1})^T =: y_0 \in \mathbb{K}^N$ est donnée par $v(t) = R(t, t_0)y_0$. Pour obtenir de v la solution u de (2.17), il suffit alors de procéder de la façon suivante.

On note $r_1(t, t_0), r_2(t, t_0), \ldots, r_N(t, t_0)$ les coefficients de la première ligne de la représentation matricielle de $R(t, t_0)$, et on obtient :

Théorème 2.16. *Soient* $t_0 \in I$ *et* $x_0, x_1, \ldots, x_{N-1} \in \mathbb{K}$. *L'équation 2.17 admet une unique solution* u *vérifiant* $u(t_0) = x_0$, *et* $u^{(j)}(t_0) = x_j$ *pour* $j = 1, \ldots, N-1$, *et cette solution est donnée par*

$$u(t) = \sum_{j=1}^{N} r_j(t, t_0) x_{j-1} \,.$$

Remarque 12. Pour chaque $j = 1, \ldots, N$, la fonction $r_j(t, t_0)$ est l'unique solution de

$$\begin{cases} r_j^{(N)} = a_{N-1}(t) r_j^{(N-1)} + a_{N-2}(t) r_j^{(N-2)} + \ldots + a_1(t) r_j' + a_0(t) r_j \,, \\ r_j^{(i-1)}(t_0) = \delta_{ij} \quad \text{pour } i = 1, \ldots, N \,, \end{cases} \tag{2.21}$$

où $r_j^{(0)} = r_j$ et δ_{ij} est le symbole de Kronecker.

De plus, si $(R_{ij}(t, t_0))_{1 \leqslant i,j \leqslant N} \in \mathscr{M}_{N \times N}(\mathbb{K})$ est la représentation matricielle de la résolvante $R(t, t_0)$, alors

$$R_{ij}(t, t_0) = r_j^{(i-1)}(t, t_0) \quad \text{pour tous } 1 \leqslant i, j \leqslant N \,.$$

Remarque 13. La famille $(r_1(t, t_0), r_2(t, t_0), \ldots, r_N(t, t_0))$ forme donc une base de solutions de 2.17.

Définition 2.17. Soient $u_1(t), \ldots, u_N(t)$ N solutions de l'équation 2.17. Pour $t \in I$, on appelle *Wronksien* de ces N solutions le déterminant

$$W\big(u_1(t), \ldots, u_N(t)\big) := \det \begin{pmatrix} u_1(t) & u_2(t) & \ldots & \ldots & u_N(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_1^{(N-1)}(t) & \ldots & \ldots & \ldots & u_{N-1}^{(N-1)}(t) \end{pmatrix} .$$

Proposition 2.18. *Soient* $u_1(t), \ldots, u_N(t)$ N *solutions de l'équation 2.17. Pour tout* $t, t_0 \in I$, *nous avons*

$$W\big(u_1(t), \ldots, u_N(t)\big) = W\big(u_1(t_0), \ldots, u_N(t_0)\big) \exp\left(\int_{t_0}^{t} a_{N-1}(s)\, ds \right) .$$

En particulier,

$$W\big(r_1(t,t_0),\dots,r_N(t,t_0)\big) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} a_{N-1}(s)\,ds\right).$$

Démonstration. Pour chaque $i = 1,\dots,N$, notons $v_i : I \to \mathbb{K}^N$ la fonction associée à u_i par le changement d'inconnue (2.18). Alors v_i est solution de (2.19) pour $i = 1,\dots,N$. D'après le Théorème 2.14, on a $v_i(t) = R(t,t_0)v_i(t_0)$ pour $i = 1,\dots,N$, et donc

$$\begin{aligned}
W\big(u_1(t),\dots,u_N(t)\big) &= \det\big(v_1(t),\dots,v_N(t)\big)\\
&= \det\big(v_1(t_0),\dots,v_N(t_0)\big)\det\big(R(t,t_0)\big)\\
&= W\big(u_1(t_0),\dots,u_N(t_0)\big)\exp\left(\int_{t_0}^{t}\big(A(s)\big)\,ds\right)\\
&= W\big(u_1(t_0),\dots,u_N(t_0)\big)\exp\left(\int_{t_0}^{t} a_{N-1}(s)\,ds\right),
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé la Proposition 2.13 dans la dernière égalité. □

2.4 Systèmes avec second membre

Théorème 2.19 (Formule de Duhamel)**.** *Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $A : I \to \mathscr{L}(\mathbb{K}^N)$ et $b : I \to \mathbb{K}^N$ deux applications continues. Pour tous $t_0 \in I$ et $x_0 \in \mathbb{K}^N$, la solution du probème de Cauchy*

$$\begin{cases} u' = A(t)u + b(t)\,,\\ u(t_0) = x_0\,,\end{cases} \tag{2.22}$$

est donnée par

$$u(t) = R(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} R(t,s)b(s)\,ds\,.$$

Démonstration. Pour démontrer le théorème il suffirait de montrer que la formule ci-dessus donne bien une solution au problème de Cauchy. Nous préférons donner une preuve plus constructive connue sous le nom de *Méthode de variation de la constante.*

Pour $t \in I$, on pose $u(t) = R(t,t_0)v(t)$ pour une nouvelle inconnue $v(t)$, et $R(t,t_0)$ désigne la résolvante du système homogène associé. On a alors $x_0 = u(t_0) = v(t_0)$ et

$$\begin{aligned}
u'(t) &= \frac{d}{dt}\big(R(t,t_0)\big)v(t) + R(t,t_0)v'(t)\\
&= \big(A(t)\circ R(t,t_0)\big)v(t) + R(t,t_0)v'(t)\\
&= A(t)u(t) + R(t,t_0)v'(t)\,.
\end{aligned}$$

Mais puisque u est solution de (2.22), on déduit que $R(t,t_0)v'(t) = b(t)$, et donc

$$v'(t) = \big(R(t,t_0)\big)^{-1}b(t) = R(t_0,t)b(t)\,,$$

d'après le Corollaire 2.12. Puisque $v(t_0) = x_0$, nous avons donc

$$v(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} R(t_0, s)b(s)\, ds\,.$$

En conclusion,

$$\begin{aligned} u(t) = R(t,t_0)v(t) &= R(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \big(R(t,t_0) \circ R(t_0,s)\big) b(s)\, ds \\ &= R(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} R(t,s)b(s)\, ds\,, \end{aligned}$$

d'après la Proposition 2.11. $\square$

Remarque 14. Nous soulignons que la solution u est la somme de $R(t,t_0)x_0$ qui est la solution du système homogène prenant la valeur x_0 en t_0, et de la solution du système non-homogène s'annulant en $t = t_0$ qui est donnée par $t \in I \mapsto \int_{t_0}^{t} R(t,s)b(s)\, ds$.

Remarque 15 (Equations d'ordre N avec second membre). Pour $N \geqslant 2$, considérons une équation de la forme

$$u^{(N)} = a_{N-1}(t)u^{(N-1)} + a_{N-2}(t)u^{(N-2)} + \ldots + a_1(t)u' + a_0(t)u + b(t)\,, \quad (2.23)$$

posée sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Ici, l'inconnue est la fonction $u : I \to \mathbb{K}$, et les fonctions $a_j : I \to \mathbb{K}$ et $b : I \to \mathbb{K}$ sont données continues. Comme dans le cas de l'équation homogène de la section 2.3, on se ramène au système d'ordre 1

$$v' = A(t)v + B(t)\,,$$

où $A(t)$ est donnée par (2.20), et $B(t) := (0, \ldots, 0, b(t))^T \in \mathbb{K}^N$. Nous avons déterminé la résolvante du système homogène dans la Remarque 12. En appliquant le Théorème 2.19 pour déterminer v, nous obtenons la forme générale des solutions de (2.23). Pus précisement, pour tout $t_0 \in I$, et $x_0, \ldots, x_{N-1} \in \mathbb{K}$, il existe une unique solution u de (2.23) vérifiant $u(t_0) = x_0$ et $u^{(j)}(t_0) = x_j$ pour $j = 1, \ldots, N-1$, et cette solution est donnée par

$$u(t) = \sum_{j=1}^{N} r_j(t,t_0)x_{j-1} + \int_{t_0}^{t} r_N(t,s)b(s)\, ds\,,$$

où les fonctions $r_j(t,t_0)$ sont données par (2.21). Remarquons pour conclure que la fonction $t \in I \mapsto \int_{t_0}^{t} r_N(t,s)b(s)\, ds$ est la solution de (2.23) s'annulant en $t = t_0$ ainsi que ses $(N-1)$-ièmes premières dérivées.

2.5 Systèmes homogènes à coefficients constants

2.5.1 Exponentielle d'endomorphismes

Définition 2.20. On appelle *exponentielle* d'un endomorphisme $A \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^N)$, l'élément de $\mathscr{L}(\mathbb{K}^N)$ noté e^A et défini par

$$e^A := \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n!} A^n\,,$$

avec la convention $A^0 = Id_N$.

Remarque 16. L'élément e^A est bien défini dans $\mathscr{L}(\mathbb{K}^N)$ puisque la série de terme général $\frac{1}{n!}A^n$ est normalement convergente dans $\mathscr{L}(\mathbb{K}^N)$ qui est complet (voir la proposition ci-dessous).

Proposition 2.21. *Pour tout* $A \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^N)$*,*

$$|\!|\!| e^A |\!|\!|_\star \leqslant e^{|\!|\!| A |\!|\!|_\star} .$$

Démonstration. On remarque que $|\!|\!| A^n |\!|\!|_\star \leqslant |\!|\!| A |\!|\!|_\star^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc

$$|\!|\!| \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!} A^n |\!|\!|_\star \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!} |\!|\!| A |\!|\!|_\star^n = e^{|\!|\!| A |\!|\!|_\star} ,$$

ce qui termine la démonstration. □

Proposition 2.22. *Soit* $A \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^N)$*. L'application* $\mathcal{R} : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{tA} \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^N)$ *est analytique, et il s'agit de l'unique solution de*

$$\begin{cases} \mathcal{R}' = A \circ \mathcal{R} , \\ \mathcal{R}(0) = Id_N . \end{cases} \tag{2.24}$$

Démonstration. Nous avons pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{R}(t) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{t^n}{n!} A^n .$$

Il s'agit donc d'une série entière (à valeurs dans $\mathscr{L}(\mathbb{K}^N)$) dont le rayon de convergence est infini. L'application $\mathcal{R}$ est donc analytique, et d'après la règle de dérivation des séries entières,

$$\mathcal{R}'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n t^{n-1}}{n!} A^n = A \circ \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{t^n}{n!} A^n \right) = A \circ \mathcal{R}(t) .$$

De plus, nous avons clairement $\mathcal{R}(0) = Id_N$, et donc $\mathcal{R}(t)$ est l'unique solution de (2.24) d'après le Théorème 2.1. □

Proposition 2.23. *Soient* $A, B \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^N)$*,* $s, t \in \mathbb{R}$*, et* $\lambda \in \mathbb{K}$*.*

(i) Si A *et* B *commutent, alors* e^A *et* B *commutent, ainsi que* e^A *et* e^B*. De plus,*

$$e^{A+B} = e^A \circ e^B = e^B \circ e^A .$$

(ii) On a

$$e^{(s+t)A} = e^{sA} \circ e^{tA} .$$

(iii) e^A *est inversible, d'inverse* e^{-A}*.*

(iv) $e^{\lambda Id_N} = e^\lambda Id_N$*, et*

$$e^A = e^\lambda e^{A - \lambda Id_N} .$$

(v) $\det(e^A) = e^{\operatorname{tr}(A)}$*.*

Démonstration. *(i).* Posons $S_1(t) = e^{tA} \circ B$ et $S_2(t) = B \circ e^{tA}$. Alors S_1 et S_2 sont dérivables et d'après la Proposition 2.22,

$$S_1'(t) = A \circ e^{tA} \circ B = A \circ S_1(t) \quad \text{et} \quad S_2'(t) = B \circ A \circ e^{tA} = A \circ B \circ e^{tA} = A \circ S_2(t)\,.$$

De plus $S_1(0) = S_2(0) = B$. D'après le Théorème 2.1 nous avons donc $S_1 = S_2$, en particulier $S_1(1) = S_2(1)$ qui est le résultat annoncé.

Pour montrer la seconde identité, on considère les applications $\bar{S}_1(t) = e^{t(A+B)}$ et $\bar{S}_2(t) = e^{tA} \circ e^{tB}$, on procède comme ci-dessus. Les détails sont laissés en exercice.

(ii). Puisque sA et tA commutent, l'identité est un cas particuliers de *(i)*.

(iii). Puisque A et $-A$ commutent, d'après *(ii)*, nous avons $e^A \circ e^{-A} = e^{-A} \circ e^A = e^0 = Id_N$, d'où la conclusion.

(iv). Nous avons

$$e^{\lambda Id_N} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!}(\lambda Id_N)^n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\lambda^n}{n!}\, Id_N = e^{\lambda} Id_N\,.$$

De plus, puisque λId_N et $(A - \lambda Id_N)$ commutent, d'après *(ii)*, nous avons

$$e^A = e^{\lambda Id_N + (A-\lambda Id_N)} = e^{\lambda Id_N} \circ e^{A-\lambda Id_N} = e^{\lambda} e^{A-\lambda Id_N}\,.$$

(v). Exercice (Indication : utiliser la Proposition 2.13). □

Exercice 5. Soient $A \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^N)$, et $V \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^N)$ inversible. Montrer que

$$e^{V\circ A\circ V^{-1}} = V \circ e^A \circ V^{-1}\,.$$

La démonstration de la proposition suivante est laissée en exercice.

Proposition 2.24. *Soient $A \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^N)$ et $x \in \mathbb{K}^N$. La série de terme général $\frac{1}{n!}A^n x$ converge normalement dans $\mathbb{K}^N$, et*

$$e^A x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!} A^n x\,.$$

De plus, si x est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$, alors x est un vecteur propre de e^A associé à la valeur propre e^{λ}.

Définition 2.25. On dit qu'un sous-espace vectoriel E de $\mathbb{K}^N$ est *stable* par $A \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^N)$ si $Ax \in E$ pour tout $x \in E$.

Proposition 2.26. *Soient $A \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^N)$ et E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^N$ stable par A. Alors E est stable par e^A.*

Démonstration. Soit $x \in E$, si bien que $Ax \in E$. Par récurrence, on obtient alors que $A^n x \in E$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En particulier, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$x_N := \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} A^n x \in E\,.$$

D'après la Proposition 2.24, on a $x_N \to e^A x$ quand $N \to \infty$. Puisque E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^N$, E est un fermé de $\mathbb{K}^N$, et donc $e^A x \in E$. □

Remarque 17 (Exponentielle d'une matrice). Si l'on identifie $A \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^N)$ à sa représentation matricielle dans $\mathscr{M}_{N\times N}(\mathbb{K})$ (dans la base canonique), la série de matrice

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!} A^n$$

converge normalement dans $\mathscr{M}_{N\times N}(\mathbb{K})$, et la matrice obtenue est égale à la représentation matricielle de e^A, et on l'identifie également à e^A. Par cette identification, les résultats obtenus ci-dessus se transpose littéralement aux cas des matrices. Nous avons toutefois les propriétés suivantes comme conséquence de la Proposition 2.26 :

(i) Si A est diagonale, c'est à dire $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$, alors e^A est diagonale et $e^A = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_N})$;

(ii) Si A est triangulaire supérieure (respectivement inférieure), et λ_i est son i-ième coefficient sur la diagonale, alors e^A est triangulaire supérieure (respectivement inférieure), et e^{λ_i} est son i-ième coefficient sur la diagonale.

2.5.2 Quelques rappels d'algèbre linéaire

Définition 2.27. Soit $A \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^N)$. On apelle *polynôme caractéristique* de A le polynôme en $\lambda \in \mathbb{K}$ défini par

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda Id_N)\,.$$

Les racines de ce polynôme sont les *valeurs propres* de A.

Lemme 2.28. *Soit $A \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^N)$. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les racines distinctes de P_A, et $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{N}$ leur multiplicité respective. Le polynôme P_A se factorise alors de la façon suivante*

$$P_A(\lambda) = (-1)^N \prod_{j=1}^{p} (\lambda - \lambda_j)^{\alpha_j}\,,$$

et

$$\sum_{j=1}^{p} \alpha_j = N\,.$$

Définition 2.29. Soit $A \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^N)$. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les racines distinctes de P_A, et $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{N}^*$ leur multiplicité respective. On appelle *sous-espace caractéristique* de A associé à la valeur propre λ_j, le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^N$ défini par

$$E_j = \mathrm{Ker}\,(A - \lambda_j Id_N)^{\alpha_j}\,.$$

Remarque 18. Attention, il ne faut pas confondre le sous-espace caractéristique E_j avec le sous-espace propre de A associé à λ_j, qui lui est défini comme étant le noyau de l'endomorphisme $A - \lambda_j Id_N$.

Définition 2.30. Soient $A \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^N)$, et $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les racines distinctes de P_A. Le *polynôme minimal* de A, noté $Q_A(\lambda)$, est le polynôme en $\lambda \in \mathbb{C}$ de la forme

$$Q_A(\lambda) = \prod_{j=1}^{p} (\lambda - \lambda_j)^{\beta_j}\,,$$

de degré minimal tel que

$$\prod_{j=1}^{p}(A-\lambda_j Id_N)^{\beta_j}=0\,.$$

Proposition 2.31. *Suivant les notations ci-dessus,*

(i) α_j *est égal à la dimension de* E_j *;*

(ii) $\beta_j \leqslant \alpha_j$ *pour* $j=1,\dots,p$ *;*

(iii) $E_j=\operatorname{Ker}(A-\lambda_j Id_N)^{\beta_j}$ *pour* $j=1,\dots,p$ *;*

(iv) $\mathbb{C}^N$ *est la somme direct des sous-espaces caractéristiques de A, ce que l'on note*

$$\mathbb{C}^N=\bigoplus_{j=1}^{p}E_j\,;$$

(v) A est diagonalisable si et seulement si $\beta_j=1$ *pour* $j=1,\dots,p$ *;*

(vi) E_j *est stable par A pour* $j=1,\dots,p$.

2.5.3 Solution générale du système homogène

Théorème 2.32. *Soient* $A\in\mathscr{L}(\mathbb{K}^N)$, $x_0\in\mathbb{K}^N$ *et* $t_0\in\mathbb{R}$. *La solution du problème de Cauchy*

$$\begin{cases} u'=Au\,,\\ u(t_0)=x_0\,,\end{cases}$$

est donnée par

$$u(t)=e^{(t-t_0)A}x_0\,.$$

Remarque 19. La résolvante de l'équation homogène $u'=Au$ est donnée par

$$R(t,t_0)=e^{(t-t_0)A}\,.$$

Théorème 2.33. *Soient* $A\in\mathscr{L}(\mathbb{C}^N)$, $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ *les racines distinctes de* P_A, *et* $E_1,\dots,E_p$ *leurs sous-espaces caractéristiques respectifs. Soit* Q_A *le polynôme minimal de A,*

$$Q_A(\lambda)=\prod_{j=1}^{p}(\lambda-\lambda_j)^{\beta_j}\,.$$

Les solutions de l'équation homogène

$$u'=Au\,, \tag{2.25}$$

sont toutes de la forme

$$u(t)=\sum_{j=1}^{p}e^{\lambda_j t}P_j(t)\,, \tag{2.26}$$

où P_j *est un polynôme de degré inférieur ou égal à* β_j-1, *à coefficients dans* E_j.

Remarque 20. Attention, toutes les fonctions de la forme (2.26) ne sont pas solution de l'équation homogène, à moins que A ne soit diagonalisable et les P_j sont alors des constantes arbitraires.

Remarque 21. On peut remplacer dans l'énoncé du Théorème 2.33 *"P_j est un polynôme de degrè inférieur ou égal à $\beta_j - 1$"* par *"P_j est un polynôme de degré inférieur ou égal à $\alpha_j - 1$"* où α_j est la dimension de E_j. Il s'agit toutefois d'un énoncé plus faible.

Remarque 22. Si $A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^N)$ n'a que des valeurs propres réelles, le Théorème 2.33 reste valide pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Par contre, lorsque les valeurs propres de A ne sont pas toutes réelles, il est nécéssaire de se placer dans $\mathbb{C}$. Les solutions réelles sont alors obtenues à partir des parties réelles et imaginaires des solutions complexes, voir l'Example 2 ci-dessous.

Démonstration du Théorème 2.33. Soit u une solution de (2.25). En notant $u_0 := u(0)$, nous savons que $u(t) = e^{tA}u_0$. D'après la Proposition 2.31 *(iv)*, nous avons

$$u_0 = \sum_{j=1}^{p} v_j \quad \text{avec } v_j \in E_j \, .$$

En conséquence,

$$u(t) = \sum_{j=1}^{p} e^{tA} v_j \, .$$

Or pour $j = 1, \dots, p$, d'après la Proposition 2.23 *(iv)*,

$$e^{tA} v_j = e^{\lambda_j t} e^{t(A - \lambda_j Id_N)} v_j \, ,$$

et la Proposition 2.24 nous donne

$$e^{t(A - \lambda_j Id_N)} v_j = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{t^n}{n!} (A - \lambda_j Id_N)^n v_j \, .$$

Mais puisque $v_j \in E_j$, nous avons $(A - \lambda_j Id_N)^n v_j = 0$ pour tout $n \geqslant \beta_j$ d'après la Proposition 2.23 *(iii)*. Et donc

$$e^{t(A - \lambda_j Id_N)} v_j = \sum_{n=0}^{\beta_j - 1} \frac{t^n}{n!} (A - \lambda_j Id_N)^n v_j \in E_j \, ,$$

puisque $v_j \in E_j$ et E_j est stable par A. On pose alors pour $j = 1, \dots, p$,

$$P_j(t) = \sum_{n=0}^{\beta_j - 1} \frac{t^n}{n!} (A - \lambda_j Id_N)^n v_j \, ,$$

et nous obtenons

$$u(t) = \sum_{j=1}^{p} e^{\lambda_j t} P_j(t) \, ,$$

d'où le résultat. □

En conséquence, lorsque A est diagonalisable, nous obtenons le résultat suivant.

Corollaire 2.34. *Soient $A \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^N)$ diagonalisable, et $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ ses valeurs propres. Toute solution de l'équation homogène $u' = Au$ est de la forme*

$$u(t) = \sum_{j=1}^{N} c_j e^{\lambda_j t} v_j \, ,$$

où $(v_1, \dots, v_N)$ est une base de vecteurs propres associée, et les $c_j \in \mathbb{K}$ désignent des constantes arbitraires.

Exercice 6. Soient $A \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^N)$ diagonalisable, $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ ses valeurs propres, et $(v_1, \dots, v_N)$ une base de vecteurs propres associée. On note V la matrice (dite *de passage*) formée des vecteurs colonnes $v_1, \dots, v_N$. On considère l'équation homogène $u' = Au$.

1) Montrer que la représentation matricielle de la résolvante $R(t, 0)$ dans la base $(v_1, \dots, v_N)$ est donnée par la matrice diagonale $\operatorname{diag}(e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_N})$.
2) En déduire que la représentation matricielle de $R(t, t_0)$ dans la base canonique est donnée par
$$V \operatorname{diag}\big(e^{(t-t_0)\lambda_1}, \dots, e^{(t-t_0)\lambda_N}\big) V^{-1} .$$
3) Retrouver cette formule à partir de l'Exercice 4.

Exemple 1. On considère le système homogène suivant posé dans $\mathbb{C}^3$:
$$u' = Au \quad \text{avec } A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} .$$
Le polynôme caractéristique P_A de A est donné par
$$P_A(\lambda) = -(\lambda + 1)(\lambda - 1)^2 ,$$
et les valeurs propres sont donc $\lambda_1 = -1$ (simple) et $\lambda_2 = 1$ (double). De plus, on vérifie que le polynôme minimal $Q_A = P_A$, et donc A n'est pas diagonalisable.

On remarque ensuite que e_1 est un vecteur propre associé à λ_1, et donc $E_1 = \langle e_1 \rangle$, et $E_2 = \langle e_2, e_3 \rangle$. Nous savons alors que toute solution $u(t)$ s'écrit sous la forme $u(t) = \alpha e^{-t} e_1 + e^t P(t)$ pour $\alpha \in \mathbb{C}$ et un polynôme $P(t)$ à valeurs dans E_2 de degré au plus 1. Un tel polynôme s'écrit
$$P(t) = (a + bt)e_2 + (c + dt)e_3 ,$$
avec $a, b, c, d \in \mathbb{C}$.

En choisissant $\alpha = 0$, pourque u soit solution nous devons avoir
$$\frac{d}{dt}\big(e^t P(t)\big) = e^t A P(t) ,$$
c'est à dire
$$\begin{aligned} e^t \left((a + b + bt)e_2 + (c + d + dt)e_3\right) &= e^t \left((a + bt)Ae_2 + (c + dt)Ae_3\right) \\ &= e^t \left(-(c + dt)e_2 + (a + 2c + (b + 2d)t)e_3\right) , \end{aligned}$$
ce qui nous donne les relations suivantes sur les coefficients a, b, c et d :
$$\begin{cases} a + b = -c \\ b = -d \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} c + d = a + 2c \\ d = b + 2d \end{cases} .$$
Ainsi nous devons avoir $c = -a - b$ et $d = -b$.

Toute solution u est donc de la forme
$$u(t) = \alpha e^{-t} e_1 + e^t(\beta + \gamma t)e_2 - e^t(\beta + \gamma + \gamma t)e_3 ,$$

avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$.

En choisissant $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = 0$, nous obtenons $u(0) = e_1$. Ensuite, pour $\alpha = 0$, $\beta = 1$ et $\gamma = -1$, nous obtenons $u(0) = e_2$. Enfin, pour $\alpha = \beta = 0$ et $\gamma = -1$ nous obtenons $u(0) = e_3$. La résolvante $R(t,0)$ du système est donc donnée par

$$R(t,0) = e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & (1-t)e^t & -te^t \\ 0 & te^t & (1+t)e^t \end{pmatrix}.$$

Exemple 2. On considère le système homogène suivant posé dans $\mathbb{R}^3$:

$$u' = Au \quad \text{avec } A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique P_A de A est donné par

$$P_A(\lambda) = -(\lambda^3 + 1) = -(\lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda + 1).$$

Les racines de P_A sont $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ et $\lambda_3 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$. Dans $\mathbb{C}^3$, une base de vecteurs propres associée est donnée par

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -e^{i\frac{\pi}{3}} \\ -e^{2i\frac{\pi}{3}} \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -e^{-i\frac{\pi}{3}} \\ -e^{-2i\frac{\pi}{3}} \end{pmatrix}.$$

Dans $\mathbb{C}^3$, toute solution u est donc de la forme

$$u(t) = \alpha e^{-t} v_1 + \beta e^{\frac{t}{2}} e^{i\frac{\sqrt{3}t}{2}} v_2 + \gamma e^{\frac{t}{2}} e^{-i\frac{\sqrt{3}t}{2}} v_3,$$

avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$.

Nous devons maintenant déterminer pour quelles valeurs de $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$, la solution u est à valeurs réelles. Observons que pour $\beta = \gamma = 0$, u est à valeurs réelles si $\alpha \in \mathbb{R}$. Supposons maintenant $\alpha = 0$, et déterminons les β et γ tels que u soit à valeurs réelles. Puisque $v_3 = \bar{v}_2$ (conjugué complexe), on aura

$$\beta e^{i\frac{\sqrt{3}t}{2}} v_2 + \gamma e^{-i\frac{\sqrt{3}t}{2}} v_3 \in \mathbb{R}$$

si (et seulement si) $\gamma = \bar{\beta}$, et alors

$$\beta e^{i\frac{\sqrt{3}t}{2}} v_2 + \gamma e^{-i\frac{\sqrt{3}t}{2}} v_3 = 2\mathrm{Re}\big(\beta e^{i\frac{\sqrt{3}t}{2}} v_2\big).$$

On écrit ensuite $\beta = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. On a alors

$$e^{i\frac{\sqrt{3}t}{2}} v_2 = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\sqrt{3}t}{2}) \\ -\cos(\frac{\sqrt{3}t}{2} + \frac{\pi}{3}) \\ -\cos(\frac{\sqrt{3}t}{2} + \frac{2\pi}{3}) \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \sin(\frac{\sqrt{3}t}{2}) \\ -\sin(\frac{\sqrt{3}t}{2} + \frac{\pi}{3}) \\ -\sin(\frac{\sqrt{3}t}{2} + \frac{2\pi}{3}) \end{pmatrix},$$

et

$$2\mathrm{Re}\big(\beta e^{i\frac{\pi t}{3}} v_2\big) = 2a \begin{pmatrix} \cos(\frac{\sqrt{3}t}{2}) \\ -\cos(\frac{\sqrt{3}t}{2} + \frac{\pi}{3}) \\ -\cos(\frac{\sqrt{3}t}{2} + \frac{2\pi}{3}) \end{pmatrix} - 2b \begin{pmatrix} \sin(\frac{\sqrt{3}t}{2}) \\ -\sin(\frac{\sqrt{3}t}{2} + \frac{\pi}{3}) \\ -\sin(\frac{\sqrt{3}t}{2} + \frac{2\pi}{3}) \end{pmatrix}.$$

En conclusion, nous pouvons maintenant dire que, dans $\mathbb{R}^3$, toutes les solutions sont de la forme

$$u(t) = \mu_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu_2 e^{\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} \cos(\frac{\sqrt{3}t}{2}) \\ -\cos(\frac{\sqrt{3}t}{2} + \frac{\pi}{3}) \\ -\cos(\frac{\sqrt{3}t}{2} + \frac{2\pi}{3}) \end{pmatrix} + \mu_3 e^{\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} \sin(\frac{\sqrt{3}t}{2}) \\ -\sin(\frac{\sqrt{3}t}{2} + \frac{\pi}{3}) \\ -\sin(\frac{\sqrt{3}t}{2} + \frac{2\pi}{3}) \end{pmatrix},$$

avec $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbb{R}$.

2.6 Problèmes

Exercice 7. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose

$$u(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \cos(tx)\, dx\,, \quad v(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \sin(tx)\, dx\,.$$

1) Montrer que les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2) Montrer que le couple (u, v) est solution d'un système différentiel du premier ordre.
3) En déduire les valeurs de $u(t)$ et de $v(t)$. On pourra utiliser $\int_0^{+\infty} e^{-s^2} ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 8. Soit $f :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\int_1^{+\infty} s|f(s)|\, ds < \frac{1}{2}$. On considère l'équation différentielle scalaire suivante :

$$u'' + f(t)u = 0\,. \tag{2.27}$$

Pour trouver une solution particulière de cette équation, nous allons construire par récurrence une suite de fonctions $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante : on pose $u_0(t) = 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in]1, +\infty[$,

$$u_{n+1}(t) = 1 + \int_t^{+\infty} (t-s) u_n(s) f(s)\, ds\,.$$

1) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_t^{+\infty} (t-s)u_n(s)f(s)\, ds$ est absolument convergente, que u_n est bornée, et que u_n est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]1, +\infty[$.
2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in]1, +\infty[$,

$$|u_{n+1}(t) - u_n(t)| \leqslant \left(\int_t^{+\infty} s|f(s)|\, ds \right)^{n+1}.$$

3) En utilisant la question précédante, montrer que la suite $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction u_* bornée telle que

$$u_*(t) = 1 + \int_t^{+\infty} (t-s) u_*(s) f(s)\, ds\,.$$

4) Montrer que la fonction u_* est solution de l'équation (2.27) sur $]1, +\infty[$, et que

$$\lim_{t \to +\infty} u_*(t) = 1\,, \qquad \lim_{t \to +\infty} u_*'(t) = 0\,.$$

Exercice 9. Soit $A : \mathbb{R} \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^N)$ une application continue et périodique de période 2π (c'est à dire que $A(t + 2\pi) = A(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$). On considère l'équation différentielle $u' = A(t)u$. On note $R(t, t_0)$ la résolvante de cette équation. Montrer qu'il existe une solution non nulle 2π-périodique de cette équation si et seulement si 1 est une valeur propre de $R(t_0 + 2\pi, t_0)$ (*Indication :* on pourra montrer que $R(t + 2\pi, t_0 + 2\pi) = R(t, t_0)$).

Chapitre 3

Équations différentielles ordinaires non linéaires

3.1 Les fonctions Lipschitziennes

Nous commençons par introduire une notion continuité *Lipschitz* dont nous aurons besoin par la suite. Dans la suite, on notera (t, x) les éléments de $\mathbb{R} \times \mathbb{K}^N$.

Définition 3.1. Soient $\mathscr{O}$ une partie de $\mathbb{R} \times \mathbb{K}^N$, $A \subset \mathscr{O}$, et $f : \mathscr{O} \to \mathbb{K}^N$ une application. On dit que f *est Lipschitzienne par rapport à x sur A* si

$$\left\|f(t,x) - f(t,y)\right\|_\star \leqslant C_A \|x-y\|_\star \qquad \forall\,(t,x),(t,y) \in A\,, \tag{3.1}$$

pour une certaine constante C_A positive.

Définition 3.2. Soient $\mathscr{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}\times\mathbb{K}^N$, et $f : \mathscr{O} \to \mathbb{K}^N$ une application. On dit que f *est localement Lipschitzienne par rapport à x sur $\mathscr{O}$* si pour tout $(t_0, x_0) \in \mathcal{O}$, il existe un voisinage $\mathscr{V}_{(t_0,x_0)}$ de (t_0, x_0) dans $\mathscr{O}$ tel que f soit Lipschitzienne par rapport à x sur $\mathscr{V}_{(t_0,x_0)}$.

Remarque 23. Si $f : \mathscr{O} \to \mathbb{K}^N$ est Lipschitzienne par rapport à x sur $\mathscr{O}$ alors f est localement Lipschitzienne par rapport à x sur $\mathscr{O}$, mais la réciproque est fausse.

Proposition 3.3. *Soient $\mathscr{O}$ un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{K}^N$, et $f : \mathscr{O} \to \mathbb{K}^N$ une application continue. Alors f est localement Lipschitzienne par rapport à x sur $\mathscr{O}$ si et seulement si f est Lipschitzienne par rapport à x sur tout compact inclus dans $\mathscr{O}$.*

Démonstration. Pour $(t, x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{K}^N$ et $\varepsilon > 0$, nous noterons $B_\varepsilon(x)$ la boule ouverte de $\mathbb{K}^N$ centrée en x et de rayon ε (pour la norme $\|\cdot\|_\star$), et

$$\mathcal{C}_\varepsilon(t,x) := \,]t-\varepsilon, t+\varepsilon[\, \times B_\varepsilon(x)$$

qui est un voisinage ouvert de (t, x) dans $\mathbb{R} \times \mathbb{K}^N$.

Étape 1. Supposons tout d'abord que f soit localement Lipshitz par apport à x. Soit K un compact arbitraire de $\mathbb{R} \times \mathbb{K}^N$ inclus dans $\mathscr{O}$. Pour chaque $(t_0, x_0) \in K$, il existe $\varepsilon_{(t_0,x_0)} > 0$ tel que f soit Lipschitz par rapport à x sur $\mathscr{O} \cap \mathcal{C}_{\varepsilon_{(t_0,x_0)}}(t_0, x_0)$. Puisque

$$K \subset \bigcup_{(t_0,x_0)\in K} \left(\mathscr{O} \cap \mathcal{C}_{\frac{1}{2}\varepsilon_{(t_0,x_0)}}(t_0,x_0)\right),$$

et K est compact, on peut trouver une famille finie de paires $(t_1, x_1), \dots, (t_M, x_M) \in K$ telle que

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{M} \left(\mathscr{O} \cap \mathcal{C}_{\frac{1}{2}\varepsilon_j}(t_j, x_j)\right), \tag{3.2}$$

où $\varepsilon_j := \varepsilon_{(t_j, x_j)}$. Pour chaque $j = 1, \dots, M$, il existe une constante positive C_j telle que

$$\big\|f(t,x) - f(t,y)\big\|_\star \leqslant C_j \|x-y\|_\star \qquad \forall\,(t,x),(t,y) \in \mathscr{O} \cap \mathcal{C}_{\varepsilon_j}(t_j, x_j)\,.$$

On considère maintenant $\varepsilon_* := \min_j \varepsilon_j$, $C_* := \max_j C_j$, et on définit l'ensemble

$$\mathcal{G}_K := \left\{(t,x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{K}^N \times \mathbb{K}^N : (t,x),(t,y) \in K \text{ et } \|x-y\|_\star \geqslant \frac{\varepsilon_*}{2}\right\}\,.$$

On vérifie simplement que (puisque K est compact) $\mathcal{G}_K$ est un compact de $\mathbb{R} \times \mathbb{K}^N \times \mathbb{K}^N$ (exercice). La fonction $g : \mathcal{G}_K \to [0, \infty)$ définie par

$$g(t,x,y) := \frac{\big\|f(t,x) - f(t,y)\big\|_\star}{\|x-y\|_\star}\,,$$

est continue comme composée d'applications continues. Comme $\mathcal{G}_K$ est compact, la fonction g est bornée et on note C^* son maximum.

Nous allons maintenant montrer que

$$\big\|f(t,x) - f(t,y)\big\|_\star \leqslant C_K \|x-y\|_\star \qquad \forall\,(t,x),(t,y) \in K\,,$$

avec $C_K := \max(C_*, C^*)$. Soient $(t,x),(t,y) \in K$ arbitraires. D'après (3.2), on peut trouver $j_0 \in \{1, \dots, M\}$ tel que $(t,x) \in \mathscr{O} \cap \mathcal{C}_{\frac{1}{2}\varepsilon_{j_0}}(t_{j_0}, x_{j_0})$. En particulier, nous avons $\|x - x_{j_0}\|_\star < \frac{\varepsilon_{j_0}}{2}$. On distingue alors deux cas :

a) Si $\|y - x_{j_0}\|_\star < \varepsilon_{j_0}$ alors $(t,y) \in \mathscr{O} \cap \mathcal{C}_{\varepsilon_{j_0}}(t_{j_0}, x_{j_0})$ et donc

$$\big\|f(t,x) - f(t,y)\big\|_\star \leqslant C_{j_0} \|x-y\|_\star \leqslant C_K \|x-y\|_\star\,.$$

b) Si $\|y - x_{j_0}\|_\star \geqslant \varepsilon_{j_0}$ alors $\|x-y\|_\star \geqslant \|y - x_{j_0}\|_\star - \|x - x_{j_0}\|_\star \geqslant \frac{\varepsilon_{j_0}}{2} \geqslant \frac{\varepsilon_*}{2}$. Donc $(t,x,y) \in \mathcal{G}_K$, et nous avons

$$\big\|f(t,x) - f(t,y)\big\|_\star = g(t,x,y)\|x-y\|_\star \leqslant C^* \|x-y\|_\star \leqslant C_K \|x-y\|_\star\,,$$

ce qui termine cette première implication.

Étape 2. Montrons maintenant l'implication inverse. Soient $(t_0, x_0) \in \mathscr{O}$, et $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\mathcal{C}_{3\varepsilon_0}(t_0, x_0) \subset \mathscr{O}$. Puisque $K := \overline{\mathcal{C}_{2\varepsilon_0}(t_0, x_0)}$ est un compact inclus dans $\mathscr{O}$, f est Lipschitz en x sur K. On choisit alors $\mathscr{V}_{(t_0,x_0)} = \mathcal{C}_{\varepsilon_0}(t_0, x_0)$. □

Pour vérifier le caractère Lipschitz ou localement Lipschitz par rapport à x d'une application donnée f, on pourra utiliser les résultats suivants. La démonstration du Corollaire 3.4 est laissée en exercice.

Corollaire 3.4. *Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $\mathscr{U}$ un ouvert de $\mathbb{K}^N$, et $f : I \times \mathscr{U} \to \mathbb{K}^N$ une application. Si il existe une fonction continue $k : I \to \mathbb{R}_+$ telle que pour tout $t \in I$,*

$$\|f(t,x) - f(t,y)\|_\star \leqslant k(t)\|x-y\|_\star \qquad \forall\, x, y \in \mathscr{U}\,,$$

alors f est localement Lipschitzienne par rapport à x sur $I \times \mathscr{U}$. Si de plus, la fonction k est supposée bornée, alors f est Lipschitzienne par rapport à x sur $I \times \mathscr{U}$.

Insistons sur le fait que le corollaire suivant est très utile en pratique.

Corollaire 3.5. *Soient $\mathscr{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}\times\mathbb{K}^N$, et $f:\mathscr{O}\to\mathbb{K}^N$ une application continue. Si f est différentiable par rapport x sur $\mathscr{O}$, et que sa différentielle par rapport à x, notée $D_xf:\mathscr{O}\to\mathscr{L}(\mathbb{K}^N)$, est continue, alors f est localement Lipschitzienne par rapport à x sur $\mathscr{O}$. Si de plus, $\mathscr{O}=I\times\mathscr{U}$ pour un intervalle ouvert $I\subset\mathbb{R}$ et un ouvert convexe $\mathscr{U}$ de $\mathbb{K}^N$, et que la fonction $(t,x)\in I\times\mathscr{U}\mapsto |\!|\!|Df(t,x)|\!|\!|_\star$ est bornée, alors f est Lipschitzienne par rapport à x sur $I\times\mathscr{U}$.*

Démonstration. Étape 1. Soit $(t_0,x_0)\in\mathscr{O}$. Puisque $\mathscr{O}$ est ouvert, il existe $\varepsilon>0$ tel que

$$]t_0-2\varepsilon,t_0+2\varepsilon[\times B_{2\varepsilon}(x_0)\subset\mathscr{O}\,,$$

où $B_{2\varepsilon}(x_0)$ est la boule ouverte centrée en x_0 de rayon 2ε pour la norme $\|\cdot\|_\star$. On pose alors

$$\mathscr{V}_{(t_0,x_0)}:=]t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon[\times B_\varepsilon(x_0)\,,$$

si bien que $\overline{\mathscr{V}_{(t_0,x_0)}}$ est un compact inclus dans $\mathscr{O}$. Puisque Df est continue sur $\mathscr{O}$, il existe donc une constante M telle que $|\!|\!|D_xf(t,x)|\!|\!|_\star\leqslant M$ pour tout $(t,x)\in\overline{\mathscr{V}_{(t_0,x_0)}}$.

Nous allons montrer maintenant que f est Lipschitzienne par rapport à x sur $\mathscr{V}_{(t_0,x_0)}$, et plus précisemment que

$$\big\|f(t,x)-f(t,y)\big\|_\star\leqslant M\|x-y\|_\star\qquad\forall\,(t,x),(t,y)\in\mathscr{V}_{(t_0,x_0)}\,.$$

On se donne donc $x,y\in B_\varepsilon(x_0)$ et $t\in]t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon[$ arbitraires. Si $x=y$ l'inégalité ci-dessus est triviale, et l'on peut donc supposer que $x\neq y$. On pose alors

$$\nu:=\frac{x-y}{\|x-y\|_\star}\,.$$

La boule $B_\varepsilon(x_0)$ étant convexe, nous avons $y+\lambda\nu\in B_\varepsilon(x_0)$ pour tout $\lambda\in J:=[0,\|x-y\|_\star]$. La fonction $g:J\to\mathbb{K}^N$ définie par $g(\lambda):=f(t,y+\lambda\nu)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur J comme composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, et $g'(\lambda)=D_xf(t,y+\lambda\nu)\nu$. En conséquence,

$$\|g'(\lambda)\|_\star\leqslant|\!|\!|D_xf(t,y+\lambda\nu)|\!|\!|_\star\|\nu\|_\star\leqslant M\qquad\forall\lambda\in J\,.$$

On en déduit alors de l'inégalité des accroissements finis que

$$\big\|f(t,x)-f(t,y)\big\|_\star=\|g(\|x-y\|_\star)-g(0)\|_\star\leqslant M\|x-y\|_\star\,,$$

ce qui termine cette première étape.

Étape 2. Supposons maintenant que $\mathscr{O}=I\times\mathscr{U}$ avec $\mathscr{U}$ ouvert convexe, et que $|\!|\!|D_xf(t,x)|\!|\!|_\star\leqslant M$ pour tout $(t,x)\in I\times\mathscr{U}$, pour une certaine constante M. On se fixe $t\in I$ et $x,y\in\mathscr{U}$ avec $x\neq y$. En utilisant les notations de l'étape 1, nous avons $y+\lambda\nu\in\mathscr{U}$ puisque $\mathscr{U}$ est convexe. On peut alors procéder comme dans l'étape 1 pour obtenir $\|f(t,x)-f(t,y)\|_\star\leqslant M\|x-y\|_\star$. □

Remarque 24. Si $f:\mathscr{O}\to\mathbb{K}^N$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{O}$, alors les hypothèses du Corollaire 3.5 sont vérifiées, et donc f est localement Lipschitzienne par rapport à x sur $\mathscr{O}$.

3.2 Solutions locales, Théorème de Cauchy-Lipschitz

Théorème 3.6 (Cauchy-Lipschitz)**.** *Soient $\mathscr{O}$ un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{K}^N$ et $f : \mathscr{O} \to \mathbb{K}^N$ une application continue localement Lipschitzienne par rapport à x. Pour chaque $(t_0, x_0) \in \mathscr{O}$, il existe un intervalle $J \subset \mathbb{R}$ contenant t_0 dans son intérieur tel que le système différentiel*

$$\begin{cases} u' = f(t,u) \\ u(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{3.3}$$

admette une unique solution sur J.

Comme dans le cas linéaire, la démonstration se base sur la formulation intégrale de l'équation. La démonstration du lemme suivant est identique à celle du Lemme 2.2 dans le cas linéaire, et elle est laissée en exercice.

Lemme 3.7. *Soient $J \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $\mathscr{O}$ un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{K}^N$, et $f : \mathscr{O} \to \mathbb{K}^N$ une application continue. Soit $u : J \to \mathbb{K}^N$ une fonction continue telle que $(t, u(t)) \in \mathscr{O}$ pour tout $t \in J$, et soient $t_0 \in J$ et $(t_0, x_0) \in \mathscr{O}$. Alors u est une solution de* (3.3) *sur J si et seulement si u vérifie*

$$u(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, ds \qquad \forall\, t \in J\,. \tag{3.4}$$

Démonstration du Théorème 3.6, Existence. Pour montrer l'existence d'une solution, d'après le lemme ci-dessus, il suffit de construire un intervalle J contenant t_0 dans son intérieur et une fonction u définie sur J vérifiant (3.4). Comme dans le cas linéaire, nous allons appliquer la méthode de point fixe.

Étape 1. Nous allons montrer qu'il existe un intervalle $J := [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ avec $\varepsilon > 0$ sur lequel on peut construire une suite de fonctions $u_n : J \to \mathbb{K}^N$ vérifiant pour chaque $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} (t, u_n(t)) \in \mathscr{O} \qquad \forall\, t \in J\,, \\ u_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u_n(s))\, ds \qquad \forall\, t \in J\,. \end{cases} \tag{3.5}$$

Par continuité de f, il existe un voisinage de (t_0, x_0) sur lequel f est bornée. En d'autres termes, il existe $\alpha > 0$, $\beta > 0$, et $M > 0$ tels que, si l'on pose

$$\mathcal{C}_{\alpha,\beta} := \{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{K}^N : |t - t_0| \leqslant \alpha\,,\ \|x - x_0\|_\star \leqslant \beta\}\,,$$

alors $\mathcal{C}_{\alpha,\beta} \subset \mathscr{O}$, et

$$\|f(t,x)\|_\star \leqslant M \qquad \forall (t,x) \in \mathcal{C}_{\alpha,\beta}\,.$$

Mais puisque f est localement Lipschitzienne par rapport à x et que $\mathcal{C}_{\alpha,\beta}$ est un compact de $\mathscr{O}$, d'après la Proposiiton 3.3 il existe une constante positive $C_{\mathcal{C}_{\alpha,\beta}}$ telle que

$$\|f(t,x) - f(t,y)\|_\star \leqslant C_{\mathcal{C}_{\alpha,\beta}} \|x - y\|_\star \qquad \forall (t,x), (t,y) \in \mathcal{C}_{\alpha,\beta}\,.$$

On pose alors

$$\varepsilon := \min\left(\alpha, \frac{\beta}{M}\right)\,.$$

On commence par définir $u_0(t) = x_0$ pour tout $t \in J$. Nous allons montrer par récurrence que la suite $\{u_n\}$ définie par (3.5) est bien définie. Plus précisement, nous allons montrer que si $u_n : J \to \mathbb{K}^N$ est continue et vérifie $(t, u_n(t)) \in \mathcal{C}_{\alpha,\beta}$ pour tout $t \in J$, alors il en est de même pour u_{n+1}. Etant donnée une telle fonction u_n, on vérifie simplement que u_{n+1} est continue (exercice). De plus, nous avons pour tout $t \in J$,

$$\begin{aligned}\|u_{n+1}(t) - x_0\|_\star &= \left\| \int_{t_0}^t f(s, u_n(s))\, ds \right\|_\star \\ &\qquad\qquad \leqslant \int_{t_0}^t \|f(s, u_n(s))\|_\star\, ds \leqslant M|t - t_0| \leqslant M\varepsilon \leqslant \beta\,,\end{aligned}$$

et bien sur $|t - t_0| \leqslant \varepsilon \leqslant \alpha$. Donc $(t, u_{n+1}(t)) \in \mathcal{C}_{\alpha,\beta}$ pour tout $t \in J$.

Étape 2. La suite $\{u_n\}$ étant maintenant bien définie, on considère la suite $\{v_n\}$ donnée par $v_n := u_{n+1} - u_n$. Puisque $(t, u_n(t)) \in \mathcal{C}_{\alpha,\beta}$ pour tout $t \in J$ et tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons pour tout $t \in J$ et tout $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}\|v_n(t)\|_\star &= \left\| \int_{t_0}^t f(s, u_n(s)) - f(s, u_{n-1}(s))\, ds \right\|_\star \\ &\leqslant \int_{t_0}^t \|f(s, u_n(s)) - f(s, u_{n-1}(s))\|_\star\, ds \\ &\leqslant C_{\mathcal{C}_{\alpha,\beta}} \int_{t_0}^t \|u_n(s) - u_{n-1}(s)\|_\star\, ds = C_{\mathcal{C}_{\alpha,\beta}} \int_{t_0}^t \|v_{n-1}(s)\|_\star\, ds\,,\end{aligned}$$

et pour $n = 0$,

$$\|v_0(t)\|_\star = \left\| \int_{t_0}^t f(s, u_1(s))\, ds \right\|_\star \leqslant \int_{t_0}^t \|f(s, u_1(s))\|_\star\, ds \leqslant M|t - t_0|\,.$$

Pa récurrence sur l'entier n, on montre alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|v_n(t)\|_\star \leqslant M \frac{(C_{\mathcal{C}_{\alpha,\beta}})^n |t - t_0|^{n+1}}{(n+1)!} \qquad \forall\, t \in J\,.$$

En particulier, nous obtenons

$$\|v_n\|_\infty \leqslant M \frac{(C_{\mathcal{C}_{\alpha,\beta}})^n \varepsilon^{n+1}}{(n+1)!}\,,$$

D'où

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|v_n\|_\infty \leqslant M \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(C_{\mathcal{C}_{\alpha,\beta}})^n \varepsilon^{n+1}}{(n+1)!} < +\infty\,.$$

La série $\sum_n v_n$ est donc normalement convergente dans $\mathscr{C}^0(J; \mathbb{K}^N)$, et les sommes partielles

$$\sum_{n=0}^N v_n = u_{N+1} - u_0$$

convergent donc uniformément sur J. La suite $\{u_n\}$ converge donc uniformément sur J vers une fonction continue $u : J \to \mathbb{K}^N$. De plus, puisque $\mathcal{C}_{\alpha,\beta}$ est fermé, nous avons pour tout $t \in J$,

$$(t, u(t)) = \lim_{n\to\infty} (t, u_n(t)) \in \mathcal{C}_{\alpha,\beta}\,.$$

En particulier,

$$\|f(t,u_n(t)) - f(t,u(t))\|_\star \leqslant C_{\mathcal{C}_{\alpha,\beta}} \|u_n(t) - u(t)\|_\star \qquad \forall\, t \in J\,,$$

et donc la suite de fonctions $t \in J \mapsto f(t,u_n(t))$ converge uniformément vers la fonction $t \in J \mapsto f(t,u(t))$. Ceci implique que

$$\lim_{n\to\infty} x_0 + \int_{t_0}^t f(s,u_n(s))\,ds = x_0 + \int_{t_0}^t f(s,u(s))\,ds \qquad \forall\, t \in J\,.$$

En passant à la limite $n \to \infty$ dans (3.5), on obtient

$$u(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s,u(s))\,ds \qquad \forall\, t \in J\,,$$

et donc u est solution du problème de Cauchy sur J d'après le Lemme 3.7. □

Pour montrer l'unicité, nous allons utiliser le très important *Lemme de Gronwall*.

Lemme 3.8 (Gronwall, version différentielle)**.** *Soient $L, b \in \mathbb{R}$ avec $L \neq 0$, $T > 0$, et soit $w : [0,T] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable sur $]0,T[$, et vérifiant*

$$w'(t) \leqslant Lw(t) + b \qquad \forall\, t \in]0,T[\;.$$

Alors,

$$w(t) + \frac{b}{L} \leqslant \left(w(0) + \frac{b}{L}\right) e^{Lt} \qquad \forall\, t \in [0,T]\,. \tag{3.6}$$

Démonstration. On définit $\zeta : [0,T] \to \mathbb{R}$ par $\zeta(t) = w(t)e^{-Lt}$. La fonction ζ est continue et dérivable sur $]0,T[$, et

$$\zeta'(t) = w'(t)e^{-Lt} - Lw(t)e^{-Lt} \qquad \forall\, t \in]0,T[\;.$$

On a donc

$$\zeta'(t) \leqslant be^{-Lt} \qquad \forall\, t \in]0,T[\;,$$

et en intégrant cette inégalité entre 0 et t, on obtient

$$\zeta(t) \leqslant \zeta(0) + \frac{b}{L}\big(1 - e^{-Lt}\big) \qquad \forall\, t \in [0,T]\,.$$

En multipliant cette dernière inégalité par e^{Lt}, on obtient (3.6). □

Le Lemme de Gronwall peut se formuler également sous forme intégrale comme dans l'énoncé ci-dessous.

Lemme 3.9 (Gronwall, version intégrale)**.** *Soient $L, b \in \mathbb{R}$ avec $L > 0$, $T > 0$, et soit $w : [0,T] \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant*

$$w(t) \leqslant w(0) + \int_0^t \big(Lw(s) + b\big)\,ds \qquad \forall\, t \in [0,T]\,. \tag{3.7}$$

Alors,

$$w(t) + \frac{b}{L} \leqslant \left(w(0) + \frac{b}{L}\right) e^{Lt} \qquad \forall\, t \in [0,T]\,. \tag{3.8}$$

Démonstration. On définit $v : [0,T] \to \mathbb{R}$ par

$$v(t) = (w(0) + \frac{b}{L})e^{-Lt} + e^{-Lt} \int_0^t \big(Lw(s) + b\big)\, dt\,.$$

Alors v est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,T]$ et

$$v'(t) = Le^{-Lt} \left(w(t) - w(0) - \int_0^t \big(Lw(s) + b\big)\, ds \right) \leqslant 0\,.$$

Donc v est décroissante, d'où $v(t) \leqslant v(0)$ pour tout $t \in [0,T]$, ce qui implique

$$w(0) + \frac{b}{L} + \int_0^t \big(Lw(s) + b\big)\, ds \leqslant \left(w(0) + \frac{b}{L} \right) e^{Lt} \qquad \forall\, t \in [0,T]\,.$$

En insérant cette inégalité dans (3.7), on obtient (3.8). □

Nous allons maintenant obtenir l'unicité de la solution du Théorème 3.6 comme conséquence du résultat plus général suivant.

Proposition 3.10. *Sous les mêmes hypothèses que le Théorème 3.6, soient u_1 et u_2 deux solutions de $u' = f(t,u)$ définies sur un même intervalle J d'intérieur non vide. Si il existe $t_0 \in J$ tel que $u_1(t_0) = u_2(t_0)$ alors $u_1 = u_2$.*

Démonstration. On pose

$$\mathscr{F} := \{ t \in J : u_1(t) = u_2(t) \}\,.$$

Alors $\mathscr{F} \neq \emptyset$, et $\mathscr{F}$ est un fermé de J puisque u_1 et u_2 sont continues. Nous allons montrer que $\mathscr{F}$ est également un ouvert de J, ce qui impliquera que $\mathscr{F} = J$ puisque J est connexe. On aura donc montré que $u_1(t) = u_2(t)$ pour tout $t \in J$.

Soit t_0 un point arbitraire de $\mathscr{F}$, et on note $x_0 = u_1(t_0) = u_2(t_0)$. Puisque f est localement Lipschitz par rapport à x, il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que

$$\mathcal{C}_{\alpha,\beta} := \{ (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{K}^N : |t - t_0| \leqslant \alpha\,,\ \|x - x_0\|_2 \leqslant \beta \} \subset \mathscr{O}\,,$$

et

$$\|f(t,x) - f(t,y)\|_2 \leqslant C\|x - y\|_2 \qquad \forall (t,x), (t,y) \in \mathcal{C}_{\alpha,\beta}\,,$$

pour une constante $C > 0$. De plus, comme u_1 et u_2 sont continues, il existe $0 < \gamma \leqslant \alpha$ tel que pour tout $t \in J$ satisfaisant $|t - t_0| \leqslant \gamma$, on ait $\|u_j(t) - x_0\|_2 \leqslant \beta$ pour $j = 1, 2$, c'est à dire $(t, u_j(t)) \in \mathcal{C}_{\alpha,\beta}$.

Pour simplifier la présentation, on suppose dans la suite que $t_0 = 0$. On distingue maintenant deux cas.

Cas 1). Supposons que 0 soit dans l'intérieur de J. Alors il existe $0 < \delta \leqslant \gamma$ tel que $[-\delta, \delta] \subset J$. On pose alors pour $t \in [0,\delta]$,

$$w_d(t) := \|u_1(t) - u_2(t)\|_2^2\,.$$

La fonction w_d est alors continue sur $[0,\delta]$, et dérivable sur $]0,\delta[$, avec

$$w_d'(t) = 2\langle u_1(t) - u_2(t), u_1'(t) - u_2'(t) \rangle\,.$$

On déduit alors que pour tout $t \in]0, \delta[$,

$$w_d'(t) = 2\langle u_1(t) - u_2(t), f(t, u_1(t)) - f(t, u_2(t))\rangle \\ \leqslant 2C\|u_1(t) - u_2(t)\|_2^2 = 2Cw_d(t)\,.$$

D'après le Lemme 3.8,

$$w_d(t) \leqslant w_d(0)e^{2Ct} = 0 \qquad \forall\, t \in [0, \delta]\,,$$

puisque $w_d(0) = 0$. Mais comme $w_d \geqslant 0$, on conclut que $w_d(t) = 0$ pour tout $t \in [0, \delta]$, c'est à dire $u_1(t) = u_2(t)$ pour tout $t \in [0, \delta]$.

On pose ensuite pour $t \in [0, \delta]$,

$$w_g(t) := \|u_1(-t) - u_2(-t)\|_2^2\,,$$

si bien que la fonction w_d est alors continue sur $[0, \delta]$, et dérivable sur $]0, \delta[$, avec

$$w_g'(t) = -2\langle u_1(-t) - u_2(-t), u_1'(-t) - u_2'(-t)\rangle\,.$$

Comme pour w_d, on en déduit que $w'(t) \leqslant 2Cw(t)$ pour tout $t \in]0, \delta[$. Le Lemme 3.8 nous donne de la même façon $w_g(t) \leqslant 0$ pour $t \in [0, \delta]$. Comme $w_g \geqslant 0$, nous obtenons $u_1(t) = u_2(t)$ pour tout $t \in [-\delta, 0]$.

En conclusion, nous avons obtenu $u_1(t) = u_2(t)$ pour tout $t \in [-\delta, \delta]$, et donc $]-\delta, \delta[\subset \mathscr{F}$.

Cas 2). Supposons que 0 soit une extrémité de l'intervalle J, par exemple l'extrémité gauche. Alors il existe $0 < \delta \leqslant \gamma$ tel que $[0, \delta] \subset J$. On procède alors comme dans le Cas 1), en utilisant la fonction w_d, pour déduire que $u_1(t) = u_2(t)$ pour tout $t \in [0, \delta]$. Nous avons donc $[0, \delta[\subset \mathscr{F}$, et remarquons $[0, \delta[$ est bien un ouvert (relatif) de J. □

Remarque 25. Le Théorème 3.6 nous donne l'existence d'une solution (et d'une seule) définie sur un "petit" intervalle J contenant t_0. Ce type de solutions est appelée *solution locale*. Remarquons que la solution locale donnée par le Théorème 3.6 pourrait être définie sur un intervalle plus grand que l'intervalle J. Ceci fait l'objet de la section suivante.

3.3 Solutions maximales et globales

Définition 3.11. Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, et $f : \mathscr{O} \to \mathbb{K}^N$ une application continue définie sur un ouvert $\mathscr{O}$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{K}^N$. On dit qu'une solution u de $u' = f(t, u)$ est *globale* sur I si elle définie sur tout l'intervalle I. Lorsque I est ouvert et que $\mathscr{O} = I \times \mathscr{U}$ pour un ouvert $\mathscr{U}$ de $\mathbb{K}^N$, on dit (sans préciser l'intervalle) que u est une solution globale.

En pratique, il est important de connaître le plus grand intervalle de définition d'une solution, ou pour lequel la conclusion du Théorème 3.6 reste vraie.

Définition 3.12. Soit $f : \mathscr{O} \to \mathbb{K}^N$ une application continue définie sur un ouvert $\mathscr{O}$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{K}^N$. Une solution u de $u' = f(t, u)$ définie sur un intervalle $I_{\max} \subset \mathbb{R}$ est dite *maximale* si elle ne peut être prolongée par une solution définie sur un intervalle contenant strictement $I_{\max}$.

Proposition 3.13. *Sous les hypothèses du Théorème 3.6 , pour tout* $(t_0, x_0) \in \mathscr{O}$*, il existe une unique solution maximale de*

$$\begin{cases} u' = f(t,u) \\ u(t_0) = x_0 \end{cases} . \tag{3.9}$$

Démonstration. Soit $(t_0, x_0) \in \mathscr{O}$. Notons $\mathscr{I}$ l'ensemble des intervalles contenant t_0 sur lesquels il existe une solution de (3.9). D'après la Proposition 3.10, pour tout $J \in \mathscr{I}$, la solution de (3.9) définie sur J est unique, et on la note u_J. De plus, toujours d'après la Proposition 3.10, si $J_1, J_2 \in \mathscr{I}$ alors $J_1 \cap J_2 \in \mathscr{I}$ et $u_{J_1} = u_{J_2}$ sur $J_1 \cap J_2$. L'ensemble

$$I_{\max} = \bigcup_{J \in \mathscr{I}} J \,,$$

est alors un intervalle contenant t_0, et on peut définir $u : I_{\max} \to \mathbb{K}^N$ par $u(t) = u_J(t)$ si $t \in J$ pour un certain $J \in \mathscr{I}$. La fonction u est alors solution de (3.4) (exercice) et donc de (3.9). Elle est maximale par construction.

Montrons maintenant l'unicité de cette solution maximale. Si v est une autre solution maximale de (3.9) définie sur un intervalle $I'_{\max}$, alors $u = v$ sur $I_{\max} \cap I'_{\max}$ puisque $t_0 \in I_{\max} \cap I'_{\max}$. En posant, $w(t) = u(t)$ si $t \in I_{\max}$ et $w(t) = v(t)$ si $t \in I'_{\max}$, la fonction w est une solution de (3.9) sur l'intervalle $I_{\max} \cup I'_{\max}$. En particulier, w est un prolongement des solutions u et v à $I_{\max} \cup I'_{\max}$. Mais puisque u et v sont maximales, on en déduit que $I_{\max} = I'_{\max}$, et donc que $u = v$ d'après la Proposition 3.10. □

Remarque 26. D'après la proposition précédante, sous les hypothèses du Théorème 3.6, toute solution locale de $u' = f(t,u)$ est la restriction à un sous-intervalle d'une solution maximale et d'une seule.

Remarque 27. Pour $\mathscr{O} = I \times \mathscr{U}$, toute solution globale est maximale, mais la réciproque est en général fausse.

Exemple 3 (Equation de Riccati). Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $N = 1$, $I = \mathbb{R}$, et $f(t,x) = x^2$, la solution maximale de

$$\begin{cases} u' = u^2 \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

est donnée par

$$u(t) = \frac{1}{1-t} \,,$$

avec $I_{\max} =]-\infty, 1[$.

Exemple 4. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $N = 1$, $I = \mathbb{R}$, et $f(t,x) = \frac{1}{2x}$ définie pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, la solution maximale de

$$\begin{cases} u' = \dfrac{1}{2u} \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

est donnée par

$$u(t) = \sqrt{t+1} \,,$$

avec $I_{\max} =]-1, +\infty[$.

Comme l'indique l'exemple ci-dessus, une solution maximale tend à sortir du domaine de définition de f lorsque t tend vers une extrémité de l'intervalle maximal d'existence. De façon plus précise, nous avons le comportement suivant.

Théorème 3.14. *Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $\mathscr{U}$ un ouvert de $\mathbb{K}^N$, et $f : I \times \mathscr{U} \to \mathbb{K}^N$ une application continue et localement Lipschitzienne par rapport à x. Pour $(t_0, x_0) \in I \times \mathscr{U}$, soient u la solution maximale du problème de Cauchy* (3.9), *et $I_{\max}$ son intervalle d'existence. Alors l'intervalle $I_{\max}$ est un ouvert de I. De plus, si $\sup I_{\max} < \sup I$ (resp. $\inf I_{\max} > \inf I$), alors pour tout compact $K \subset \mathscr{U}$, il existe $t_K \in I_{\max}$ tel que $u(t) \in \mathscr{U} \setminus K$ pour tout $t \in [t_K, \sup I_{\max}[$ (resp. pour tout $t \in]\inf I_{\max}, t_K]$).*

Démonstration. Étape 1. Montrons que $I_{\max}$ est ouvert. On procède par contradiction en supposant que $I_{\max}$ n'est pas ouvert. Alors $I_{\max} \neq I$, et $I_{\max}$ contient au moins une de ses extrémités. Supposons par exemple qu'il s'agisse de l'extrémité gauche, c'est à dire que $a := \inf I_{\max} \in I_{\max}$. D'après le Théorème 3.6, il existe $\delta > 0$ tel que le probème de Cauchy $v' = f(t, v)$ avec $v(a) = u(a)$ admette une unique solution v définie sur $]a - \delta, a + \delta[\subset I$. D'après la Proposition 3.10, on a $v(t) = u(t)$ pour $t \in [a, a-\delta[$. On pose alors $w(t) = u(t)$ si $t \in I_{\max}$ et $w(t) = v(t)$ si $t \in]a-\delta, a[$. La fonction w est alors une solution de (3.9) qui prolonge u à l'intervalle $]a - \delta, a[\cup I_{\max}$, ce qui contredit la maximalité de u.

Étape 2. Nous ne montrons le résultat qu'au voisinage de $\sup I_{\max}$, celui au voisinage de $\inf I_{\max}$ s'obtenant de façon analogue. On suppose donc que $T := \sup I_{\max} < \sup I$. On procède par contradiction en supposant qu'il existe un compact $K_0 \subset \mathscr{U}$ et une suite $\{t_n\} \subset I_{\max}$ tels que $t_n \to T$ et $u(t_n) \in K_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puisque K_0 est compact, quitte à extraire une sous-suite, nous pouvons supposer que $u(t_n) \to u_*$ quand $n \to \infty$ pour un certain $u_* \in K_0$. Comme $T < \sup I$, nous avons $T \in I$, et donc $(T, u_*) \in I \times \mathscr{U}$. On considère alors $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que

$$\mathcal{D}_{\alpha,\beta} := \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{K}^N : |t - T| \leqslant 2\alpha\,,\ \|x - u_*\|_\star \leqslant 2\beta\} \subset I \times \mathscr{U}\,.$$

L'ensemble $\mathcal{D}_{\alpha,\beta}$ étant compact inclus dans $I \times \mathscr{U}$, et f continue sur $I \times \mathscr{U}$, il existe une constante M positive telle que $\|f(t, x)\|_\star \leqslant M$ pour tout $(t, x) \in \mathcal{D}_{\alpha,\beta}$. On pose $\varepsilon := \min\left(\alpha, \frac{\beta}{M}\right)$. Puisque $(t_n, u(t_n)) \to (T, u_*)$ quand $n \to \infty$, il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$(T, u_*) \in \mathcal{C}_\varepsilon := \left\{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{K}^N : |t - t_{n_\varepsilon}| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\,,\ \|x - u(t_{n_\varepsilon})\|_\star \leqslant \beta\right\} \subset \mathcal{D}_{\alpha,\beta}\,.$$

En particulier, $\|f(t, x)\|_\star \leqslant M$ pour tout $(t, x) \in \mathcal{C}_\varepsilon$. En appliquant la démonstration du Théorème 3.6 (avec $t_0 = T$, $x_0 = u(t_{n_\varepsilon})$, et $\mathcal{C}_\varepsilon$ au lieu de $\mathcal{C}_{\alpha,\beta}$), on construit une solution v de $v' = f(t, v)$ définie sur $[t_{n_\varepsilon} - \varepsilon, t_{n_\varepsilon} + \varepsilon]$ satisfaisant $v(t_{n_\varepsilon}) = u(t_{n_\varepsilon})$. D'après la Proposition 3.10, $u = v$ sur $I_{\max} \cap [t_{n_\varepsilon} - \varepsilon, t_{n_\varepsilon} + \varepsilon]$. On pose alors $w(t) = u(t)$ pour $t \in I_{\max}$ et $w(t) = v(t)$ si $t \in [t_{n_\varepsilon} - \varepsilon, t_{n_\varepsilon} + \varepsilon]$, et la fonction w est une solution de (3.9) sur l'intervalle $I_{\max} \cup [t_{n_\varepsilon} - \varepsilon, t_{n_\varepsilon} + \varepsilon]$. Il s'agit alors d'un prolongement de u sur un intervalle contenant strictement $I_{\max}$ puisque $T \leqslant t_{n_\varepsilon} + \varepsilon/2$. Ceci contredit la maximalité de la solution u. $\square$

Corollaire 3.15. *Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et $f : I \times \mathbb{K}^N \to \mathbb{K}^N$ une application continue et localement Lipschitzienne par rapport à x. Pour $(t_0, x_0) \in I \times$*

$\mathbb{K}^N$*, soient* u *la solution maximale du problème de Cauchy* (3.9)*, et* $I_{\max} =]T_-, T_+[$ *son intervalle maximal d'existence. Si* $T_+ < \sup I$ *(resp.* $T_- > \inf I$*), alors*

$$\lim_{t\uparrow T_+} \|u(t)\|_\star = +\infty \qquad \textit{(resp. } \lim_{t\downarrow T_-} \|u(t)\|_\star = +\infty \textit{)}.$$

Démonstration. Nous ne montrons le résultat qu'au voisinage de T_+, celui au voisinage de T_- s'obtenant de façon analogue. Puisque l'ensemble $\{x \in \mathbb{K}^N : \|x\|_\star \leqslant n\}$ est compact pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après le Théorème 3.14, pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $t_n \in I_{\max}$ tel que $\|u(t)\|_\star > n$ pour tout $t \in [t_n, T_+[$. En conséquence,

$$\liminf_{t\uparrow T_+} \|u(t)\|_\star \geqslant n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

En faisant maintenant tendre n vers l'infini, on obtient

$$+\infty \leqslant \liminf_{t\uparrow T_+} \|u(t)\|_\star \leqslant \limsup_{t\uparrow T_+} \|u(t)\|_\star ,$$

d'où le résultat. □

3.4 Critères d'existence globale

3.4.1 Condition Lipschitz globale, semi-globale, et bornitude

Théorème 3.16. *Soient* $I \subset \mathbb{R}$ *un intervalle ouvert, et* $f : I \times \mathbb{K}^N \to \mathbb{K}^N$ *une application continue Lipschitzienne par rapport à* x*. Pour tout* $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{K}^N$*, le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} u' = f(t,u) \\ u(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{3.10}$$

admet une unique solution globale.

Démonstration. D'après la Remarque 23, f est localement Lipschitzienne par rapport à x, et donc (3.10) admet une unique solution maximale u définie sur un intervalle $I_{\max} \subset I$ d'après la Proposition 3.13. Il suffit donc de construire une solution de (3.10) définie sur tout l'intervalle I qui sera alors par unicité la solution maximale, ce qui montrera de ce fait que $I_{\max} = I$.

La construction d'une solution est presque identique à celles données dans les démonstrations des théorèmes 2.1 et 3.6, et nous n'indiquerons que les principales différences. Résumons les étapes :

(1) On suppose que I est compact. Le cas I non compact s'obtient ensuite comme dans la démonstration du Théorème 2.1 en utilisant la Proposition 3.10 sur l'unicité des solutions.

(2) On considère la suite de fonctions continues $u_n : I \to \mathbb{K}^N$ définie par la relation de récurrence (3.5) (avec I au lieu de J, et $I \times \mathbb{K}^N$ au lieu de $\mathscr{O}$), et $u_0(t) = x_0$.

(3) L'application $t \in I \mapsto f(t, x_0)$ est continue sur I compact, donc $\|f(t,x_0)\|_\star \leqslant M$ pour tout $t \in I$ et pour une certaine constante M.

(4) Comme dans l'étape 2 de la démonstration du Théorème de 3.6, on montre par récurrence que $\|u_{n+1}(t) - u_n(t)\|_\star \leqslant \frac{Mk^n}{(n+1)!}|t-t_0|^{n+1}$ pour tout $t \in I$, où $k = C_A$ dans (3.1) avec $A = \mathbb{K}^N$.

(5) On conclut comme dans l'étape 2 de la démonstration du Théorème de 3.6. □

Comme conséquence du théorème précédant, nous obtenons l'existence et l'unicité d'une solution globale sous un condition de type Lipschitz *semi-globale* sur f. La démonstration du corollaire suivant est laissée en exercice (on pourra utiliser le Corollaire 3.4).

Corollaire 3.17. *Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, et $f : I \times \mathbb{K}^N \to \mathbb{K}^N$ une application continue. Supposons qu' il existe une fonction continue $k : I \to \mathbb{R}_+$ telle que pour tout $t \in I$,*

$$\|f(t,x) - f(t,y)\|_\star \leqslant k(t)\|x - y\|_\star \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{K}^N .$$

Alors, pour tout $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{K}^N$, le problème de Cauchy (3.10) *admet une unique solution globale.*

On obtient également du Corollaire 3.15 un critère d'existence globale.

Proposition 3.18. *Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et $f : I \times \mathbb{K}^N \to \mathbb{K}^N$ une application continue et localement Lipschitzienne par rapport à x. Pour $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{K}^N$, soit u la solution maximale du problème de Cauchy* (3.9). *Si u est bornée, alors u est une solution globale.*

3.4.2 Fonctions de Lyapunov et intégrales premières

Dans de nombreuses situations, l'application f est seulement localement Lipschitz en x, mais on peut tout de même montrer l'existence de solutions dites *globales en temps positifs* grace à l'existence d'une *fonction de Lyapunov*.

Définition 3.19. Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $\mathscr{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^N$, et $f : I \times \mathscr{U} \to \mathbb{R}^N$ une application continue. On dit qu'une fonction $\Phi : I \times \mathscr{U} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ est une *fonction de Lyapunov* pour le système différentiel $u' = f(t, u)$ si :

1) pour tout $M \in \mathbb{R}$ et tout intervalle compact $J \subset I$, l'ensemble

$$\{(t, x) \in J \times \mathscr{U} : \Phi(t, x) \leqslant M\}$$

est un compact de $I \times \mathscr{U}$;

2) pour tout $x \in \mathscr{U}$ et tout $t \in I$,

$$\partial_t \Phi(t, x) + \langle \nabla_x \Phi(t, x), f(t, x)\rangle \leqslant 0 .$$

Si la condition 2) est remplacée par la condition

2') il existe des constantes $\alpha \geqslant 0$ et $\beta \geqslant 0$ telles que

$$\partial_t \Phi(t, x) + \langle \nabla_x \Phi(t, x), f(t, x)\rangle \leqslant \alpha + \beta\Phi(t, x)$$

pour tout $x \in \mathscr{U}$ et tout $t \in I$, on dit que Φ est une *fonction de Lyapunov généralisée.*

Remarque 28. On désigne par $\partial_t \Phi$ la dérivée partielle de Φ par rapport à t, et $\nabla_x \Phi(t, x)$ le vecteur (colonne) de $\mathbb{R}^N$ formé des dérivées partielles de Φ par rapport à $x_1, \ldots, x_N$, c'est à dire

$$\nabla_x \Phi = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \Phi}{\partial x_N}\right)^T .$$

Remarque 29. La condition 1) de la Définition 3.19 exprime le fait que $\Phi(t,x) \to +\infty$ lorsque $d(x, \partial\mathscr{U}) \to 0$ (ou $\|x\|_\star \to +\infty$) localement uniformément en t (exercice).

Théorème 3.20. *Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $\mathscr{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^N$, et $f : I \times \mathscr{U} \to \mathbb{R}^N$ une application continue localement Lipschitzienne par rapport à x. Supposons qu'il existe une fonction de Lyapunov généralisée Φ pour le système $u' = f(t,u)$. Alors toute solution maximale de $u' = f(t,u)$ définie sur un intervalle maximal $I_{\max}$ vérifie $\sup I_{\max} = \sup I$. De plus, si Φ est une fonction de Lyapunov, alors la fonction $t \in I_{\max} \mapsto \Phi(t, u(t))$ est décroissante.*

Démonstration. Soit u une solution maximale définie sur un intervalle $I_{\max} \subset I$, et soit $t_0 \in I_{\max}$. On pose $x_0 := u(t_0)$. Pour obtenir le résultat, nous devons montrer que pour tout $t_0 < T < \sup I$, on a $[t_0, T] \subset I_{\max}$, c'est à dire que $T < \sup I_{\max}$. Si $\sup I_{\max} = \sup I$, il n'y a rien à faire, et on peut donc supposer que $\sup I_{\max} < \sup I$. On raisonne alors par l'absurde en supposant que $T \geqslant \sup I_{\max}$.

Observons que la fonction $t \in [t_0, \sup I_{\max}[\mapsto \Phi(u(t))$ est dérivable sur l'intervalle $]t_0, \sup I_{\max}[$ comme composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, et que pour tout $t \in]t_0, \sup I_{\max}[$,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Phi(t,u(t)) &= \partial_t \Phi(t,u(t)) + \langle \nabla_x \Phi(t,u(t)), u'(t)\rangle \\ &= \partial_t \Phi(t,u(t)) + \langle \nabla_x \Phi(t,u(t)), f(t,u(t))\rangle \leqslant \alpha + \beta\Phi(t,u(t))\,.\end{aligned} \tag{3.11}$$

Si $\beta \neq 0$, on déduit du Lemme 3.8 que

$$\begin{aligned}\Phi(t,u(t)) &\leqslant \left(\Phi(t_0,x_0) + \frac{\alpha}{\beta}\right) e^{\beta(t-t_0)} - \frac{\alpha}{\beta} \\ &\leqslant \left(\Phi(t_0,x_0) + \frac{\alpha}{\beta}\right) e^{\beta(T-t_0)} \quad \forall\, t \in [t_0, \sup I_{\max}[\,.\end{aligned}$$

Si $\beta = 0$, on obtient

$$\Phi(t,u(t)) \leqslant \Phi(t_0,x_0) + \alpha(t - t_0) \leqslant \Phi(t_0,x_0) + \alpha(T - t_0) \qquad \forall\, t \in [t_0, \sup I_{\max}[\,.$$

Si l'on note

$$M := \max\left\{\Phi(t_0,x_0) + \alpha(T-t_0), \left(\Phi(t_0,x_0) + \frac{\alpha}{\beta}\right) e^{\beta(T-t_0)}\right\},$$

alors l'ensemble

$$\mathcal{E}_M := \{(t,x) \in [t_0,T] \times \mathscr{U} : \Phi(t,x) \leqslant M\}$$

est un compact de $I \times \mathscr{U}$, et $(t, u(t)) \in \mathcal{E}_M$ pour tout $t \in [t_0, \sup I_{\max}[$. On considère maintenant la projection $\pi_s : (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \mapsto x \in \mathbb{R}^N$. Alors π_s est continue, et donc l'ensemble

$$K := \pi_s(\mathcal{E}_M)$$

est un compact de $\mathscr{U}$. Mais alors $u(t) \in K$ pour tout $t \in [t_0, \sup I_{\max}[$, ce qui contredit le Théorème 3.14 pour t assez proche de $\sup I_{\max}$. Donc $T < \sup I_{\max}$.

On conclut la démonstartion en remarquant que si Φ est une fonction de Lyapunov alors $\alpha = \beta = 0$, et (3.11) nous dit exactement que $t \in I_{\max} \mapsto \Phi(t, u(t))$ est décroissante. $\square$

Une autre classe très importante de fonctions, dans l'esprit des fonctions de Lyapunov, est donnée par les *intégrales premières* d'un système différentiel. Pour ces dernières nous pourrons parfois conclure qu'une solution maximale est globale.

Définition 3.21. Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $\mathscr{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^N$, et $f : I \times \mathscr{U} \to \mathbb{R}^N$ une application continue. On dit qu'une fonction $E : I \times \mathscr{U} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ est une *intégrale première* du système différentiel $u' = f(t, u)$ si

$$\partial_t E(t, x) + \langle f(t, x), \nabla_x E(t, x)\rangle = 0 \qquad \forall (t, x) \in I \times \mathscr{U} .$$

Théorème 3.22. *Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $\mathscr{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^N$, et $f : I \times \mathscr{U} \to \mathbb{R}^N$ une application continue localement Lipschitzienne par rapport à x. Supposons qu'il existe une intégrale première E pour le système $u' = f(t, u)$ telle que pour tout $M \in \mathbb{R}$ et tout intervalle compact $J \subset I$, l'ensemble*

$$\{(t, x) \in J \times \mathscr{U} : E(t, x) = M\}$$

soit un compact de $I \times \mathscr{U}$. Alors toute solution maximale u de $u' = f(t, u)$ est globale, et la fonction $t \in I \mapsto E(t, u(t))$ est constante.

Démonstration. Soient u une solution maximale de $u' = f(t, u)$ et $I_{\max}$ son intervalle maximal d'existence. Soit $t_0 \in I_{\max}$ et posons $x_0 := u(t_0)$. Procédons par contradiction en supposant que u n'est pas globale. On peut supposer par exemple que $\sup I_{\max} < \sup I$. On peut alors trouver un intervalle compact $J \subset I$ tel que $\inf I_{\max} < \min J$ et $\sup I_{\max} < \max J$. L'application $t \in I_{\max} \mapsto E(t, u(t))$ est de classe $\mathscr{C}^1$ comme composition de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. De plus, pour tout $t \in I_{\max}$, on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\big(E(t, u(t))\big) &= \partial_t E(t, u(t)) + \langle \nabla_x E(t, u(t)), u'(t)\rangle \\ &= \partial_t E(t, u(t)) + \langle \nabla_x E(t, u(t)), f(t, u(t))\rangle = 0 . \end{aligned}$$

Donc $E(t, u(t)) = E(t_0, x_0) =: M$ pour tout $t \in I_{\max}$. On considère maintenant la projection $\pi_s : (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \mapsto x \in \mathbb{R}^N$. Alors π_s est continue, et donc l'ensemble

$$K := \pi_s\left(\{(t, x) \in J \times \mathscr{U} : E(t, x) = M\}\right)$$

est un compact de $\mathscr{U}$. Mais alors $u(t) \in K$ pour tout $t \in J \cap I_{\max}$, ce qui contredit le Théorème 3.14 pour t assez proche de $\sup I_{\max}$. □

3.4.3 Deux exemples fondamentaux

A) Systèmes de type "flot de gradient"

Définition 3.23. On appelle système différentiel ordinaire de type *flot de gradient* tout système de la forme

$$u' = -\nabla W(u) , \tag{3.12}$$

où la fonction $W : \mathscr{U} \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert $\mathscr{U}$ de $\mathbb{R}^N$, et $\nabla W : \mathscr{U} \to \mathbb{R}^N$ est localement Lipschitzienne sur $\mathscr{U}$.

Proposition 3.24. *Si pour tout $M \in \mathbb{R}$ l'ensemble $\{x \in \mathscr{U} : W(u) \leqslant M\}$ est un compact de $\mathscr{U}$, alors la fonction W est une fonction de Lyapunov pour le système* (3.12)*. En particulier, étant donné $x_0 \in \mathscr{U}$, il existe une unique solution u de* (3.12) *définie sur $[0, \infty[$ et satisfaisant $u(0) = x_0$. De plus,*

$$W(u(t)) + \int_0^t \|u'(s)\|_2^2 \, ds = W(u(0)) \qquad \forall \, t \in [0, \infty[\, ,$$

et la fonction $t \in [0, \infty[\mapsto W(u(t))$ est décroissante.

Exemple 5. Soient $A \in \mathscr{M}_{N \times N}(\mathbb{R})$ est une matrice symmétrique définie positive, et $b \in \mathbb{R}^N$. Le système différentiel linéaire $u' = -Au + b$ est un flot de gradient pour la fonction W définie par

$$W(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle \, ,$$

et W est une fonction de Lyapunov du système (exercice).

Démonstration de la Proposition 3.24. On a ici $f(t, x) = -\nabla W(x)$, et donc pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\langle \nabla W(x), f(t, x)\rangle = -\|\nabla W(x)\|_2^2 \leqslant 0 \qquad \forall \, x \in \mathscr{U} \, .$$

D'après le Théorème 3.20 et la Proposition 3.13, pour tout $x_0 \in \mathscr{U}$, il existe une unique solution u de (3.12) définie sur $[0, \infty[$ et satisfaisant $u(0) = x_0$. En prenant le produit scalaire de (3.12) avec $u'(t)$, nous obtenons

$$\|u'(t)\|_2^2 = -\langle \nabla W(u(t)), u'(t)\rangle = -\frac{d}{dt} W(u(t)) \, ,$$

et la conclusion s'obtient en integrant cette égalité. □

B) Systèmes “Hamiltoniens"

Lorsque la dimension N est paire, c'est à dire $N = 2M$, on rencontre souvent la structure suivante. On note tout $x \in \mathbb{R}^{2M}$ de la forme $x = (q, p)$ avec $q, p \in \mathbb{R}^M$, et on considère l'opérateur linéaire $J \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^{2M})$ défini par $J : x = (q, p) \mapsto (-p, q)$.

Définition 3.25. On dit qu'un système différentiel ordinaire est *Hamiltonien* si il est de la forme

$$u' = -J \nabla H(u) \, , \tag{3.13}$$

où la fonction $H : \mathscr{U} \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert $\mathscr{U}$ de $\mathbb{R}^{2M}$, et $\nabla H : \mathscr{U} \to \mathbb{R}^N$ est localement Lipschitzienne sur $\mathscr{U}$. La fonction H est appelée *Hamiltonien* du système.

Proposition 3.26. *La fonction H est une intégrale première pour le système* (3.13)*. De plus, si pour tout $M \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{x \in \mathscr{U} : H(x) = M\}$ est un compact de $\mathscr{U}$, alors toute solution maximale u est globale, et vérifie l'identité*

$$H(u(t)) = H(u(0)) \qquad \forall \, t \in \mathbb{R} \, .$$

Démonstration. On a ici $f(t,x) = -J\nabla H(x)$, et donc pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\langle \nabla H(x), f(t,x)\rangle = 0 \qquad \forall\, x \in \mathscr{U}\,.$$

D'après le Théorème 3.22toute solution maximale u de (3.13) est globale, et $H(u(t))$ est une fonction constante, donc égale à $H(u(0))$. □

Exemple 6. Soit $V : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $V(q) \to +\infty$ lorsque $\|q\|_\star \to \infty$. On considère le système différentiel sur $\mathbb{R}^M$ d'ordre 2 suivant :

$$u'' = -\nabla V(u)\,.$$

On se ramène à un système d'ordre 1 sur $\mathbb{R}^{2M}$ en posant $v = (v_1, v_2)$, $v_1 = u$, et $v_2 = u'$. Alors le système d'ordre 2 ci-dessus est équivalent au système Hamiltonien suivant

$$v' = -J\nabla H(v)\,,$$

avec

$$H(v) = \frac{1}{2}\|v_2\|_2^2 + V(v_1)\,,$$

et H est une intégrale première pour ce système (exercice).

3.5 Problèmes

Exercice 10. Soient $K \in \mathbb{R}$, $T > 0$, et $\psi : [0,T] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

1) Soit $w : [0,T] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et dérivable sur $]0,T[$ vérifiant

$$w'(t) \leqslant \psi(t)w(t) \qquad \forall\, t \in]0,T[\,.$$

Montrer que

$$w(t) \leqslant w(0)e^{\int_0^t \psi(s)\,ds} \qquad \forall\, t \in [0,T]\,.$$

2) On suppose maintenant que $\psi(t) \geqslant 0$ pour tout $t \in [0,T]$. Soit $w : [0,T] \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant

$$w(t) \leqslant K + \int_0^t \psi(s)w(s)\,ds \qquad \forall\, t \in [0,T]\,.$$

Montrer que

$$w(t) \leqslant Ke^{\int_0^t \psi(s)\,ds} \qquad \forall\, t \in [0,T]\,.$$

Exercice 11. On considère une solution u maximale autour de 0 de l'équation différentielle scalaire

$$u' = (u^2 - 1)^2\,.$$

1) Montrer que si $-1 \leqslant u(0) \leqslant 1$, alors la solution est globale.
2) Montrer que si $|u(0)| > 1$, alors la solution n'est pas globale.

Exercice 12. Soient $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues, localement Lipschitziennes. On supposera que

(i) $\alpha(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$;

(ii) $\beta(0) = 0$, et $x\beta(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

(iii) $\int_0^{+\infty} \beta(x)\,dx = \int_{-\infty}^0 |\beta(x)|\,dx = +\infty$.

On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} u'' + \alpha(u)u' + \beta(u) = 0 \\ u(0) = u_0 \\ u'(0) = u_1 \end{cases} \tag{3.14}$$

où $u_0, u_1 \in \mathbb{R}$ sont donnés.

1) Montrer que (3.14) admet une unique solution maximale u (*Indication :* on pourra se ramener à un système d'ordre un).

2) Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $A(x) = \int_0^x \alpha(s)\,ds$. On note $I_{\max}$ l'intervalle maximale d'existence de u. Montrer que la fonction $v = (v_1, v_2) : I_{\max} \to \mathbb{R}^2$ définie par $v_1 = u$ et $v_2 = u' + A(u)$, est solution sur $I_{\max}$ de

$$\begin{cases} v_1' = v_2 - A(v_1) \\ v_2' = -\beta(v_1) \end{cases} \tag{3.15}$$

et vérifie $v_1(0) = u_0$, $v_2(0) = u_1 + A(u_0)$.

3) Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $B(x) = \int_0^x \beta(s)\,ds$. Montrer que la fonction Φ définie pour $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ par

$$\Phi(y) = \frac{1}{2}|y_2 - A(y_1)|^2 + B(y_1)$$

est une fonction de Lyapunov pour le système (3.15).

4) En déduire que $[0, +\infty[\subset I_{\max}$.

Exercice 13. On considère le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} u' + u^3 = v \\ v' + v^3 = u \\ u(0) = \alpha \\ v(0) = \beta \end{cases} \tag{3.16}$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sont donnés.

1) Montrer que le système (3.16) admet une unique solution maximale (on notera dans la suite $I_{\max}$ son intervalle maximale d'existence).

2) Trouver une fonction de Lyapunov généralisée pour le système (3.16), et en déduire que $[0, +\infty[\subset I_{\max}$.

3) Montrer que l'équation $w' + w^3 = w$ admet une unique solution maximale w vérifiant $w(0) = \alpha$, définie sur un intervalle maximale contenant $[0, +\infty[$.

4) En déduire que si $\alpha = \beta$ alors $u(t) = v(t)$ pour tout $t \in I_{\max}$.

5) Montrer que si $\alpha \neq \beta$ alors $u(t) \neq v(t)$ pour tout $t \in I_{\max}$.

6) Montrer que si $\alpha = \beta$ avec $\alpha > 0$ alors

$$\lim_{t \to +\infty} u(t) = \lim_{t \to +\infty} v(t) = 1\,.$$

Chapitre 4

Flot d'un système différentiel : dépendance par rapport aux données

Dans tout ce chapitre, nous supposerons que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, que $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert, $\mathscr{U}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Nous utiliserons la norme Euclidienne, c'est à dire $\|\cdot\|_\star = \|\cdot\|_2$. L'instant initial $t_0 \in I$ sera également fixé.

4.1 Dépendance par rapport à la donnée initiale

On considère une application $f : I \times \mathscr{U} \to \mathbb{R}^N$ continue localement Lipschitzienne par rapport à x. Le but de cette section est l'étude de la dépendance par rapport à $x \in \mathscr{U}$ de la solution maximale du problème de Cauchy

$$\begin{cases} u' = f(t,u) \\ u(t_0) = x \end{cases} . \tag{4.1}$$

Nous noterons $I^{t_0}_{\max}(x)$ l'intervalle maximal d'existence de la solution.

4.1.1 Définition et continuité du flot

Commençons par un résultat préliminaire de *"stabilité"*.

Proposition 4.1. *Supposons que f soit Lipschitzienne par rapport à x, c'est à dire que*

$$\|f(t,x) - f(t,y)\|_2 \leqslant K\|x-y\|_2 \qquad \forall (t,x),(t,y) \in I \times \mathscr{U} ,$$

pour une certaine constante $K > 0$. Soient $x, y \in \mathscr{U}$, et u_1, u_2 les solutions maximales de (4.1) *vérifiant $u_1(t_0) = x$ et $u_2(t_0) = y$. Alors,*

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_2 \leqslant e^{K|t-t_0|}\|x-y\|_2 \qquad \forall\, t \in I^{t_0}_{\max}(x) \cap I^{t_0}_{\max}(y) .$$

Démonstration. On observe que $J := I^{t_0}_{\max}(x) \cap I^{t_0}_{\max}(y)$ est un intervalle ouvert contenant t_0. On le note $J =]a,b[$. Soit $0 < T < b - t_0$ arbitraire, et posons pour $t \in [0,T]$,

$w(t) := \|u_1(t+t_0) - u_2(t+t_0)\|_2^2$. Alors w et continue sur $[0, T]$, dérivable sur $]0, T[$, et

$$\begin{aligned} w'(t) &= 2\langle u_1'(t) - u_2'(t), u_1(t) - u_2(t)\rangle \\ &\leqslant 2\|f(t, u_1(t)) - f(t, u_2(t))\|_2 \|u_1(t) - u_2(t)\|_2 \\ &\leqslant 2Kw(t)\,. \end{aligned}$$

D'après le Lemme 3.8, nous avons donc $w(t) \leqslant w(0)e^{2Kt}$ pour tout $t \in [0, T]$, d'où

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_2^2 \leqslant \|x - y\|_2^2 e^{2K|t-t_0|} \qquad \forall\, t \in [t_0, t_0 + T]\,.$$

Comme T est arbitrairement proche de $b - t_0$, l'inégalité ci-dessus est vraie pour tout $t \in [t_0, b[$.

On montre ensuite l'inégalité sur l'intervalle $]a, t_0]$ de la même façon en considérant la fonction $\tilde{w}(t) = \|u_1(t_0 - t) - u_2(t_0 - t)\|_2^2$ définie pour $t \in [0, t_0 - a[$. $\square$

La proposition précédante va maintenant nous servir à montrer le lemme suivant qui le point clef de ce chapitre.

Lemme 4.2. *Soient $x_0 \in \mathscr{U}$ et $\delta_1, \delta_2 > 0$ tels que $[t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_2] \subset I_{\max}^{t_0}(x_0)$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\overline{B}_\varepsilon(x_0) \subset \mathscr{U}$ et*

$$[t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_2] \subset I_{\max}^{t_0}(x) \qquad \forall\, x \in \overline{B}_\varepsilon(x_0)\,.$$

Démonstration. Étape 1. On note u_0 la solution maximale de (4.1) vérifiant $u_0(t_0) = x_0$. Pour tout $t \in [t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_2]$, soit $\varrho(t) > 0$ tel que $B_{3\varrho(t)}(u_0(t)) \subset \mathscr{U}$.

Comme u_0 est continue et $[t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_2]$ compact, l'ensemble $u_0([t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_2])$ est compact. De plus,

$$u_0([t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_2]) \subset \bigcup_{t \in [t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_2]} B_{\varrho(t)}(u_0(t))\,,$$

et il existe donc M points $t_1, \ldots, t_M \in [t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_2]$ tels que

$$u_0([t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_2]) \subset \bigcup_{i=1}^{M} B_{\varrho_i}(u_0(t_i)) \subset \bigcup_{i=1}^{M} B_{2\varrho_i}(u_0(t_i)) =: \mathscr{W}\,, \tag{4.2}$$

où l'on a posé $\varrho_i := \varrho(t_i)$. On remarque également que

$$\overline{\mathscr{W}} = \bigcup_{i=1}^{M} \overline{B_{2\varrho_i}(u_0(t_i))} \subset \bigcup_{t \in [t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_2]} B_{3\varrho(t)}(u_0(t)) \subset \mathscr{U}\,,$$

si bien que $\overline{\mathscr{W}}$ est un compact inclus dans $\mathscr{U}$.

Posons maintenant

$$r := \min\{\varrho_i : i = 1, \ldots, M\}\,. \tag{4.3}$$

Montrons que si $(t, x) \in [t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_2] \times \mathscr{U}$ vérifie $\|x - u_0(t)\|_2 \leqslant r$ alors $x \in \mathscr{W}$. En effet, pour un tel (t, x), il existe $i_* \in \{1, \ldots, M\}$ tel que $u_0(t) \in B_{\varrho_{i_*}}(u_0(t_{i_*}))$ d'après (4.2), et donc

$$\|x - u_0(t_{i_*})\|_2 \leqslant \|x - u_0(t)\|_2 + \|u_0(t) - u_0(t_{i_*})\|_2 < r + \varrho_{i_*} \leqslant 2\varrho_{i_*}\,,$$

c'est à dire que $x \in B_{2\varrho_{i_*}}(u_0(t_{i_*})) \subset \mathscr{W}$.

Étape 2. Puisque $[t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_2] \times \overline{\mathscr{W}}$ est un compact de $I \times \mathscr{U}$, d'après la Proposition 3.3, il existe une constante K telle que

$$\|f(t,x) - f(t,y)\|_2 \leqslant K\|x - y\|_2 \qquad \forall (t,x),(t,y) \in [t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_2] \times \overline{\mathscr{W}}\,.$$

On pose

$$\varepsilon := re^{-K(\delta_1+\delta_2)} < r\,, \tag{4.4}$$

si bien que $\overline{B}_\varepsilon(x_0) \subset \mathscr{W} \subset \mathscr{U}$ d'après l'étape 1 (en effet, pour tout $x \in \overline{B}_\varepsilon(x_0)$ on a $\|x - x_0\|_2 = \|x - u_0(t_0)\|_2 \leqslant \varepsilon < r$).

Considérons maintenant $x_* \in \overline{B}_\varepsilon(x_0)$ et u_* la solution maximale de (4.1) vérifiant $u_*(t_0) = x_*$. Nous allons montrer que $[t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_2] \subset I^{t_0}_{\max}(x_*) =:]T_-, T_+[$, ce qui terminera la démonstration.

On procède par contradiction en supposant par exemple que $T_+ \leqslant t_0 + \delta_2$ (le cas $T_- \geqslant t_0 - \delta_1$ se traitant de la même façon). Alors $T_+ < \sup I$ puisque $t_0 + \delta_2 < \sup I$. Comme u_* est continue et $u_*(t_0) = x_* \in \mathscr{W}$, on a $u_*(t) \in \mathscr{W}$ pour tout $t \in]t_0 - \kappa, t_0 + \kappa[\subset]T_-, T_+[$ et un certain $0 < \kappa < \delta_1$. On pose alors

$$t_1 := \sup\left\{t : t \in]t_0 - \kappa, T_+[\ \text{tel que}\ u_*(s) \in \mathscr{W} \quad \forall\, s \in [t_0, t]\right\},$$

si bien que $t_0 + \kappa \leqslant t_1 \leqslant T_+$. Or d'après le Théorème 3.14, il existe $t_2 \in [t_0, T_+[$ tel que $u_*(t) \in \mathscr{U} \setminus \overline{\mathscr{W}}$ pour tout $t \in [t_2, T_+[$. Donc $t_1 < T_+$, et par par continuité de u_*, nous avons $u_*(t_1) \in \overline{\mathscr{W}} \setminus \mathscr{W}$.

Mais en appliquant la Proposition 4.1 (avec $]t_0 - \kappa, t_1[\times \mathscr{W}$ au lieu de $I \times \mathscr{U}$), nous obtenons

$$\|u_*(t) - u_0(t)\|_2 \leqslant \|x_* - x_0\|_2 e^{K(t-t_0)} \leqslant \varepsilon e^{K\delta_2} \leqslant r \qquad \forall\, t \in [t_0, t_1[\,.$$

Par continuité de u_* et u_0, nous déduisons que $\|u_*(t_1) - u_0(t_1)\|_2 \leqslant r$, et donc $u_*(t_1) \in \mathscr{W}$ d'après l'Étape 1, ce qui est contradictoire. Donc $T_+ > t_0 + \delta_2$. □

Remarque 30. Lors de la preuve du Lemme 4.2, nous avons obtenu les faits suivants que nous utiliserons par la suite. Il existe $r > \varepsilon$ et un ouvert $\mathscr{W} \subset \mathscr{U}$, tels que :

(i) $\overline{\mathscr{W}}$ est un compact de $\mathscr{U}$, et

$$\|f(t,x) - f(t,y)\|_2 \leqslant K\|x - y\|_2 \quad \forall (t,x),(t,y) \in [t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_2] \times \overline{\mathscr{W}} \tag{4.5}$$

pour une certaine constante K ;

(ii) $\overline{B}_r(u_0(t)) \subset \mathscr{W}$ pour tout $t \in [t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_2]$;

(iii) pour tout $(t,x) \in [t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_2] \times \overline{B}_\varepsilon(x_0)$, on a $u(t) \in B_r(u_0(t))$;

où u_0 et u sont les solutions maximales de (4.1) vérifiant $u_0(t_0) = x_0$ et $u(t_0) = x$.

Voici une conséquence directe du Lemme 4.2 qui est fondamentale pour la suite.

Corollaire 4.3. *Soit*

$$\mathcal{D}^{t_0} := \bigcup_{x \in \mathscr{U}} I^{t_0}_{\max}(x) \times \{x\}\,.$$

L'ensemble $\mathcal{D}^{t_0}$ est un ouvert de $I \times \mathscr{U}$.

Démonstration. Soient $(t_*, x_0) \in \mathcal{D}^{t_0}$. Par définition de $\mathcal{D}^{t_0}$, il existe $y \in \mathscr{U}$ tel que $(t_*, x_0) \in I^{t_0}_{\max}(y) \times \{y\}$, mais alors $y = x_0$. Donc $(t_*, x_0) \in I^{t_0}_{\max}(x_0) \times \{x_0\}$. Soit u_0 la solution de (4.1) vérifiant $u_0(t_0) = x_0$. Comme $I^{t_0}_{\max}(x_0)$ est un intervalle ouvert, il existe $\delta_1, \delta_2 > 0$ tels que $[t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_2] \subset I^{t_0}_{\max}(x_0)$ et $t_* \in]t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_2[$. D'après le Lemme 4.2, il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que $\overline{B}_\varepsilon(x_0) \subset \mathscr{U}$ et $[t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_2] \subset I^{t_0}_{\max}(x)$ pour tout $x \in \overline{B}_\varepsilon(x_0)$. Alors $[t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_2] \times \overline{B}_\varepsilon(x_0)$ est un voisinage de (t_*, x_0), et

$$[t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_2] \times \overline{B}_\varepsilon(x_0) \subset \bigcup_{x \in \overline{B}_\varepsilon(x_0)} I^{t_0}_{\max}(x) \times \{x\} \subset \mathcal{D}^{t_0} ,$$

ce qui conclut la démonstration. □

Définition 4.4. On appelle *flot local* à l'instant t_0 associé au système $u' = f(t, u)$, l'application $\varphi^{t_0} : \mathcal{D}^{t_0} \to \mathbb{R}^N$ telle que $\varphi^{t_0}(\cdot, x) : I^{t_0}_{\max}(x) \to \mathbb{R}^N$ soit la solution maximale de (4.1) pour tout $x \in \mathscr{U}$. L'ensemble $\mathcal{D}^{t_0}$ est appelé *domaine du flot* à l'instant t_0.

Remarque 31. Si pour tout $x_0 \in \mathscr{U}$, la solution de (4.1) est globale, alors $\mathcal{D}^{t_0} = I \times \mathscr{U}$.

Exemple 7. Soient $A : I \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^N)$ et $b : I \to \mathbb{R}^N$ deux applications continues. On considère le système différentiel linéaire

$$u' = A(t)u + b(t) .$$

D'après le Théorème 2.19, le flot φ^{t_0} est donné par

$$\varphi^{t_0}(t, x) = R(t, t_0)x + \int_{t_0}^{t} R(t, s)b(s)\, ds ,$$

où $R(t, t_0)$ est la résolvante du système homogène associé. Le domaine du flot est ici donné par $\mathcal{D}^{t_0} = I \times \mathbb{R}^N$.

Dans la suite, nous allons nous intérésser aux propriétés de *régularité* du flot, c'est à dire continuité et dérivabilité. Nous commençons par montrer que le flot est une application continue sur son domaine.

Théorème 4.5. *L'application $\varphi^{t_0} : \mathcal{D}^{t_0} \to \mathbb{R}^N$ est localement Lipschitzienne. Plus précisement, pour tout $(t_*, x_*) \in \mathcal{D}^{t_0}$, il existe des constantes $\delta_1, \delta_2 > 0$, $\varepsilon > 0$, et $C_* \geqslant 0$ telles que $t_* \in]t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_2[$, $[t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_2] \times \overline{B}_\varepsilon(x_*) \subset \mathcal{D}^{t_0}$, et*

$$\|\varphi^{t_0}(t_1, x) - \varphi^{t_0}(t_2, y)\|_2 \leqslant C_*\big(|t_1 - t_2| + \|x_1 - x_2\|_2\big) \tag{4.6}$$

pour tous $(t_1, x), (t_2, y) \in [t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_2] \times \overline{B}_\varepsilon(x_*)$.

Démonstration. Comme dans démonstration du Corollaire 4.3, nous pouvons trouver $\delta_1, \delta_2 > 0$ tels que $t_0 - \delta_1 < t_* < t_0 + \delta_2$ et $[t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_2] \subset I^{t_0}_{\max}(x_*)$. Soient $\varepsilon > 0$ et $\mathscr{W} \subset \mathscr{U}$ donnés par le Lemme 4.2 et la Remarque 30. Nous avons alors $[t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_2] \subset I^{t_0}_{\max}(x)$ pour tout $x \in \overline{B}_\varepsilon(x_*)$, et

$$\varphi^{t_0}(t, x) \in \mathscr{W} \qquad \forall (t, x) \in [t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_2] \times \overline{B}_\varepsilon(x_*) . \tag{4.7}$$

Comme $[t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_2] \times \overline{\mathscr{W}}$ est un compact de $I \times \mathscr{U}$, il existe une constante $M \geqslant 0$ telle que $\|f(t,x)\|_2 \leqslant M$ pour tout $(t,x) \in [t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_2] \times \overline{\mathscr{W}}$. En particulier,

$$\|f(t, \varphi^{t_0}(t,x))\|_2 \leqslant M \qquad \forall (t,x) \in [t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_2] \times \overline{B}_\varepsilon(x_*)\,. \tag{4.8}$$

La Proposition 4.1 (avec $[t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_2] \times \mathscr{W}$ au lieu de $I \times \mathscr{U}$), (4.5) et (4.7) impliquent également que

$$\|\varphi(t,x) - \varphi(t,y)\|_2 \leqslant \|x-y\|_2 e^{K|t-t_0|} \leqslant e^{K(\delta_1+\delta_2)} \|x-y\|_2 \tag{4.9}$$

pour tous $(t,x), (t,y) \in [t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_2] \times \overline{B}_\varepsilon(x_*)$.

Soient $(t_1,x), (t_2,y) \in [t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_2] \times \overline{B}_\varepsilon(x_*)$ arbitraires. Par l'inégalité triangulaire, nous avons

$$\begin{aligned} \|\varphi^{t_0}(t_1,x) - \varphi^{t_0}(t_2,y)\|_2 \leqslant{} & \|\varphi^{t_0}(t_1,x) - \varphi^{t_0}(t_2,x)\|_2 \\ & + \|\varphi^{t_0}(t_2,x) - \varphi^{t_0}(t_2,y)\|_2\,. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Comme $\varphi^{t_0}(\cdot, x)$ est la solution maximale de (4.1) vérifiant $\varphi^{t_0}(t_0,x) = x$, nous avons

$$\varphi^{t_0}(t,x) = x + \int_{t_0}^{t} f\big(s, \varphi^{t_0}(s,x)\big)\, ds \qquad \forall\, t \in [t_1, t_2]\,.$$

En particulier, on déduit de (4.8) que

$$\|\varphi^{t_0}(t_1,x) - \varphi^{t_0}(t_2,x)\|_2 = \left\| \int_{t_1}^{t_2} f\big(s, \varphi^{t_0}(s,x)\big)\, ds \right\|_2 \leqslant M|t_2 - t_1|\,. \tag{4.11}$$

D'après (4.9) nous avons

$$\|\varphi(t_2,x) - \varphi(t_2,y)\|_2 \leqslant e^{K(\delta_1+\delta_2)} \|x-y\|_2\,. \tag{4.12}$$

On obtient alors (4.6) avec $C_* := \max(M, e^{K(\delta_1+\delta_2)})$ en combinant (4.10), (4.11) et (4.12). $\square$

4.1.2 Différentiabilité du flot

Théorème 4.6. *Supposons que f soit différentiable par rapport x sur $I \times \mathscr{U}$, et que sa différentielle par rapport à x, notée $D_x f : I \times \mathscr{U} \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^N)$, soit continue. Alors φ^{t_0} est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathcal{D}^{t_0}$. De plus,*

(i) la différentielle de φ^{t_0} par rapport à x, notée $D_x\varphi^{t_0} : \mathcal{D}^{t_0} \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^N)$, est dérivable par rapport à t et sa dérivée, notée $\partial_t(D_x\varphi^{t_0}) : \mathcal{D}^{t_0} \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^N)$, est continue ;

(ii) la dérivée de φ^{t_0} par rapport à t, notée $\partial_t\varphi^{t_0} : \mathcal{D}^{t_0} \to \mathbb{R}^N$, est différentiable par rapport à x et sa différentielle, notée $D_x(\partial_t\varphi^{t_0}) : \mathcal{D}^{t_0} \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^N)$, est continue ;

(iii) $\partial_t(D_x\varphi^{t_0}) = D_x(\partial_t\varphi^{t_0})$;

(iv) la différentielle $D_x\varphi^{t_0}$ vérifie

$$\begin{cases} \partial_t\big(D_x\varphi^{t_0}(t,x)\big) = D_x f\big(t, \varphi^{t_0}(t,x)\big) \circ D_x\varphi^{t_0}(t,x) & \textit{pour tout } (t,x) \in \mathcal{D}^{t_0}\,, \\ D_x\varphi^{t_0}(t_0,x) = Id_N & \textit{pour tout } x \in \mathscr{U}\,. \end{cases}$$

Exemple 8. Soient $A : I \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^N)$ et $b : I \to \mathbb{R}^N$ deux applications continues. On considère le système différentiel linéaire

$$u' = A(t)u + b(t)\,,$$

si bien que dans ce cas $f(t,x) = A(t)x + b(t)$, et $D_x f(t,x) = A(t)$. Nous avons vu dans l'Exemple 7 que $\varphi^{t_0}(t,x) = R(t,t_0)x + \int_{t_0}^t R(t,s)b(s)\,ds$ où $R(t,t_0)$ est la résolvante du système homogène associé. On obtient alors

$$D_x\varphi^{t_0}(t,x) = R(t,t_0)\,,$$

et on retrouve bien le résultat du Théorème 4.6 d'après (2.14).

Démonstration du Théorème 4.6, Première partie. Soit $(t_*, x_*) \in \mathcal{D}^{t_0}$ arbitraire. Comme dans démonstration du Corollaire 4.3, il existe $\delta_1, \delta_2 > 0$ tels que $t_0 - \delta_1 < t_* < t_0 + \delta_2$ et $[t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_2] \subset I^{t_0}_{\max}(x_*)$. Soient $r > \varepsilon > 0$ et $\mathscr{W} \subset \mathscr{U}$ donnés par le Lemme 4.2 et la Remarque 30. On notera $J := [t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_2]$. On se fixe $x_0 \in B_\varepsilon(x_*)$ quelconque.

Puisque $J \times \overline{\mathscr{W}}$ est compact et $D_x f$ continue, il existe $\alpha \geqslant 0$ tel que

$$|\!|\!| D_x f(t,x) |\!|\!|_2 \leqslant \alpha \qquad \forall (t,x) \in J \times \overline{\mathscr{W}}\,. \tag{4.13}$$

On considère l'application $A : J \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^N)$ définie par

$$A(t) := D_x f\big(t, \varphi^{t_0}(t,x_0)\big)\,.$$

Alors A est continue comme composée d'applications continues. De plus d'après la Remarque 30, $\varphi^{t_0}(t,x_0) \in \mathscr{W}$ pour tout $t \in J$. On a donc

$$\sup_{t \in J} |\!|\!| A(t) |\!|\!|_2 \leqslant \alpha\,.$$

D'après les résultats du Chapitre 2, il existe une unique solution $R : J \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^N)$ du problème de Cauchy

$$\begin{cases} R' = A(t) \circ R \\ R(t_0) = Id_N \end{cases}. \tag{4.14}$$

Nous allons montrer dans cette première partie que pour tout $t \in J$ fixé,

$$\|\varphi^{t_0}(t,x) - \varphi^{t_0}(t,x_0) - R(t)(x - x_0)\|_2 = o(\|x - x_0\|_2) \qquad \forall\, x \in B_\varepsilon(x_*)\,.$$

Ceci montrera alors que l'application $\varphi^{t_0}(t,\cdot)$ est différentiable en x_0, de différentielle égale à $R(t)$. De plus, comme R est de classe $\mathscr{C}^1$, on aura obtenu que $D_x\varphi^{t_0}(\cdot,x_0)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ au voisinage de t_*, et que $D_x\varphi^{t_0}(\cdot,x_0)$ est solution au voisinage de t_* de

$$\begin{cases} \partial_t\big(D_x\varphi^{t_0}(t,x_0)\big) = D_x f\big(t,\varphi^{t_0}(t,x_0)\big) \circ D_x\varphi^{t_0}(t,x_0)\,, \\ D_x\varphi^{t_0}(t_0,x_0) = Id_N\,. \end{cases}$$

Étape 1. Pour $x \in B_\varepsilon(x_*)$ fixé, on considère $v : J \to \mathbb{R}^N$ définie par

$$v(t) := \varphi^{t_0}(t,x) - \varphi^{t_0}(t,x_0) - R(t)(x - x_0)\,.$$

Alors v est continue, dérivable, $v(t_0) = 0$, et

$$
\begin{aligned}
v'(t) &= f\big(t, \varphi^{t_0}(t,x)\big) - f\big(t, \varphi^{t_0}(t,x_0)\big) - A(t) \circ R(t)(x - x_0) \\
&= f\big(t, \varphi^{t_0}(t,x)\big) - f\big(t, \varphi^{t_0}(t,x_0)\big) - A(t)\big(\varphi^{t_0}(t,x) - \varphi^{t_0}(t,x_0)\big) + A(t)v(t)\,.
\end{aligned}
$$

Et donc

$$
\begin{aligned}
v'(t) - A(t)v(t) = f\big(t, \varphi^{t_0}(t,x)\big) &- f\big(t, \varphi^{t_0}(t,x_0)\big) \\
&- A(t)\big(\varphi^{t_0}(t,x) - \varphi^{t_0}(t,x_0)\big)\,.
\end{aligned}
$$

Nous allons dans la suite majorer le membre de droite de cette égalité. A ce propos, pour simplifier les notations, nous noterons

$$
\bar{x}_t := \varphi^{t_0}(t,x_0) \quad \text{et} \quad u_*(t) := \varphi^{t_0}(t,x_*)\,.
$$

Étape 2. D'après la Remarque 30, $\bar{x}_t \in B_r(u_*(t)) \subset \mathscr{W}$ pour tout $t \in J$. On se donne maintenant $t \in J$ et $y \in B_r(u_*(t))$. On considère alors l'application $g : [0,1] \to \mathbb{R}^N$ définie par

$$
g(\lambda) := f(t, \lambda y + (1-\lambda)\bar{x}_t) - f(t, \bar{x}_t) - \lambda A(t)(y - \bar{x}_t)\,,
$$

et remarquons que $\lambda y + (1-\lambda)\bar{x}_t \in B_r(u_*(t))$ pour tout $\lambda \in [0,1]$ par convexité de la boule. L'application g est alors de classe $\mathscr{C}^1$, et

$$
\begin{aligned}
g'(\lambda) &= D_x f(t, \lambda y + (1-\lambda)\bar{x}_t)(y - \bar{x}_t) - A(t)(y - \bar{x}_t) \\
&= \big(D_x f(t, \lambda y + (1-\lambda)\bar{x}_t) - D_x f(t, \bar{x}_t)\big)(y - \bar{x}_t)\,.
\end{aligned}
$$

On en déduit alors que

$$
\|g'(\lambda)\|_2 \leqslant \| D_x f(t, \lambda y + (1-\lambda)\bar{x}_t) - D_x f(t, \bar{x}_t) \|_2 \|y - \bar{x}_t\|_2 \leqslant m_{t,\bar{x}_t,y} \|y - \bar{x}_t\|_2\,,
$$

où l'on a posé

$$
m_{t,\bar{x}_t,y} := \max_{\lambda \in [0,1]} \| D_x f(t, \lambda y + (1-\lambda)\bar{x}_t) - D_x f(t, \bar{x}_t) \|_2\,.
$$

D'après l'inégalité des accroissements finis nous avons

$$
\|g(1) - g(0)\|_2 \leqslant m_{t,\bar{x}_t,y} \|y - \bar{x}_t\|_2\,,
$$

c'est à dire

$$
\|f(t,y) - f(t,\bar{x}_t) - A(t)(y - \bar{x}_t)\|_2 \leqslant m_{t,\bar{x}_t,y} \|y - \bar{x}_t\|_2
$$

pour tout $(t,y) \in J \times B_r(u_*(t))$.

Étape 3. L'application

$$
(t,\lambda,x) \in J \times [0,1] \times \overline{B}_\varepsilon(x_*) \mapsto D_x f(t, \lambda\varphi^{t_0}(t,x) + (1-\lambda)\bar{x}_t) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^N)
$$

est continue comme composée d'applications continues, et donc elle est uniformément continue puisque $J \times [0,1] \times \overline{B}_\varepsilon(x_*)$ est compact. En particulier, pour tout $\delta > 0$, il existe $0 < \kappa_\delta < \varepsilon$ tel que

$$
\| D_x f(t, \lambda\varphi^{t_0}(t,x) + (1-\lambda)\bar{x}_t) - D_x f(t, \bar{x}_t) \|_2 < \delta \quad \text{pour tout } (t,\lambda) \in J \times [0,1]
$$

dès que $\|x - x_0\|_2 < \kappa_\delta$.

Or d'après la Remarque 30 *(iii)*, $\varphi^{t_0}(t,x) \in B_r(u_*(t))$ pour tout $(t,x) \in J \times \overline{B}_\varepsilon(x_*)$. Donc $m_{t,\bar{x}_t,\varphi^{t_0}(t,x)} < \delta$ dès que $x \in B_{\kappa_\delta}(x_0) \cap B_\varepsilon(x_*)$. On déduit alors de l'étape précédante que

$$\|f\big(t,\varphi^{t_0}(t,x)\big) - f(t,\bar{x}_t) - A(t)\big(\varphi^{t_0}(t,x) - \bar{x}_t\big)\|_2 \leqslant \delta\|\varphi^{t_0}(t,x) - \bar{x}_t\|_2 \quad \forall t \in J$$

dès que $x \in B_{\kappa_\delta}(x_0) \cap B_\varepsilon(x_*)$.

Mais comme $B_r(u_*(t)) \subset \mathscr{W}$ pour tout $t \in J$, d'après Remarque 30 *(i)* on peut appliquer la Proposition 4.1 (avec $J \times \mathscr{W}$ au lieu de $I \times \mathscr{U}$) pour obtenir que

$$\|\varphi^{t_0}(t,x) - \bar{x}_t\|_2 \leqslant e^{K(\delta_1+\delta_2)}\|x - x_0\|_2 \qquad \text{pour tout } (t,y) \in J \times \overline{B}_\varepsilon(x_*)\,.$$

En conclusion, nous avons donc obtenu que pour tout $\delta > 0$, il existe $0 < \kappa_\delta < \varepsilon$ tel que

$$\|f\big(t,\varphi^{t_0}(t,x)\big) - f(t,\bar{x}_t) - A(t)\big(\varphi^{t_0}(t,x) - \bar{x}_t\big)\|_2 \leqslant \delta e^{K(\delta_1+\delta_2)}\|x - x_0\|_2 \quad \forall t \in J$$

dès que $x \in B_{\kappa_\delta}(x_0) \cap B_\varepsilon(x_*)$.

Étape 4. D'après l'étape précédante, pour tout $\delta > 0$, il existe $0 < \kappa_\delta < \varepsilon$ tel que

$$\|v'(t) - A(t)v(t)\|_2 \leqslant \tilde{K}\delta\|x - x_0\|_2 \qquad \forall t \in J$$

dès que $x \in B_{\kappa_\delta}(x_0) \cap B_\varepsilon(x_*)$, où l'on a posé $\tilde{K} := e^{K(\delta_1+\delta_2)}$.

En particulier, pour tout $t \in J$ et $x \in B_\varepsilon(x_*)$ tel que $\|x - x_0\|_2 < \kappa_\delta$, on a

$$\|v'(t)\|_2 \leqslant |||A(t)|||_2\|v(t)\|_2 + \tilde{K}\delta\|x - x_0\|_2 \leqslant \alpha\|v(t)\|_2 + \tilde{K}\delta\|x - x_0\|_2\,.$$

Pour $t \in [0,\delta_2]$ on pose

$$w(t) := \|v(t+t_0)\|_2^2\,,$$

si bien que w est dérivable sur $]0,\delta_2[$ et

$$\begin{aligned} w'(t) &= 2\langle v(t+t_0), v'(t+t_0)\rangle \leqslant 2\|v(t+t_0)\|_2\|v'(t+t_0)\|_2 \\ &\leqslant 2\alpha w(t) + 2\tilde{K}\delta\|v(t+t_0)\|_2\|x - x_0\|_2 \leqslant (2\alpha+1)w(t) + \tilde{K}^2\delta^2\|x - x_0\|_2^2\,. \end{aligned}$$

D'après le Lemme 3.8, nous avons

$$w(t) + \frac{\tilde{K}^2\delta^2}{2\alpha+1}\|x - x_0\|_2^2 \leqslant \left(w(0) + \frac{\tilde{K}^2\delta^2}{2\alpha+1}\|x - x_0\|_2^2\right)e^{(2\alpha+1)t} \quad \forall t \in [0,\delta_2]\,.$$

Mais comme $w(0) = \|v(t_0)\|_2^2 = 0$, nous en déduisons que

$$w(t) \leqslant M^2\delta^2\|x - x_0\|_2^2 \qquad \text{avec } M := \frac{\tilde{K}}{\sqrt{2\alpha+1}}e^{(\alpha+1/2)(\delta_1+\delta_2)}$$

pour tout $t \in [0,\delta_2]$.

Nous avons donc obtenu

$$\|v(t)\|_2 \leqslant M\delta\|x - x_0\|_2 \qquad \forall t \in [t_0, t_0+\delta_2]\,,$$

dès que $x \in B_{\kappa_\delta}(x_0) \cap B_\varepsilon(x_*)$. En appliquant, la même méthode à la fonction $\tilde{w}(t) = \|v(t_0 - t)\|_2^2$ défine sur l'intervalle $[0,\delta_1]$, nous obtenons finallement

$$\|v(t)\|_2 \leqslant M\delta\|x - x_0\|_2 \qquad \forall t \in J\,,$$

dès que $x \in B_{\kappa_\delta}(x_0) \cap B_\varepsilon(x_*)$.

En conclusion, étant donné $t \in J$ arbitraire, pour tout $\delta > 0$,

$$\frac{\|\varphi^{t_0}(t,x) - \varphi^{t_0}(t,x_0) - R(t)(x-x_0)\|_2}{\|x-x_0\|_2} \leqslant M\delta$$

dès que $x \in B_{\kappa_\delta}(x_0) \cap B_\varepsilon(x_*)$. En conséquence, pour tout $t \in J$,

$$\|\varphi^{t_0}(t,x) - \varphi^{t_0}(t,x_0) - R(t)(x-x_0)\|_2 = o(\|x-x_0\|_2)\,,$$

et donc $x \in B_\varepsilon(x_*) \mapsto \varphi^{t_0}(t,x)$ est différentiable en x_0 et sa différentielle en x_0 est égale à $R(t)$. $\square$

Démonstration du Théorème 4.6, Deuxième partie. Nous savons maintenant que pour tout $x \in \mathscr{U}$, l'application $t \in I_{\max}^{t_0}(x) \mapsto \varphi^{t_0}(t,x)$ est de classe $\mathscr{C}^1$. Nous allons montrer maintenant que l'application $(t,x) \in \mathcal{D}^{t_0} \mapsto D_x\varphi^{t_0}(t,x)$ est continue par rapport à x. On aura alors obtenu que φ^{t_0} est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathcal{D}^{t_0}$ (nous savons déjà que pour tout $x \in \mathscr{U}$, l'application $t \in I_{\max}^{t_0}(x) \mapsto \varphi^{t_0}(t,x)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ puisque $\varphi^{t_0}(\cdot,x)$ est solution du système différentiel).

Comme dans la première partie, on se fixe $(t_*,x_*) \in \mathcal{D}^{t_0}$ arbitraire, et on utilise les mêmes notations. Pour simplifier la présentation, nous noterons pour $t \in J$ et $x \in \overline{B}_\varepsilon(x_*)$,

$$A(t,x) := D_xf\big(t,\varphi^{t_0}(t,x)\big)\,,$$

et

$$R(t,x) := D_x\varphi^{t_0}(t,x)\,.$$

On se donne maintenant $x_0 \in B_\varepsilon(x_*)$ quelconque, et nous allons montrer que pour tout $t \in J$, l'application $x \in B_\varepsilon(x_*) \mapsto R(t,x) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^N)$ est continue en x_0.

Comme dans la première partie, nous avons

$$|||A(t,x)|||_2 \leqslant \alpha \qquad \forall (t,x) \in J \times \overline{B}_\varepsilon(x_*)\,,$$

où α est donné par (4.13). De plus, $t \in J \mapsto R(t,x_0)$ est continue et J est compact. Il existe donc $\beta > 0$ tel que

$$|||R(t,x_0)|||_2 \leqslant \beta \qquad \forall t \in J\,.$$

On se donne $\delta > 0$ quelconque. Nous allons trouver $\gamma > 0$ tel que si $x \in B_\varepsilon(x_*)$ et $\|x-x_0\|_2 < \gamma$ alors $|||R(t,x) - R(t,x_0)|||_2 < \delta$ pour tout $t \in J$. Ceci montrera la continuité voulue.

Puisque A est continue sur $J \times \overline{B}_\varepsilon(x_*)$ compact, A est uniformément continue. En particulier, il existe $\gamma > 0$ tel que si $x \in B_\varepsilon(x_*)$ et $\|x-x_0\|_2 < \gamma$ alors

$$|||A(t,x) - A(t,x_0)|||_2 < \delta' \qquad \forall t \in J\,,$$

avec

$$\delta' := \frac{\delta\sqrt{2\alpha+1}}{\beta}e^{-(\alpha+1/2)(\delta_1+\delta_2)}\,.$$

Pour $x \in B_\varepsilon(x_*)$ tel que $\|x-x_0\|_2 < \gamma$ et $\nu \in \mathbb{R}^N$ avec $\|\nu\|_2 = 1$, d'après (4.14) nous avons

$$\begin{aligned}
\big\|\big(R'(t,x) - R'(t,x_0)\big)\nu\big\|_2 &= \big\|\big(A(t,x)\circ R(t,x) - A(t,x_0)\circ R(t,x_0)\big)\nu\big\|_2 \\
&\leqslant \big\|A(t,x)\circ\big(R(t,x) - R(t,x_0)\big)\nu\big\|_2 + \big\|\big(A(t,x) - A(t,x_0)\big)\circ R(t,x_0)\nu\big\|_2 \\
&\leqslant |||A(t,x)|||_2\big\|\big(R(t,x) - R(t,x_0)\big)\nu\big\|_2 + |||A(t,x) - A(t,x_0)|||_2\|R(t,x_0)\nu\|_2 \\
&\leqslant \alpha\big\|\big(R(t,x) - R(t,x_0)\big)\nu\big\|_2 + \beta\delta'\,.
\end{aligned}$$

Pour $t \in [0, \delta_2]$, on définit maintenant la fonction

$$\zeta(t) := \big\| \big(R(t_0 + t, x) - R(t_0 + t, x_0)\big)\nu \big\|_2^2 .$$

Alors ζ est dérivable sur $]0, \delta_2[$ et

$$\begin{aligned}
\zeta'(t) &= 2\big\langle \big(R'(t_0 + t, x) - R'(t_0 + t, x_0)\big)\nu, \big(R(t_0 + t, x) - R(t_0 + t, x_0)\big)\nu \big\rangle \\
&\leqslant 2\big\| \big(R'(t_0 + t, x) - R'(t_0 + t, x_0)\big)\nu \big\|_2 \big\| \big(R(t_0 + t, x) - R(t_0 + t, x_0)\big)\nu \big\|_2 \\
&\leqslant 2\alpha\zeta(t) + 2\beta\delta' \big\| \big(R(t_0 + t, x) - R(t_0 + t, x_0)\big)\nu \big\|_2 \\
&\leqslant (2\alpha + 1)\zeta(t) + (\beta\delta')^2 .
\end{aligned}$$

D'après le Lemme 3.8, nous avons

$$\zeta(t) + \frac{(\beta\delta')^2}{2\alpha + 1} \leqslant \left(\zeta(0) + \frac{(\beta\delta')^2}{2\alpha + 1} \right) e^{(2\alpha+1)t} \qquad \forall\, t \in [0, \delta_2] .$$

Or $\zeta(0) = 0$, et on en déduit que

$$\big\| \big(R(t, x) - R(t, x_0)\big)\nu \big\|_2 < \frac{\beta\delta'}{\sqrt{2\alpha + 1}} e^{(\alpha+1/2)(\delta_1+\delta_2)} = \delta \qquad \forall t \in [t_0, t_0 + \delta_2] .$$

En appliquant la même méthode à la fonction

$$\tilde{\zeta}(t) := \big\| \big(R(t_0 - t, x) - R(t_0 - t, x_0)\big)\nu \big\|_2^2$$

définie pour $t \in [0, \delta_1]$, on obtient

$$\big\| \big(R(t, x) - R(t, x_0)\big)\nu \big\|_2 < \delta \qquad \forall t \in J .$$

En passant maintenant au maximum sur ν, il suit alors que $|\!|\!| R(t, x) - R(t, x_0) |\!|\!|_2 < \delta$ pour tout $t \in J$. □

Démonstration du Théorème 4.6, Troisième partie. Il ne nous reste maintenant plus qu'à montrer les points *(ii)* et *(iii)* du théorème.

Par définition de l'application φ^{t_0}, nous avons

$$\partial_t \varphi^{t_0}(t, x) = f\big(t, \varphi^{t_0}(t, x)\big) \qquad \forall (t, x) \in \mathcal{D}^{t_0} .$$

Or l'application $(t, x) \in \mathcal{D}^{t_0} \mapsto f\big(t, \varphi^{t_0}(t, x)\big) \in \mathbb{R}^N$ est différentiable par rapport à x sur $\mathcal{D}^{t_0}$ puisque f et φ^{t_0} le sont. De plus, la différentielle $D_x(f(\cdot, \varphi^{t_0}))$ est continue sur $\mathcal{D}^{t_0}$ puisque celles de f et φ^{t_0} le sont. En conclusion $\partial_t \varphi^{t_0}$ est différentiable par rapport à x sur $\mathcal{D}^{t_0}$, et $D_x(\partial_t \varphi^{t_0})$ est continue sur $\mathcal{D}^{t_0}$. La formule de dérivation d'applications composées nous donne alors

$$D_x(\partial_t \varphi^{t_0}(t, x)) = D_x f(t, \varphi^{t_0}(t, x)) \circ D_x \varphi^{t_0}(t, x) = \partial_t(D_x \varphi^{t_0}(t, x)) ,$$

ce qui termine la démonstration. □

4.2 Systèmes à paramètre

Soit Λ un ouvert de $\mathbb{R}$. On considère une application $f : I \times \mathscr{U} \times \Lambda \to \mathbb{R}^N$ que l'on supposera continue et localement Lipschitzienne par rapport au couple $(x, \lambda) \in \mathscr{U} \times \Lambda$, c'est à dire pour tout $(t_0, x_0, \lambda_0) \in I \times \mathscr{U} \times \Lambda$, il existe un voisinage $\mathscr{V}_{(t_0,x_0,\lambda_0)}$ de (t_0, x_0, λ_0) dans $I \times \mathscr{U} \times \Lambda$ et une constante C_0 tel que

$$\|f(t, x, \lambda_1) - f(t, y, \lambda_2)\|_\star \leqslant C_0\big(\|x - y\|_\star + |\lambda_1 - \lambda_2|\big)$$

pour tous $(t, x, \lambda_1), (t, y, \lambda_2) \in \mathscr{V}_{(t_0,x_0,\lambda_0)}$.

Etant donné $x \in \mathscr{U}$, Le but de cette section est l'étude de la dépendance supplémentaire par rapport à λ de la solution maximale du problème de Cauchy à paramètre

$$\begin{cases} u' = f(t, u, \lambda) \\ u(t_0) = x \end{cases} . \tag{4.15}$$

Pour chaque $(x, \lambda) \in \mathscr{U} \times \Lambda$, (4.15) admet une unique solution maximale que nous noterons $\varphi^{t_0}(\cdot, x, \lambda)$. On notera $I^{t_0}_{\max}(x, \lambda)$ son intervalle maximal d'existence.

Les résultats suivants sont directement obtenus de la section précédante. Commençons par un résultat de continuité.

Théorème 4.7. *Soit*

$$\mathcal{D}^{t_0}_\Lambda := \bigcup_{(x,\lambda)\in\mathscr{U}\times\Lambda} I^{t_0}_{\max}(x, \lambda) \times \{(x, \lambda)\} .$$

L'ensemble $\mathcal{D}^{t_0}_\Lambda$ est un ouvert de $I \times \mathscr{U} \times \Lambda$, et l'application $\varphi^{t_0} : \mathcal{D}^{t_0}_\Lambda \to \mathbb{R}^N$ est localement Lipschitzienne.

Démonstration. On va se ramener au Théorème 4.5 de la façon suivante. On note $y = (x, \lambda) \in \mathbb{R}^{N+1}$, et on définit $F = (F_1, \ldots, F_N, F_{N+1}) : I \times \mathscr{U} \times \Lambda \to \mathbb{R}^{N+1}$ par $(F_1, \ldots, F_N)(t, y) := f(t, x, \lambda)$ et $F_{N+1}(t, y) := 0$, si bien que F est continue et localement Lipschitzienne par rapport à y sur l'ouvert $\mathscr{U} \times \Lambda$ de $\mathbb{R}^{N+1}$. Pour $y = (x, \lambda) \in \mathscr{U} \times \Lambda$, on considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} v' = F(t, v) \\ v(t_0) = y \end{cases} . \tag{4.16}$$

Si l'on écrit $v = (u, v_{N+1})$ avec $u = (v_1, \ldots, v_N)$, ce système s'écrit

$$\begin{cases} u' = f(t, u, v_{N+1}) \\ v'_{N+1} = 0 \\ u(t_0) = x \\ v_{N+1}(t_0) = \lambda \end{cases} .$$

On remarque alors que v est la solution maximale de (4.16) si et seulement si v_{N+1} est constante égale à λ et u est la solution maximale de (4.15).

En particulier, si l'on note $\Phi^{t_0} = (\Phi^{t_0}_1, \ldots, \Phi^{t_0}_N, \Phi^{t_0}_{N+1})$ le flot local de (4.16) à l'instant t_0, alors d'après le Corollaire4.3 et le Théorème 4.5 :

1) $\mathcal{D}^{t_0}_\Lambda$ est le domaine de Φ^{t_0}, et il s'agit donc d'un ouvert de $I \times \mathscr{U} \times \Lambda$;

2) Φ^{t_0} est localement Lipschitzienne par rapport à (x, λ) ;

3) $\Phi^{t_0}_{N+1}(t, x, \lambda) = \lambda$ pour tout $(t, x, \lambda) \in \mathcal{D}^{t_0}_\Lambda$, et la fonction $(t, x, \lambda) \in I^{t_0}_{\max}(x, \lambda) \mapsto (\Phi^{t_0}_1, \ldots, \Phi^{t_0}_N)(t, x, \lambda)$ est la solution maximale de (4.15).

En conséquence, $\varphi^{t_0} = (\Phi^{t_0}_1, \ldots, \Phi^{t_0}_N)$, et donc φ^{t_0} est localement Lipschitzienne sur $\mathcal{D}^{t_0}_\Lambda$. □

En ce qui concerne la différentiabilité par rapport au paramètre λ, nous avons le résultat suivant.

Théorème 4.8. *Supposons que f soit différentiable par rapport x et dérivable par rapport à λ sur $I \times \mathscr{U} \times \Lambda$, et que ses différentielles par rapport à x et λ, notées $D_x f : I \times \mathscr{U} \times \Lambda \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^N)$ et $\partial_\lambda f : I \times \mathscr{U} \times \Lambda \to \mathbb{R}^N$, soient continues. Alors φ^{t_0} est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathcal{D}_\Lambda^{t_0}$. De plus,*

(i) la dérivée de φ^{t_0} par rapport à λ, notée $\partial_\lambda \varphi^{t_0} : \mathcal{D}_\Lambda^{t_0} \to \mathbb{R}^N$, est dérivable par rapport à t et sa dérivée, notée $\partial_t(\partial_\lambda \varphi^{t_0}) : \mathcal{D}_\Lambda^{t_0} \to \mathbb{R}^N$, est continue ;

(ii) la dérivée de φ^{t_0} par rapport à t, notée $\partial_t \varphi^{t_0} : \mathcal{D}^{t_0} \to \mathbb{R}^N$, est dérivable par rapport à λ et sa dérivée, notée $\partial_\lambda(\partial_t \varphi^{t_0}) : \mathcal{D}_\Lambda^{t_0} \to \mathbb{R}^N$, est continue ;

(iii) $\partial_t(\partial_\lambda \varphi^{t_0}) = \partial_\lambda(\partial_t \varphi^{t_0})$;

(iv) la dérivée $\partial_\lambda \varphi^{t_0}$ vérifie pour tout $(t, x, \lambda) \in \mathcal{D}_\Lambda^{t_0}$,

$$\begin{aligned} \partial_t\big(\partial_\lambda \varphi^{t_0}(t, x, \lambda)\big) = D_x f\big(t, \varphi^{t_0}(t, x, \lambda), \lambda\big)\partial_\lambda \varphi^{t_0}(t, x, \lambda) \\ + \partial_\lambda f\big(t, \varphi^{t_0}(t, x, \lambda), \lambda\big)\,, \end{aligned}$$

et $\partial_\lambda \varphi^{t_0}(t_0, x, \lambda) = 0$ pour tout $(x, \lambda) \in \mathscr{U} \times \Lambda$.

Démonstration. On reprend la démonstration du Théorème 4.7. Puisque f est différentiable par rapport x et dérivable par rapport à λ sur $I \times \mathscr{U} \times \Lambda$, et que ses différentielles par rapport à x et λ sont continues, l'application F est différentiable par rapport $y = (x, \lambda)$ sur $I \times \mathscr{U} \times \Lambda$ et $D_y F : I \times \mathscr{U} \times \Lambda \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^{N+1})$ est continue. On peut donc appliquer le Théorème 4.6. On obtient alors que $\Phi^{t_0} = (\varphi^{t_0}, \Phi_{N+1}^{t_0})$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathcal{D}_\Lambda^{t_0}$, ainsi que (i), (ii), et (iii). De plus, dans l'ouvert $\mathcal{D}_\Lambda^{t_0}$ on a

$$\begin{aligned} \partial_t(\partial_\lambda \varphi^{t_0}) &= \sum_{j=1}^{N+1} \frac{\partial f}{\partial y_j}(t, \Phi^{t_0})\partial_\lambda \Phi_j^{t_0} \\ &= \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_j}(t, \varphi^{t_0}, \lambda)\partial_\lambda \varphi_j^{t_0} + \partial_\lambda f(t, \varphi^{t_0}, \lambda)\partial_\lambda \Phi_{N+1}^{t_0} \\ &= D_x f(t, \varphi^{t_0}, \lambda)\partial_\lambda \varphi^{t_0} + \partial_\lambda f(t, \varphi^{t_0}, \lambda)\,, \end{aligned}$$

et on a utilisé le fait que $\partial_\lambda \Phi_{N+1}^{t_0} = 1$ puisque $\Phi_{N+1}^{t_0}(t, x, \lambda) = \lambda$. Finallement, puisque $\varphi^{t_0}(t_0, x, \lambda) = x$ pour tout $(x, \lambda) \in \mathscr{U} \times \Lambda$, on obtient directement que $\partial_\lambda \varphi^{t_0}(t_0, \cdot, \cdot) = 0$. □

4.3 Problèmes

Exercice 14. On considère un système différentiel $u' = f(t, u)$ où $f : I \times \mathscr{U} \to \mathbb{R}^N$ est une application donnée continue et localement Lipschitzienne par rapport à x. Montrer que si l'ouvert $\mathscr{U}$ est connexe alors le domaine $\mathcal{D}^{t_0}$ du flot est également connexe (*indication :* on pourra utiliser le fait que tout ouvert connexe de $\mathbb{R}^N$ est connexe par arcs).

Exercice 15. Pour $N = 1$ et $I = \mathbb{R}$, on considère le flot φ^0 en 0 de l'équation différentielle scalaire

$$u' = au^2 + bu + c \tag{4.17}$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$ sont des paramètres donnés avec $a \neq 0$.

1) Déterminer explicitement $\varphi^0(t, x)$ et son domaine $\mathcal{D}^0$ dans les cas suivants :

(i) $a = 1$ et $b = c = 0$;

(ii) $a = 1$, $b = 0$ et $c = 1$;

(iii) $a = 1$, $b = 0$ et $c = -1$;

2) Dans la cas général, montrer que si u est une solution de (4.17), alors on peut déterminer $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ avec $\gamma > 0$ tels que la fonction $v(t) = \alpha u(\gamma t) + \beta$ soit solution de l'équation dans un des cas *(i)*, *(ii)* ou *(iii)* ci-dessus.

3) On fixe $a = 1$ et $b = 0$, et on note $\varphi^0(t, x, c)$ le flot de (4.17) à paramètre $c \in \mathbb{R}$. Calculer $\partial_c \varphi^0(t, x, 0)$.

Chapitre 5

Systèmes autonomes et stabilité de points stationnaires

Nous allons considérer dans ce chapitre des systèmes différentiels ordinaires non linéaires où la non linéarité f est indépendante de t. On se donne pour tout ce chapitre un ouvert $\mathscr{U}$ de $\mathbb{R}^N$, et une application $f : \mathscr{U} \to \mathbb{R}^N$ que l'on supposera de classe $\mathscr{C}^1$ pour simplifier la présentation. Une telle application f est appelée **champ de vecteurs** sur $\mathscr{U}$.

Nous allons donc étudier le système

$$u' = f(u)\,. \tag{5.1}$$

Nous commencerons par quelques définitions et propriétés “classiques" de ce système, puis nous nous intéresserons à la stabilité des solutions constantes appelées points stationnaires.

5.1 Champs de vecteurs

Définition 5.1. Le champ de vecteurs f est dit *complet* si toutes les solutions maximales de (5.1) sont globales (c'est à dire définies sur tout $\mathbb{R}$).

Définition 5.2. On appelle *courbe intégrale* du champ de vecteurs f toute courbe de $\mathscr{U}$ de la forme $\{u(t) : t \in I_{\max}\}$ où u est une solution maximale de (5.1) et $I_{\max}$ est son intervalle maximale d'existence. Si u est une solution globale, on dit que la courbe intégrale est globale.

Lemme 5.3. *Deux courbes intégrales distinctes de f ne s'intersectent pas.*

Démonstration. On procède par contradiction en se donnant deux courbes intégrales distinctes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ telles que $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \neq \emptyset$. On considère alors u_1 et u_2 deux solutions maximales de (5.1), $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$ leur intervalle maximal d'existence respectif, telles que pour $i = 1, 2$,

$$\mathcal{C}_i := \{u_i(t) : t \in I_i\}\,.$$

Puisque $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \neq \emptyset$, il existe $t_1 \in I_1$ et $t_2 \in I_2$ tels que $u_1(t_1) = u_2(t_2)$. Pour $t \in J := -(t_2 - t_1) + I_2$, on pose $v(t) := u_2(t + t_2 - t_1)$, si bien que v est une solution maximale de (5.1), et bien sur $\mathcal{C}_2 = \{v(t) : t \in J\}$. Mais puisque $v(t_1) = u_2(t_2) = u_1(t_1)$, la Proposition 3.13 nous dit que $v = u_1$, et donc que $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_1$, contradiction. □

Rappelons pour la suite qu'une application $E : \mathscr{U} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ est une intégrale première de (5.1) si

$$\langle \nabla E(x), f(x) \rangle = 0 \qquad \forall\, x \in \mathscr{U}$$

(voir Définition 3.21). On dit également que E est une intégrale première du champ de vecteurs f. La proposition suivante est une conséquence directe de la démonstration du Théorème 3.22.

Proposition 5.4. *Toute intégrale première de f est constante le long des courbes intégrales.*

Rappelons également le résultat d'existence globale du Théorème 3.22.

Proposition 5.5. *Si f admet une intégrale première $E : \mathscr{U} \to \mathbb{R}$ telle que l'ensemble*

$$\{x \in \mathscr{U} : E(x) = M\}$$

soit compact pour tout $M \in \mathbb{R}$, alors f est complet.

Définition 5.6. On appelle *flot du champ de vecteurs f* le flot local φ^0 en 0 du système (5.1). On le note

$$\varphi_t(x) := \varphi^0(t, x)\,,$$

et on désigne par $\mathscr{D} \subset \mathbb{R} \times \mathscr{U}$ son domaine (au lieu de $\mathscr{D}^0$).

Remarque 32. On remarque que si φ^{t_0} est le flot local en t_0 de (5.1), alors $\varphi^{t_0}(t, \cdot) = \varphi^0(t - t_0, \cdot)$. C'est la raison pour laquelle il suffit de considérer le cas $t_0 = 0$.

Lemme 5.7. *Pour $t \in \mathbb{R}$, soit*

$$\mathscr{U}_t := \{x \in \mathscr{U} : (t, x) \in \mathscr{D}\}\,.$$

L'ensemble $\mathscr{U}_t$ est un ouvert de $\mathscr{U}$.

Démonstration. En effet, étant donné $t \in \mathbb{R}$, si l'on note $\Psi_t : \mathscr{U} \to \mathbb{R} \times \mathscr{U}$ l'application définie par $\Psi_t(x) = (t, x)$, alors Ψ_t est continue et on a $\mathscr{U}_t = \Psi_t^{-1}(\mathscr{D})$. La conclusion est alors due au fait que $\mathscr{U}$ soit ouvert. □

Remarque 33. Puisque $\varphi_0(x) = x$, nous avons $\mathscr{U}_0 = \mathscr{U}$.

Dans toute la suite, pour $x \in \mathscr{U}$, nous noterons $I_{\max}(x)$ l'intervalle maximal d'existence de la solution $\varphi_t(x)$.

Lemme 5.8. *Soit $x \in \mathscr{U}$. Pour tout $t_0 \in I_{\max}(x)$, on a*

$$I_{\max}(\varphi_{t_0}(x)) = -t_0 + I_{\max}(x)\,, \tag{5.2}$$

et

$$\varphi_t\big(\varphi_{t_0}(x)\big) = \varphi_{t+t_0}(x) \qquad \forall\, t \in -t_0 + I_{\max}(x)\,. \tag{5.3}$$

En particulier, pour tout $t_0 \in I_{\max}(x)$,

$$\varphi_{-t_0}\big(\varphi_{t_0}(x)\big) = \varphi_0(x) = x\,.$$

Démonstration. Étape 1. La fonction $u(t) = \varphi_t\big(\varphi_{t_0}(x)\big)$ est la solution maximale de (5.1) vérifiant $u(0) = \varphi_{t_0}(x)$ et son intervalle maximale d'existence est $I_{\max}(\varphi_{t_0}(x))$. Or la fonction $v(t) = \varphi_{t+t_0}(x)$, définie pour $t \in -t_0 + I_{\max}(x)$, est maximale (sinon la fonction $t \in I_{\max}(x) \mapsto \varphi_t(x)$ ne serait pas maximale, ce qui contredit la définition même de $\varphi_t(x)$), et elle vérifie $v(0) = \varphi_{t_0}(x)$. D'après la Proposition 3.13, nous avons $u = v$, ce qui montre (5.2) et (5.3).

Étape 2. Puisque $0 \in I_{\max}(x)$, nous avons $-t_0 \in -t_0 + I_{\max}(x) = I_{\max}(\varphi_{t_0}(x))$, on peut appliquer (5.3) avec $t = -t_0$ ce qui donne le résultat voulu. □

Théorème 5.9. *Si le champ de vecteurs f est de classe $\mathscr{C}^1$, alors*

(i) pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$, l'application φ_{t_0} est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $\mathscr{U}_{t_0}$ sur $\mathscr{U}_{-t_0}$ d'inverse φ_{-t_0} ;

(ii) $\varphi_0 = id_{\mathscr{U}}$;

(iii) pour tous $t_1, t_0 \in \mathbb{R}$, on a $\varphi_{t_1+t_0} = \varphi_{t_1} \circ \varphi_{t_0}$ sur l'ouvert $\varphi_{t_0}^{-1}(\mathscr{U}_{t_1})$;

Démonstration. (i). Soient $t_0 \in \mathbb{R}$ et $x, y \in \mathscr{U}_{t_0}$. Supposons que $\varphi_{t_0}(x) = \varphi_{t_0}(y)$. Si u désigne la solution maximale de (5.1) vérifiant $u(0) = x$, et v désigne la solution maximale de (5.1) vérifiant $v(0) = y$, nous avons $u(t_0) = v(t_0)$ et donc $u = v$ d'après la Proposition 3.13. En particulier, $u(0) = v(0)$, c'est à dire $x = y$. L'application φ_{t_0} est donc injective.

D'après le Lemme 5.8, $-t_0 \in I_{\max}(\varphi_{t_0}(x))$ donc $\varphi_{t_0}(x) \in \mathscr{U}_{-t_0}$. Ceci montre que $\varphi_{t_0}(\mathscr{U}_{t_0}) \subset \mathscr{U}_{-t_0}$. Or si $z \in \mathscr{U}_{-t_0}$ alors $-t_0 \in I_{\max}(z)$ et $\varphi_{t_0}(\varphi_{-t_0}(z)) = z$ d'après le Lemme 5.8, et donc $z \in \varphi_{t_0}(\mathscr{U}_{t_0})$, d'où $\varphi_{t_0}(\mathscr{U}_{t_0}) = \mathscr{U}_{-t_0}$. L'application φ_{t_0} réalise donc une bijection de $\mathscr{U}_{t_0}$ sur $\mathscr{U}_{-t_0}$. D'après le Lemme 5.8 nous avons de plus $\varphi_{-t_0}(\varphi_{t_0}(x)) = x$ pour tout $x \in \mathscr{U}_{t_0}$, donc l'application inverse de φ_{t_0} est donnée par φ_{-t_0}.

Finallement, d'après le Théorème 4.6, pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'application φ_t est de classe $\mathscr{C}^1$ sur son domaine de définition $\mathscr{U}_t$. L'application φ_{t_0} est donc de classe $\mathscr{C}^1$, et puisque son inverse est donnée par φ_{-t_0}, son inverse est également de classe $\mathscr{C}^1$. L'application φ_{t_0} réalise donc un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $\mathscr{U}_{t_0}$ sur $\mathscr{U}_{-t_0}$.

(ii). Par définition de φ_t, nous avons $\varphi_0(x) = x$.

(iii). Soit $z \in \varphi_{t_0}^{-1}(\mathscr{U}_{t_1})$. Alors $z \in \mathscr{U}_{t_0}$ et $\varphi_{t_0}(z) \in \mathscr{U}_{t_1}$, c'est à dire que $t_0 \in I_{\max}(z)$ et $t_1 \in I_{\max}(\varphi_{t_0}(z)) = -t_0 + I_{\max}(z)$ d'après le Lemme 5.8. En utilisant (5.3), nous obtenons $\varphi_{t_1+t_0}(z) = \varphi_{t_1}(\varphi_{t_0}(z))$. □

Dans le corollaire suivant, nous notons $\mathrm{Diff}^1(\mathscr{U})$ l'ensemble des difféomorphismes de $\mathscr{U}$ sur $\mathscr{U}$ classe $\mathscr{C}^1$.

Corollaire 5.10. *Si le champ de vecteur f est complet et de classe $\mathscr{C}^1$, alors $\varphi_t \in \mathrm{Diff}^1(\mathscr{U})$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. De plus, le sous-ensemble $\{\varphi_t : t \in \mathbb{R}\}$ muni de la loi de composition $\circ$ est un groupe commutatif.*

Remarque 34. D'après le corollaire ci-dessus, si le champ de vecteurs f est complet et de classe $\mathscr{C}^1$, l'application $t \in \mathbb{R} \to \varphi_t \in \mathrm{Diff}^1(\mathscr{U})$ est un homomorphisme du groupe (additif) $\mathbb{R}$ dans $\mathrm{Diff}^1(\mathscr{U})$. On dit que c'est un *groupe à un paramètre.*

La structure algébrique de l'ensemble $\{\varphi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ lorsque f est complet motive la définition suivante.

Définition 5.11. Soit $x \in \mathscr{U}$. On appelle *orbite* de x, que l'on note $\mathrm{Orb}(x)$, la courbe intégrale de f passant par x, c'est à dire l'ensemble

$$\mathrm{Orb}(x) := \{\varphi_t(x) : t \in I_{\max}\} .$$

Proposition 5.12. *L'ensemble*

$$\mathcal{E}_{\mathrm{Orb}} := \{C \subset \mathscr{U} : C = \mathrm{Orb}(x) \textit{ pour un } x \in \mathscr{U}\} \tag{5.4}$$

des orbites du champ de vecteurs f réalise une partition de l'ouvert $\mathscr{U}$, c'est à dire que

$$\mathscr{U} = \bigcup_{C\in\mathcal{E}_{\mathrm{Orb}}} C$$

avec une union deux à deux disjointe.

Définition 5.13. On appelle *portrait de phases* du champ de vecteurs f, où du système différentiel (5.1), la partition (5.4) de $\mathscr{U}$ en orbites.

Définition 5.14. On appelle *point stationnaire* ou *point fixe* ou *point d'équilibre* un point $x \in \mathscr{U}$ dont l'orbite est réduite au singleton $\{x\}$. On dit également que x est un *point singulier* du champ de vecteurs f.

Proposition 5.15. *L'orbite d'un point $x \in \mathscr{U}$ est réduite au singleton $\{x\}$ si et seulement si $f(x) = 0$. Si ce n'est pas le cas et qu'il existe $s_0, t_0 \in I_{\max}(x)$ tels que $s_0 \neq t_0$ et $\varphi_{t_0}(x) = \varphi_{s_0}(x)$, alors $I_{\max}(x) = \mathbb{R}$, la fonction $t \in \mathbb{R} \to \varphi_t(x)$ est périodique, et l'orbite de x est une courbe fermée simple.*

Terminons cette section par quelques définitions d'orbites “classiques".

Définition 5.16. On appelle *cycle* une orbite fermée.

Définition 5.17. *(i)* On appelle *orbite hétérocline* une courbe intégrale globale $\{\varphi_t(x) : t \in \mathbb{R}\}$ reliant deux points fixes distincts en $t = +\infty$ et $t = -\infty$.

(ii) On appelle *orbite homocline* une courbe intégrale globale $\{\varphi_t(x) : t \in \mathbb{R}\}$ reliant un même point fixe en $t = +\infty$ et $t = -\infty$.

5.2 Stabilité des points stationnaires

Définition 5.18. Un point stationnaire x_0 du champ de vecteurs f est dit *stable* si il existe des constantes $\varepsilon > 0$ et $C_0 > 0$ telles que

(i) le flot $\varphi_t(x)$ est défini pour tout $t \geqslant 0$ et tout $x \in B_\varepsilon(x_0) \cap \mathscr{U}$ (c'est à dire $[0, +\infty[\subset I_{\max}(x)$ pour tout $x \in B_\varepsilon(x_0) \cap \mathscr{U}$) ;

(ii) pour tout $t \geqslant 0$ et $x \in B_\varepsilon(x_0) \cap \mathscr{U}$,

$$\|\varphi_t(x) - x_0\|_2 \leqslant C_0 \|x - x_0\|_2 \,.$$

De plus, si x_0 est *stable* et que

$$\lim_{t \to +\infty} \varphi_t(x) = x_0 \qquad \forall\, x \in B_\varepsilon(x_0) \cap \mathscr{U} \,,$$

on dit que x_0 est *asymptotiquement stable.*

Définition 5.19. Un point stationnaire x_0 du champ de vecteurs f est dit *instable* si il n'est pas stable.

Rappelons pour la suite qu'une application $\Phi : \mathscr{U} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ est une fonction de Lyapunov de (5.1) si

$$\langle \nabla \Phi(x), f(x) \rangle = 0 \qquad \forall\, x \in \mathscr{U}$$

(voir Définition 3.19). On dit également que Φ est une fonction de Lyapunov du champ de vecteurs f.

Théorème 5.20. *Soit x_0 un point stationnaire du champ de vecteurs f. Supposons qu'il existe une fonction de Lyapunov $\Phi : \mathscr{U} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telle que x_0 soit un minimum local de Φ vérifiant $D^2\Phi(x_0) \geqslant \alpha Id_N$ pour une constante $\alpha > 0$. Alors x_0 un point stationnaire stable.*

Démonstration. D'après le Théorème 3.20, $[0, +\infty[\subset I_{\max}(x)$ pour tout $x \in \mathscr{U}$. Il suffit donc de vérifier le point *(ii)* de la Définition 5.18. D'après l'hypothèse sur Φ et la formule de Taylor à l'ordre 2, il existe $\eta > 0$ et $K > 0$ tels que $B_\eta(x_0) \subset \mathscr{U}$ et

$$\Phi(x_0) + \frac{\alpha}{4}\|x - x_0\|_2^2 \leqslant \Phi(x) \leqslant \Phi(x_0) + K\|x - x_0\|_2^2 \qquad \forall x \in B_\eta(x_0) \,. \tag{5.5}$$

On pose

$$M := \Phi(x_0) + \frac{\alpha \eta^2}{4} \leqslant \inf_{\|x - x_0\|_2 = \eta} \Phi(x) \,. \tag{5.6}$$

Par continuité de Φ, l'ensemble

$$\mathscr{V}_\eta := \{x \in B_\eta(x_0) : \Phi(x) < M\}$$

est un ouvert contenant x_0. Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que $B_\varepsilon(x_0) \subset \mathscr{V}_\eta$.

Soit $x \in B_\varepsilon(x_0)$. D'après le Théorème 3.20, la fonction $t \mapsto \Phi(\varphi_t(x))$ est décroissante. En particulier $\Phi(\varphi_t(x)) \leqslant \Phi(x) < M$ pour tout $t \geqslant 0$. Ceci implique que $\varphi_t(x) \in B_\eta(x_0)$ pour tout $t \geqslant 0$. En effet, supposons qu' il existe $t_1 \geqslant 0$ tel que $\varphi_{t_1}(x) \notin B_\eta(x_0)$, c'est à dire tel que $\|\varphi_{t_1}(x) - x_0\|_2 \geqslant \eta$. Comme $\|\varphi_0(x) - x_0\|_2 = \|x - x_0\|_2 < \eta$, et que la fonction $t \mapsto \|\varphi_t(x) - x_0\|_2$ est continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $t_2 \geqslant 0$ tel que $\|\varphi_{t_2}(x) - x_0\|_2 = \eta$ et $\Phi(\varphi_{t_2}(x)) < M$ ce qui contredit (5.6).

Puisque $\varphi_t(x) \in B_\eta(x_0)$ pour tout $t \geqslant 0$, on déduit de (5.5),

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{4}\|\varphi_t(x) - x_0\|_2^2 &\leqslant \Phi(\varphi_t(x)) - \Phi(x_0)\\ &\leqslant \Phi(x) - \Phi(x_0) \leqslant K\|x - x_0\|_2^2 \quad \forall t \geqslant 0\,, \qquad (5.7)\end{aligned}$$

et le point *(ii)* de la Définition 5.18 est donc vérifié pour $C_0 := \sqrt{\frac{4K}{\alpha}}$. □

Définition 5.21. Soit x_0 un point stationnaire du champ de vecteurs f et $\Phi : \mathscr{U} \to \mathbb{R}$ une fonction de Lyapunov de f telle que x_0 soit un minimum local strict de Φ. On dit que Φ est une *fonction de Lyapunov forte* au voisinage de x_0 si il existe des constantes $\delta > 0$ et $\beta > 0$ telles que

$$\langle \nabla\Phi(x), f(x)\rangle \leqslant -\beta\big(\Phi(x) - \Phi(x_0)\big) \qquad \forall\, x \in B_\delta(x_0) \cap \mathscr{U}\,.$$

Théorème 5.22. *Sous les hypothèses du Théorème 5.20, si Φ est une fonction de Lyapunov forte au voisinage de x_0, alors x_0 est un point stationnaire asymptotiquement stable.*

Démonstration. On reprends la démonstration du Théorème 5.20 avec $\eta \leqslant \delta$. Soit $x \in B_\varepsilon(x_0)$. On a alors $\varphi_t(x) \in B_\delta(x_0)$ pour tout $t \geqslant 0$, et donc

$$\Big\langle \nabla\Phi(\varphi_t(x)), f(\varphi_t(x))\Big\rangle \leqslant -\beta\big(\Phi(\varphi_t(x)) - \Phi(x_0)\big) \qquad \forall t \geqslant 0\,.$$

Pour $t \geqslant 0$, on pose

$$w(t) := \Phi(\varphi_t(x)) - \Phi(x_0)\,,$$

si bien que w est de classe $\mathscr{C}^1$ comme composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, et

$$w'(t) = \Big\langle \nabla\Phi(\varphi_t(x)), f(\varphi_t(x))\Big\rangle \leqslant -\beta w(t)\,.$$

On déduit du Lemme 3.8 que

$$w(t) \leqslant w(0)e^{-\beta t} \qquad \forall t \geqslant 0\,.$$

On obtient alors de (5.7),

$$\frac{\alpha}{4}\|\varphi_t(x) - x_0\|_2^2 \leqslant w(t) \leqslant \big(\Phi(x) - \Phi(x_0)\big)e^{-\beta t} \leqslant K\|x - x_0\|_2^2 e^{-\beta t} \quad \forall t \geqslant 0\,.$$

Puisque $e^{-\beta t} \to 0$ lorsque $t \to +\infty$, nous avons donc montré que $\varphi_t(x) \to x_0$ lorsque $t \to +\infty$. □

Théorème 5.23. *Supposons que f soit de classe $\mathscr{C}^2$. Soit x_0 un point stationnaire du champ de vecteurs f. Si toutes les valeurs propres de la matrice Jacobienne $\nabla f(x_0) \in \mathscr{M}_{N\times N}(\mathbb{R})$ ont leur partie réelle strictement négative, alors x_0 est un point stationnaire asymptotiquement stable.*

Lemme 5.24. *Soit $A \in \mathscr{M}_{N\times N}(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont toutes de partie réelle strictement négative. Alors le système linéaire*

$$u' = Au$$

admet une fonction de Lyapunov forte en 0 vérifiant les hypothèses du Théorème 5.20.

Bibliographie

[A] J. M. ARNAUDIES, J. LELONG-FERRAND. Cours de Mathématiques, Tome4 : Equations Différentielles, Intégrales Multiples. Dunod, 1974.

[B] S. BENZONI-GAVAGE. Calcul différentiel et équations différentielles. Collection Sciences Sup. Dunod, 2010.

[C] H. CARTAN. Cours de calcul différentiel. Hermann, Paris, 1967

[D] J. P. DEMAILLY. Analyse numérique et équations différentielles. Collection Grenoble Sciences. Presses Universitaires de Grenoble, Grenoble, 1996.