Université Paris Diderot - Paris 7 — L3 Maths Appliquées
Equations Différentielles — 2011-2012

Travaux Dirigés no. 4
Fonctions de Lyapunov et Intégrales premières

Exercice 56. Soient $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues, localement Lipschitziennes. On supposera que

(i) $\alpha(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$;
(ii) $\beta(0) = 0$, et $x\beta(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
(iii) $\int_0^{+\infty} \beta(x)\,dx = \int_{-\infty}^0 |\beta(x)|\,dx = +\infty$.

On considère sur $[0, +\infty[$ le problème de Cauchy suivant (où $u_0, u_1 \in \mathbb{R}$ fixés) :

$$(1) \qquad \begin{cases} u'' + \alpha(u)u' + \beta(u) = 0 \\ u(0) = u_0 \\ u'(0) = u_1 \end{cases}$$

(1) Montrer qu'il existe $\tau > 0$ tel que le problème (1) admette une unique solution sur $[0, \tau]$.
(2) Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $A(x) = \int_0^x \alpha(s)\,ds$. Montrer qu'une fonction $u : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ est solution de (1) sur $[0, \infty[$ si et seulement si la fonction $v = (v_1, v_2) : I \to \mathbb{R}^2$ définie par $v_1 = u$ et $v_2 = u' + A(u)$, est solution sur $[0, \infty[$ de

$$(2) \qquad \begin{cases} v_1' = v_2 - A(v_1) \\ v_2' = -\beta(v_1) \end{cases}$$

et vérifie $v_1(0) = u_0$, $v_2(0) = u_1 + A(u_0)$.
(3) Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $B(x) = \int_0^x \beta(s)\,ds$. Montrer que la fonction Φ définie pour $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ par

$$\Phi(y) = \frac{1}{2}|y_2 - A(y_1)|^2 + B(y_1)$$

est une fonction de Lyapunov pour le système (2).
(4) En déduire que le problème de Cauchy (1) admet une unique solution sur $[0, +\infty[$.

Correction

(3) Nous avions montré que Φ vérifie le premier point définissant les fonctions de Lyapunov. Il nous reste à montrer que, pour tout M réel et pour tout $J \subset I$ intervalle compact, l'ensemble

$$\{(t, y) \in J \times \mathbb{R}^2 | \Phi(t, y) \leq M\}$$

est compact. Comme Φ est indépendante de t, cet ensemble est égal à
$$J \times \{y \in \mathbb{R}^2 | \Phi(y) \leq M\}.$$
Le produit de compacts étant compact, il nous suffit de montrer que $\mathcal{E}_M$ est compact. Comme c'est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ qui est de dimension fini, il est équivalent de montrer que $\mathcal{E}_M$ est fermé et borné. C'est un fermé comme image réciproque de l'intervalle fermé $]-\infty; M]$ par la fonction continue Φ. Pour montrer que $\mathcal{E}_M$ est borné, on va utiliser le lemme suivant.

Lemme. Supposons que
$$\Phi(y) \underset{||y|| \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$
Alors pour tout M réel, l'ensemble $\mathcal{E}_M$ est borné.

Preuve du Lemme. On écrit la définition de la limite pour le réel M :
$$\exists \eta > 0, \forall y \in \mathbb{R}^2, ||y|| > \eta \Rightarrow \Phi(y) > M.$$
Dès lors, si $y \in \mathcal{E}_M$, on a $\Phi(y) \leq M$. Donc par contraposition $||y|| \leq \eta$, soit encore $y \in \overline{B}(0, \eta)$ (boule fermée de centre 0 et de rayon η. Finalement on a montré que
$$\mathcal{E}_M \subset \overline{B}(0, \eta)$$
et en particulier que $\mathcal{E}_M$ est borné pour tout M.

□

Reste donc à montrer que
$$\Phi(y) \underset{||y|| \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$
On raisonne par l'absurde. Par caractérisation séquentielle de la limite, il existerait une suite $(y_n)_n$ à valeur dans $\mathbb{R}^2$ telle que
$$||y_n|| \underset{n \to +\infty}{\to} +\infty \text{ et } \Phi(y_n) \underset{n \to +\infty}{\not\to} +\infty.$$
Quitte à en extraire une sous-suite on peut supposer que
$$||y_n|| \underset{n \to +\infty}{\to} +\infty \text{ et } (\Phi(y_n))_n \text{ est bornée.}$$
Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n = (y_n^1, y_n^2)$. On a les deux cas suivants :

- soit la suite $(y_n^1)_n$ est non-bornée. Alors quitte à en extraire une sous-suite, on peut supposer que $|y_n^1| \underset{n \to +\infty}{\to} +\infty$. Dès lors
$$\Phi(y_n) \geq B(y_n^1) \underset{n \to +\infty}{\to} +\infty$$
ce qui est impossible car $(\Phi(y_n))_n$ est bornée.
- soit la suite $(y_n^1)_n$ est bornée et la suite $(y_n^2)_n$ est non bornée. Alors quitte à extraire une sous-suite de $(y_n)_n$, on peut supposer que y_n^1 converge et que $|y_n^2| \underset{n \to +\infty}{\to} +\infty$. Mais alors
$$\Phi(y_n) \geq (y_n^2 - A(y_n^1))^2 \underset{n \to +\infty}{\to} +\infty$$
ce qui est également impossible car $(\Phi(y_n))_n$ est bornée.

Finalement, on aboutit à une contradiction. Pour tout M, l'ensemble $\mathcal{E}_M$ est donc bornée (et compact) par le lemme, et Φ est bien une fonction de Lyapunov pour le système (2).