Université Paris Diderot - Paris 7 | L3 Maths

Equations Différentielles | 2012-2013

Devoir Maison no. 3 pour le 15/03/2013

Équations différentielles d'ordre N à coefficients constants

Équations différentielles d'ordre N homogène à coefficients constants

Soient $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $N \geq 2$. Considérons l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre N sur $\mathbb{K}$, à **coefficients constants** :

$$y^{(N)} + a_{N-1}y^{(N-1)} + a_{N-2}y^{(N-2)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0. \tag{E_0}$$

On considère le polynôme $P = X^N + \sum_{i=0}^{N-1} a_i X^i$, appelé polynôme caractéristique de (E_0). En se ramenant au cas matriciel et en utilisant les résultats du cours, on peut montrer le résultat suivant.

Théorème Supposons que $P = \prod_{i=1}^{k}(X - r_i)^{m_i}$ est scindé sur $\mathbb{K}$. Alors les solutions de (E_0) sont les applications

$$t \mapsto \sum_{i=1}^{k} e^{r_i t} P_i(t),$$

où les P_i sont des polynômes de degré $< m_i$.

Le but de ce qui suit est d'en donner une nouvelle preuve. Pour tout polynôme complexe $P = X^N + \sum_{i=0}^{N-1} a_i X^i$ et pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^N$, on note

$$P(D)(f) = f^{(N)} + \sum_{i=0}^{N-1} a_i f^{(i)} = f^{(N)} + \cdots + a_1 f' + a_0 f,$$

où D est l'opérateur de dérivation.

1. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, on note $\mathcal{S}_P$ l'espace des solutions de l'équation différentielle $P(D)(y) = 0$. Si $P_1, \cdots, P_k \in \mathbb{K}[X]$ sont des polynômes premiers entre eux deux à deux, montrer que $\mathcal{S}_{P_1 \cdots P_k} = \mathcal{S}_{P_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{S}_{P_k}$.
2. Si $P_n(X) = (X - \alpha)^n$ $(\alpha \in \mathbb{K})$, déterminer la forme des solutions de l'équation différentielle $P_n(D)(y) = 0$.
3. En déduire, pour $P = \prod_{i=1}^{k}(X - r_i)^{m_i}$ scindé sur $\mathbb{K}$ ($\deg(P) \geq 1$), la forme des solutions de l'équation différentielle $P(D)(y) = 0$.

4. On cherche à présent à résoudre la relation de récurence linéaire homogène d'ordre k à **coefficients constants** :

$$u_{n+k} + a_{k-1}u_{n+k-1} + \cdots + a_1 u_{n+1} + a_0 u_n = 0, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Adapter la méthode précédente de résolution des équations différentielles linéaires homogènes d'ordre N à coefficients constants à cette situation.

Équations différentielles d'ordre N à coefficients constants avec second membre

On considère l'équation différentielle suivante :

$$y^{(3)} + y^{(2)} + y' + y = 2(\cos(t) + \sin(t)). \tag{E}$$

5. Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E).

6. Réduire l'équation différentielle (E) à un système différentiel linéaire d'ordre 1 :

$$(S) \quad \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + B(t)$$

où $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $B : t \in \mathbb{R} \to B(t) \in \mathbb{R}^3$. Donner un système fondamental de solutions (X_1, X_2, X_3) du système différentiel homogène associé à (S).

7. On cherche à présent une solution particulière de (S) par méthode de variation des constantes, c'est à dire sous la forme $X(t) = a(t)X_1(t) + b(t)X_2(t) + c(t)X_3(t)$. Montrer que :

$$\begin{aligned} a'(t) &= (\cos(t) + \sin(t))e^t, \\ b'(t) &= -1 - 2\cos(t)\sin(t), \\ c'(t) &= \cos(t)^2 - \sin(t)^2. \end{aligned}$$

8. Déterminer des primitives de $a'(t), b'(t), c'(t)$.

9. Donner la forme générale des solutions de (S), puis de (E).

10. De la même manière, résoudre les équations différentielles suivantes :

$$y^{(3)} + y'' - y' - y = 1 + 2\text{ch}(t) \tag{1}$$
$$y''' + y'' + y' + y = \cos(t) \tag{2}$$