Correction du Devoir Maison no. 2
Rappels d'Algèbre Linéaire

Exercice 14
Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie N et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On note $P_f(X) = (-1)^N \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ son polynôme caractéristique et Q_f son polynôme minimal. Pour tout i, soit $N_i = \mathrm{Ker}(f - \lambda_i \mathrm{Id})^{\alpha_i}$ le sous-espace caractéristique de f associé à la valeur propre λ_i. Justifier les points suivants :

1. Pour tout i, N_i est stable par f.
2. On a $E = N_1 \oplus \cdots \oplus N_p$.
3. Pour tout i, $\dim N_i = \alpha_i$.
4. $Q_f(X)$ divise le polynôme caractéristique $P_f(X)$. On le note $Q_f(X) = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)^{\beta_i}$, avec $1 \leq \beta_i \leq \alpha_i$.
5. $N_i = \ker(f - \lambda_i \mathrm{Id})^{\beta_i}$.
6. f est diagonalisable si et seulement si $\beta_i = 1$ pour $i = 1, \cdots, p$.

Solution

1. On utilise le lemme suivant.

   Lemme 1 Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, f et g des endomorphismes de E qui commutent (i.e. $f \circ g = g \circ f$). Alors $\mathrm{Ker}(g)$ et $\mathrm{Im}(g)$ sont stables par f.

   Pour tout i, notons P_i le polynôme $P_i(X) = (X - \lambda_1)^{\alpha_i}$. Alors $N_i = \mathrm{Ker}(P_i(f))$. De plus, f et $P_i(f)$ commutent (l'algèbre $\mathbb{C}[f]$ est commutative !). Par le Lemme 1, N_i est donc stable par f.

2. On utilise les deux résultats suivants.

   Proposition 2 (Lemme des noyaux) Soient $f \in \mathcal{L}(E)$, $(P_i)_{1 \leq i \leq p}$ une famille de polynômes **deux à deux** premiers entre eux. Alors

$$\mathrm{Ker}((\prod_{i=1}^p P_i)(f)) = \bigoplus_{i=1}^p \mathrm{Ker}(P_i(f)).$$

Ici, les polynômes P_i ($1 \leq i \leq p$) définis à la question précédente sont bien premiers entre eux (ils n'ont pas de racine commune). Par la Proposition 2, on a donc

$$\mathrm{Ker}((\mathrm{P_f})(\mathrm{f})) = \mathrm{Ker}((\prod_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{p}} \mathrm{P_i})(\mathrm{f})) = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{Ker}(P_i(f)) = N_1 \oplus \cdots \oplus N_p.$$

Proposition 3 (Théorème de Cayley-Hamilton) Le polynôme caractéristique P_f de f est un polynôme annulateur de f (i.e. $P_f(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$).

Par la proposition 3, on obtient finalement

$$E = N_1 \oplus \cdots \oplus N_p.$$

En particulier, $\dim(E) = \sum_i \dim(N_i)$.

3. Commençons par démontrer les résultats intermédiaires suivants.

Proposition 4 Soit $n \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent. Alors $P_n(X) = (-1)^N X^N$ (où $N = \dim(E)$).

En effet, si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de n et v un vecteur propre associé à λ, on a par un calcul rapide

$$\forall q \in \mathbb{N},\ n^q(v) = \lambda^q v.$$

Or pour q égale à l'indice de nilpotence de n, on obtient $n^q(v) = 0 = \lambda^q v$. Comme $v \neq 0_E$, $\lambda^q = 0$ et donc $\lambda = 0$. Finalement, $P_n(X) = (-1)^N \prod_{i=1}^{p}(X - \lambda_i)^{\alpha_i} = (-1)^N X^N$.

Proposition 5 Soit F un s.e.v strict de E (i.e. $F \neq E$ et $F \neq \{0_E\}$). On suppose que F est stable par f et on note $g = f_{|F}$ la restriction de f à F. Alors $g \in \mathcal{L}(F)$ et P_g divise P_f.

En effet, F étant stable par f, sa restriction g au s.e.v F est un endomorphisme de F. De plus considérons une base $\mathcal{B}' = (e_1, \cdots, e_r)$ de F qu'on complète en une base $\mathcal{B}(e_1, \cdots, e_N)$ de E. La matrice de f dans cette base est de la forme

$$\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \text{ où } A = \mathrm{Mat}(g, \mathcal{B}').$$

Alors

$$P_f = \begin{bmatrix} A - XI_r & C \\ 0 & B - XI_{N-r} \end{bmatrix} = \det(A - XI_r)\cdot\det(B - XI_{N-r}) = P_g(X)\cdot\det(B - XI_{N-r}).$$

On peut à présent démontrer le résultat demandé. Pour tout i, le s.e.v N_i est stable par f, donc également par $f - \lambda_i\mathrm{Id}$. Notons f_i (resp. n_i) la restriction de f (resp. $f - \lambda_i\mathrm{Id}$) à N_i. $f_i, n_i \in \mathcal{L}(N_i)$. Par définition de $N_i = \mathrm{Ker}(f - \lambda_i\mathrm{Id})^{\alpha_i}$, on a $n_i^{\alpha_i} = 0$. Donc n_i est nilpotente, et par la Proposition 4,

$$P_{n_i} = (-1)^{\dim(N_i)} X^{\dim(N_i)}.$$

Ainsi, $P_{f_i} = (-1)^{\dim(N_i)}(X-\lambda_i)^{\dim(N_i)}$.

Par la proposition 5, on sait de plus que P_{f_i} divise $P_f(-1)^N \prod_{i=1}^p (X-\lambda_i)^{\alpha_i}$. On a donc finalement pour tout i,

$$\dim(N_i) \le \alpha_i.$$

Comme enfin on a

$$\dim(E) = \deg(P_f) = \alpha_1 + \cdots + \alpha_p$$

et

$$\dim(E) = \dim(N_1) + \cdots + \dim(N_p)$$

et que $\dim(N_i) \le \alpha_i$ pour tout i, on obtient finalement

$$\dim(N_i) = \alpha_i.$$

4. Rappelons la définition du polynôme minimal. Notons $I = \{P \in \mathbb{C}[X] | P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}\}$ l'ensemble des polynômes annulateurs de f. Cet ensemble est non vide (il contient par exemple le polynôme caractéristique P_f de f - ou la famille $(\mathrm{Id}_E, f, \cdots, f^{N^2})$ de $\mathcal{L}(E)$ de dimension N^2 est liée) et on montre facilement que c'est un idéal de $\mathbb{C}[X]$ (groupe pour l'addition, stable par produit avec un polynôme quelconque). Comme l'anneau $\mathbb{C}[X]$ est principal (car muni d'une division euclidienne), il existe un unique polynôme unitaire Q_f tel que

$$I = \langle Q_f \rangle.$$

Ce polynôme est par définition le polynôme minimal de f. Par la Proposition 3 (Th. de Cayley-Hamilton), Q_f divise $P_f = (-1)^N \prod_{i=1}^p (X-\lambda_i)^{\alpha_i}$. Ainsi,

$$Q_f(X) = \prod_{i=1}^p (X-\lambda_i)^{\beta_i} \text{ avec } \beta_i \le \alpha_i \text{ pour tout } i.$$

Reste à montrer que $\beta_i \ge 1$ pour tout i. On utilise le résultat suivant.

Proposition 6 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $Q \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme annulateur de f. Alors les valeurs propres de f sont racines de Q.

En effet si λ est une valeur propre de f, v un vecteur propre associé, alors on montre facilement que pour tout polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$,

$$Q(f)(v) = Q(\lambda) \cdot v.$$

En particulier si Q est un polynôme annulateur de f, on obtient $Q(\lambda) \cdot v = 0_E$. Comme $v \neq 0_E$, on a finalement $Q(\lambda) = 0$.

Remarque Attention au fait qu'une racine de Q n'est pas nécessairement valeur propre de f : par exemple $Q(X) = (X-1)(X-2)$ est annulateur de Id_E, mais 2 n'est pas valeur propre de Id.

Ici pour tout i, λ_i est donc racine de Q_f qui est un polynôme annulateur de f. Donc $\beta_i \ge 1$ ce qui termine la preuve de cette question.

5. Puisque $\beta_i \geq \alpha_i$ pour tout i, on a l'inclusion

$$\mathrm{Ker}(f-\lambda_i \mathrm{Id})^{\beta_i} \subseteq \mathrm{Ker}(f-\lambda_i \mathrm{Id})^{\alpha_i}.$$

Comme Q_f est annulateur de f, et en utilisant la Proposition 2, on obtient

$$E = \mathrm{Ker}(Q(f)) = \mathrm{Ker}\left(\prod_{i=1}^{p}(X-\lambda_i)^{\beta_i}(f)\right) = \mathrm{Ker}(f-\lambda_i \mathrm{Id})^{\beta_1} \oplus \cdots \oplus \mathrm{Ker}(f-\lambda_i \mathrm{Id})^{\beta_p}.$$

Enfin, rappelons que

$$E = \mathrm{Ker}(f-\lambda_i \mathrm{Id})^{\alpha_1} \oplus \cdots \oplus \mathrm{Ker}(f-\lambda_i \mathrm{Id})^{\alpha_p}.$$

On en déduit donc que $\mathrm{Ker}(f-\lambda_i \mathrm{Id})^{\beta_i} = \mathrm{Ker}(f-\lambda_i \mathrm{Id})^{\alpha_i}$.

6. Si $\beta_i = 1$ pour tout i, alors $N_i = \mathrm{Ker}(f-\lambda_i)$ et E est somme direct des s.e. propres de f. Donc f est diagonalisable.

Réciproquement, si f est diagonalisable alors

$$E = \mathrm{Ker}(f-\lambda_1 \mathrm{Id}) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Ker}(f-\lambda_1 \mathrm{Id}).$$

Par la Proposition 3, on obtient donc

$$E = \mathrm{Ker}\left(\prod_{i}(X-\lambda_i)(f)\right)$$

et $Q = \prod_i (X-\lambda_i)$ est un polynôme annulateur de f. En particulier Q_f divise Q. Donc $\beta_i \leq 1$ pour tout i. Comme on avait montré que $\beta_i \geq 1$, on a donc

$$\beta_i = 1 \text{ pour tout } i = 1, \cdots p.$$

Remarque On a en fait montré les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} f \text{ est diagonalisable} \quad &\Leftrightarrow \quad \dim \mathrm{Ker}(f-\lambda_i \mathrm{Id}) = \alpha_i \text{ pour tout } i = 1, \cdots, p, \\ &\Leftrightarrow \quad \text{le polynôme minimal } Q_f \text{ est scindé à racines simples,} \\ &\Leftrightarrow \quad f \text{ admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.} \end{aligned}$$

Références

- X. Gourdon - Les maths en tête - Algèbre - Ellipses.
- G. Debeaumarché - Manuel de mathématiques - Volume 4 Algèbre et géométrie - 2e année de prépas scientifiques MP-MP* - Ellipses.