Université Paris Diderot | Année 2012/2013
L3 Maths | *Équations Différentielles Ordinaires*

Partiel du 21 mars 2013

Durée : 3h

Les documents, calculatrices, téléphones,
et autres appareils électroniques ne sont pas autorisés.

Exercice 1 (Cours). [2 points]

Soient $T, L, b \in \mathbb{R}$ tels que $T > 0$ et $L > 0$. Soit $w : [0, T] \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant

$$w(t) \leqslant w(0) + \int_0^t (Lw(s) + b)\, ds \qquad \forall t \in [0, T]\,.$$

Montrer que

$$w(t) + \frac{b}{L} \leqslant \left(w(0) + \frac{b}{L}\right) e^{Lt} \qquad \forall t \in [0, T]\,.$$

Exercice 2. [4 points]

Donner la forme générale des solutions du système différentiel réel suivant :

$$\begin{cases} u' = -v \\ v'' = u \end{cases}$$

Exercice 3. [8 points]

Soit $f\ :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant $\int_1^{+\infty} s|f(s)|\, ds < \frac{1}{2}$. On considère l'équation différentielle scalaire suivante :

$$u'' + f(t)u = 0\,. \tag{1}$$

Pour trouver une solution particulière de cette équation, nous allons construire par récurrence une suite de fonctions $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $]1, +\infty[$ de la façon suivante : pour $n = 0$, on pose $u_0(t) = 1$, et pour tout entier $n \geqslant 1$ et $t \in]1, +\infty[$,

$$u_{n+1}(t) = 1 + \int_t^{+\infty} (t - s)u_n(s)f(s)\, ds\,.$$

1) Montrer par récurrence les points suivants :

- l'intégrale $\int_t^{+\infty} (t - s)u_n(s)f(s)\, ds$ est absolument convergente pour tout $t \in]1, +\infty[$ et tout $n \in \mathbb{N}$;

- u_n est bornée pour tout $n \in \mathbb{N}$;
- u_n est une fonction de classe C^2 sur $]1, +\infty[$.

2) Montrer (par récurrence) que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in]1, +\infty[$,

$$|u_{n+1}(t) - u_n(t)| \leqslant \left(\int_t^{+\infty} s|f(s)|\, ds \right)^{n+1} .$$

3) En utilisant la question précédante, montrer que la suite $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $]1, +\infty[$ vers une fonction u_* bornée vérifiant

$$u_*(t) = 1 + \int_t^{+\infty} (t - s)u_*(s)f(s)\, ds \quad \text{pour tout } t \in]1, +\infty[\,.$$

4) Montrer que la fonction u_* est solution de l'équation (1) sur $]1, +\infty[$, et que

$$\lim_{t\to+\infty} u_*(t) = 1\,, \qquad \lim_{t\to+\infty} u_*'(t) = 0\,.$$

Exercice 4. [6 points]

Soit P un polynôme à coefficients dans $\mathbb{R}$ admettant au moins deux racines réelles distinctes. On note λ la plus petite des racines réelles de P, et Λ la plus grande.

1) Montrer que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} u' = P(u) \\ u(0) = x_0 \end{cases}$$

admet une unique solution maximale.

2) Donner deux valeurs (distinctes) de x_0 pour lesquelles la solution du problème de Cauchy est évidente.

3) Montrer que si $\lambda < x_0 < \Lambda$ alors la solution du problème de Cauchy est globale.

4) Dans le cas particulier où $P(x) = x^2 - 1$, montrer que si $x_0 > 1$ alors la solution u n'est pas globale
(*Indication :* montrer que la fonction $v = u - 1$ vérifie l'inéquation $v' \geqslant v^2$).