Université Paris Diderot - Paris 7 — L3 Maths
Equations Différentielles — 2012-2013

Devoir Maison no. 3 pour le 15/03/2013

Équations différentielles d'ordre N à coefficients constants

Équations différentielles d'ordre N homogène à coefficients constants

Soient $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $N \geq 2$. Considérons l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre N sur $\mathbb{K}$, à **coefficients constants** :

$$y^{(N)} + a_{N-1}y^{(N-1)} + a_{N-2}y^{(N-2)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0. \qquad (E_0)$$

On considère le polynôme $P = X^N + \sum_{i=0}^{N-1} a_i X^i$, appelé polynôme caractéristique de (E_0). En se ramenant au cas matriciel et en utilisant les résultats du cours, on peut montrer le résultat suivant.

Théorème Supposons que $P = \prod_{i=1}^{k}(X - r_i)^{m_i}$ est scindé sur $\mathbb{K}$. Alors les solutions de (E_0) sont les applications

$$t \mapsto \sum_{i=1}^{k} e^{r_i t} P_i(t),$$

où les P_i sont des polynômes de degré $< m_i$.

Le but de ce qui suit est d'en donner une nouvelle preuve. Pour tout polynôme complexe $P = X^N + \sum_{i=0}^{N-1} a_i X^i$ et pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^N$, on note

$$P(D)(f) = f^{(N)} + \sum_{i=0}^{N-1} a_i f^{(i)} = f^{(N)} + \cdots + a_1 f' + a_0 f,$$

où D est l'opérateur de dérivation.

1. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, on note $\mathcal{S}_P$ l'espace des solutions de l'équation différentielle $P(D)(y) = 0$. Si $P_1, \cdots, P_k \in \mathbb{K}[X]$ sont des polynômes premiers entre eux deux à deux, montrer que $\mathcal{S}_{P_1 \cdots P_k} = \mathcal{S}_{P_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{S}_{P_k}$.
2. Si $P_n(X) = (X - \alpha)^n$ $(\alpha \in \mathbb{K})$, déterminer la forme des solutions de l'équation différentielle $P_n(D)(y) = 0$.
3. En déduire, pour $P = \prod_{i=1}^{k}(X - r_i)^{m_i}$ scindé sur $\mathbb{K}$ $(\deg(P) \geq 1)$, la forme des solutions de l'équation différentielle $P(D)(y) = 0$.

4. On cherche à présent à résoudre la relation de récurence linéaire homogène d'ordre k à **coefficients constants** :

$$u_{n+k} + a_{k-1}u_{n+k-1} + \cdots + a_1 u_{n+1} + a_0 u_n = 0, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Adapter la méthode précédente de résolution des équations différentielles linéaires homogènes d'ordre N à coefficients constants à cette situation.

Équations différentielles d'ordre N à coefficients constants avec second membre

On considère l'équation différentielle suivante :

$$y^{(3)} + y^{(2)} + y' + y = 2(\cos(t) + \sin(t)). \tag{E}$$

5. Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E).

6. Réduire l'équation différentielle (E) à un système différentiel linéaire d'ordre 1 :

$$(S) \quad \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + B(t)$$

où $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $B : t \in \mathbb{R} \to B(t) \in \mathbb{R}^3$. Donner un système fondamental de solutions (X_1, X_2, X_3) du système différentiel homogène associé à (S).

7. On cherche à présent une solution particulière de (S) par méthode de variation des constantes, c'est à dire sous la forme $X(t) = a(t)X_1(t) + b(t)X_2(t) + c(t)X_3(t)$. Montrer que :

$$\begin{aligned} a'(t) &= (\cos(t) + \sin(t))e^t, \\ b'(t) &= -1 - 2\cos(t)\sin(t), \\ c'(t) &= \cos(t)^2 - \sin(t)^2. \end{aligned}$$

8. Déterminer des primitives de $a'(t), b'(t), c'(t)$.

9. Donner la forme générale des solutions de (S), puis de (E).

10. De la même manière, résoudre les équations différentielles suivantes :

$$y^{(3)} + y'' - y' - y = 1 + 2\mathrm{ch}(t) \tag{1}$$
$$y''' + y'' + y' + y = \cos(t) \tag{2}$$

Solution

1. On regarde D comme endomorphisme de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ qui à u associe u'. Soit u est solution de (E_0), u de classe $\mathcal{C}^N$. On sait (cours) qu'en tant que solution de (E_0), u est en fait de classe $\mathcal{C}^\infty$. Dès lors u est solution de (E_0) si et seulement si $P(D)(u) = 0$, i.e. $u \in \mathrm{Ker}(P(D))$. Ainsi $\mathcal{S}_P = \mathrm{Ker}(P(D))$.

   Maintenant si les polynômes $P_1, \cdots, P_k$ sont premiers entre eux **deux à deux**, on a d'après le lemme des noyaux

   $$\mathrm{Ker}(P_1 \cdots P_k(D)) = \mathrm{Ker}(P_1(D)) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Ker}(P_k(D)).$$

   En d'autres termes,
   $$\mathcal{S}_{P_1 \cdots P_k} = \mathcal{S}_{P_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{S}_{P_k}.$$

2. Montrons que les solutions de $P_n(D)(y) = 0$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto e^{\alpha t}F(t)$ avec F un polynôme de degré $< n$. On procède par récurrence sur n.

   Pour $n = 1$, le résultat est connu (EDL1 à coefficients constants homogène) : les solutions sont les fonctions $t \mapsto \lambda e^{\alpha t}, \lambda \in \mathbb{R}$.

   Supposons le résultat vrai au rang $n-1$ et montrons le au rang n. L'équation $P_n(D)(y) = 0$ s'écrit aussi $P_{n-1}(D)[P_1(D)(y)] = 0$. Ainsi $P_1(D)(y)$ est solution de $P_{n-1}(D)(y) = 0$. Par hypothèse de récurrence, $P_1(D)(y)$ est donc de la forme $t \mapsto e^{\alpha t}F(t)$ avec F un polynôme de degré $< n-1$. On a donc

   $$y' - \alpha y = e^{\alpha t}F(t).$$

   En multipliant l'équation précédente par $e^{-\alpha t}$, on obtient $[ye^{-\alpha t}]' = F(t)$. D'où $y = e^{\alpha t}G(t)$, avec G une primitive de F, i.e. $G \in \mathbb{K}[X]$ de degré $< n$. D'où la propriété au rang n. On conclut par principe de récurrence.

3. On suppose que $P = \prod_{i=1}^k (X - r_i)^{m_i}$ scindé sur $\mathbb{K}$ ($\deg(P) \geq 1$). D'après 1., on a

   $$\mathcal{S}_P = \mathcal{S}_{(X-r_1)^{m_1}} \oplus \cdots \oplus \mathcal{S}_{(X-r_k)^{m_k}}.$$

   Par 2., on sait de plus que pour tout $1 \leq i \leq k$, $\mathcal{S}_{(X-r_i)^{m_i}}$ est l'ensemble des fonctions de la forme $t \mapsto e^{r_i t}F_i(t)$ avec F_i un polynôme de degré $< m_i$. On en déduit finalement que $\mathcal{S}_P$ est l'ensemble des fonctions de la forme

   $$t \mapsto \sum_{i=1}^k e^{r_i t}P_i(t),$$

   où les P_i sont des polynômes de degré $< m_i$.

   Remarque Pour une autre démonstration de ce théorème (encore une !), voir [Dem, p. 206].

4. On considère la relation de récurence linéaire homogène d'ordre k à coefficients constants :

$$u_{n+k} + a_{k-1}u_{n+k-1} + \cdots + a_1 u_{n+1} + a_0 u_n = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{R}$$

On adapte la méthode de résolution des équations différentielles d'ordre N à coefficients constants homogène vue précédement de la façon suivante. Soit $E = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$. On considère l'endomorphisme $L \in \mathcal{L}(E)$ défini par

$$L : u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ telle que } v_n = u_{n+1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

L est l'analogue de l'opérateur de dérivation ici (il supprime le terme d'ordre 0), et est souvent appelé le shift à gauche pour la raison suivante

$$L : u = (u_0, u_1, u_2, \cdots) \to L(u) = (u_1, u_2, \cdots) \text{ (on décale la suite vers la gauche).}$$

Notons $P = X^k + a_{k-1}X^{k-1} + \cdots + a_1 X + a_0$, et $\mathcal{S}_P$ l'ensemble des solutions de (R). C'est un sous-ev de E. De plus une suite u est solution de (R) si et seulement si $P(L)(u) = 0_E$, i.e. $u \in \mathrm{Ker}(P(D))$. Donc $\mathcal{S}_P = \mathrm{Ker}(P(D))$.

On montre alors de façon analogue aux questions précédentes que

- pour tout polynômes $P_1, \cdots, P_u \in \mathbb{K}[X]$ premiers entre eux deux à deux,
$$\mathcal{S}_{P_1 \cdots P_u} = \mathcal{S}_{P_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{S}_{P_u}.$$
- si $P_i(X) = (X-\alpha)^i$ ($\alpha \in \mathbb{K}$), alors $\mathcal{S}_{P_n}$ est formé de l'ensemble des suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la forme $u_n = F(n)\alpha^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, où F est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ (indépendant de n) de degré $< i$.

On obtient donc le résultat suivant

Théorème Supposons que $P = \prod_{i=1}^{u}(X - r_i)^{m_i}$ est scindé sur $\mathbb{K}$ ($\deg(P) = k \geq 1$), les solutions de (R) sont les suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la forme

$$u_n = \sum_{i=1}^{u} r_i^n F_i(n)$$

où les F_i sont des polynômes de degré $< m_i$.

5. Le polynôme caractéristique associé à (E) est $P = X^3 + X^2 + X + 1$. Ses racines sont $-1, i, -i$. Par le Théorème, les solutions de l'équation homogène associée sont donc les fonctions :
$$t \mapsto ae^{-t} + b\cos(t) + c\sin(t), a, b, c \in \mathbb{R}.$$

6. y est solution de (E) si et seulement si $\begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix}$ est solution du système différentiel linéaire :
$$(S)\quad \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\cos(t) + 2\sin(t) \end{pmatrix}.$$

On a obtenu un système fondamental de solutions de l'équation homogène (E_0) associée à (E) à la question précédente : il s'agit de (x_1, x_2, x_3) avec

$$x_1(t) = e^{-t}, x_2(t) = \cos(t), x_3(t) = \sin(t).$$

D'où un système fondamental de solutions de l'équation homogène (S_0) associée à (S) :

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}, X_2(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix}, X_3(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix}.$$

7. $X(t) = a(t)X_1(t) + b(t)X_2(t) + c(t)X_3(t)$ est solution de (S) si et seulement si $X'(t) = AX(t) + B(t)$. Or

$$X'(t) = a(t)X_1'(t) + b(t)X_2'(t) + c(t)X_3'(t) + a'(t)X_1(t) + b'(t)X_2(t) + c'(t)X_3(t).$$

Comme X_1, X_2, X_3 sont solutions de (S_0), on obtient

$$a'(t)X_1(t) + b'(t)X_2(t) + c'(t)X_3(t) = B(t).$$

Ainsi, a, b, c sont solutions du système :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} a'(t)e^{-t} & + & b'(t)\cos(t) & + & c'(t)\sin(t) & = & 0 \\ -a'(t)e^{-t} & - & b'(t)\sin(t) & + & c'(t)\cos(t) & = & 0 \\ a'(t)e^{-t} & - & b'(t)\cos(t) & - & c'(t)\sin(t) & = & 2(\cos(t) + \sin(t)) \end{array} \right.$$

Après résolution du système, on obtient :

$$a'(t) = (\cos(t) + \sin(t))e^t,$$

$$b'(t) = -(\cos(t) + \sin(t))^2 = -1 - 2\cos(t)\sin(t) = -1 - \sin(2t),$$
$$c'(t) = -(\sin(t) - \cos(t))(\cos(t) + \sin(t)) = \cos(t)^2 - \sin(t)^2 = \cos(2t).$$

8. On détermine A, B, C des primitives de a, b, c respectivement.

$$B(t) = -x + \frac{\cos(2t)}{2}, \ C(t) = \frac{\sin(2t)}{2}.$$

Pour A, on doit faire deux intégrations par parties :

$$A(t) \quad = \quad \int_0^t (\cos(s) + \sin(s))e^s \mathrm{ds} = 2\sin(t)e^t - \int_0^t (\cos(s) + \sin(s))e^s \mathrm{ds}$$

d'où $A(t) = \sin(t)e^t$.

9. On en déduit les solutions de (S) : ce sont les fonctions (où $a, b, c \in \mathbb{R}$)

$$X(t) = aX_1(t) + bX_2(t) + cX_3(t) + \sin(t)e^t X_1(t) + \left(-x + \frac{\cos(2t)}{2}\right) X_2(t) + \frac{\sin(2t)}{2} X_3(t).$$

Enfin, on a vu que y est solution de (E) si et seulement si $\begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix}$ est solution de (S).

Ainsi, les solutions de (E) sont les fonctions $(a, b, c \in \mathbb{R})$:

$$x(t) = ae^{-t} + b\cos(t) + c\sin(t) + \sin(t) + \left(-x + \frac{\cos(2t)}{2}\right)\cos(t) + \frac{\sin(2t)}{2}\sin(t).$$

10. On résout l'équation

$$y''' + y'' - y' - y = 1 + \mathrm{ch}(t).$$

Le polynôme caractéristique associé est $P = X^3 + X^2 - X - 1 = (X-1)(X+1)^2$. Par le Théorème, les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions de la forme

$$t \mapsto ae^t + (bt + c)e^{-t}, \ a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Un système fondamental de solutions de l'équation homogène est alors donné par $(x_1 : t \mapsto e^t, x_2 : t \mapsto te^t, x_3 : t \mapsto e^{-t})$. On cherche à présent une solution particulière de l'équation par méthode de variation des constantes : on doit résoudre le système

$$\begin{cases} a'(t)e^t & + & b'(t)te^{-t} & + & c'(t)e^{-t} & = & 0 \\ a'(t)e^t & + & b'(t)(e^{-t} - te^{-t}) & - & c'(t)e^{-t} & = & 0 \\ a'(t)e^t & + & b'(t)(-2e^{-t} + te^{-t}) & + & c'(t)e^{-t} & = & 1 + \mathrm{ch}(t) \end{cases}$$

Par la méthode du pivot de Gauss, on détermine a', b' et c'. On note A, B, C les primitives respectives qui s'annulent en 0. Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (1) est donc formée des fonctions

$$t \mapsto ae^t + (bt + c)e^{-t} + A(t)e^t + B(t)te^{-t} + C(t)e^{-t}, \ a, b, c \in \mathbb{R}.$$

On résout l'équation

$$y''' + y'' + y' + y = \cos(t).$$

On a déjà déterminé les solutions de l'équation homogène : ce sont les fonctions de la forme

$$t \mapsto ae^{-t} + b\cos(t) + c\sin(t), a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Ainsi (x_1, x_2, x_3) (avec $x_1(t) = e^{-t}, x_2(t) = \cos(t), x_3(t) = \sin(t)$) est un système fondamental de solutions de l'équation homogène associée à (2).

On détermine une solution particulière par méthode de variation des constantes : on cherche une solution sous la forme $X(t) = a(t)X_1(t) + b(t)X_2(t) + c(t)X_3(t)$ avec a, b, c dérivables. On obtient le système

$$\begin{cases} a'(t)e^{-t} & + & b'(t)\cos(t) & + & c'(t)\sin(t) & = & 0 \\ -a'(t)e^{-t} & - & b'(t)\sin(t) & + & c'(t)\cos(t) & = & 0 \\ a'(t)e^{-t} & - & b'(t)\cos(t) & - & c'(t)\sin(t) & = & \cos(t) \end{cases}$$

Après résolution du système, on obtient :

$$a'(t) = \frac{1}{2}\cos(t)e^t, \ b'(t) = -\frac{1}{4}\sin(2t) - \frac{1}{4}\cos(2t) - \frac{1}{4}, \ c'(t) = -\frac{1}{4}\sin(2t) + \frac{1}{4}\cos(2t) + \frac{1}{4}.$$

On note A, B, C les primitives respectives qui s'annulent en 0. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle (2) est alors donné par les fonctions

$$t \mapsto ae^{-t} + b\cos(t) + c\sin(t) + A(t)e^{-t} + B(t)\cos(t) + C(t)\sin(t), \ a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Références

- [Deb1] G. Debeaumarché - Manuel de mathématiques - Volume 4 Analyse et géométrie différentelle - 2e année de prépas scientifiques MP-MP* - Ellipses.
- [Deb2] G. Debeaumarché - Manuel de mathématiques - Volume 4 Algèbre et géométrie - 2e année de prépas scientifiques MP-MP* - Ellipses.
- [Dem] J.-P. Demailly - Analyse numérique et équations différentielles - Collection Grenoble Sciences.
- [G] X. Gourdon - Les maths en tête - Algèbre - Ellipses.