Fiche Méthode 1

Fonctions de répartitions et densités

Méthode 1. Montrer qu'une fonction est une densité de probabilité.

Pour montrer qu'une fonction f est une *densité de probabilité*, on revient à la définition en prouvant successivement que :

- f est positive sur $\mathbb{R}$;
- f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points, qu'on précisera sans pousser l'étude plus loin (cela n'étant pas nécessaire).
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge et vaut 1.

Méthode 2. Montrer qu'une fonction est une fonction de répartition.

Rappelons que si X est une variable aléatoire, la *fonction de répartition de X* (ou *loi de X*) est par définition la fonction F_X définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$F_X(x) = P(X \leq x).$$

Pour montrer que $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la *fonction de répartition* (aussi appelée *loi de probabilité*) d'une variable aléatoire X, on prouvera que :

- F est croissante sur $\mathbb{R}$;
- $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$;
- F est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire :

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \to x_0^+} F(x) = F(x_0).$$

Bien souvent, le fait que F soit une fonction de répartition provient de sa définition même (recherche de la fonction de répartition de Y lorsque $Y = g(X)$ par exemple) et les points précédents sont automatiquement vérifiés (du moins si vous n'avez pas fait d'erreurs, et ça peut justement être utile pour contrôler vos calculs). Il sera donc inutile de les préciser dans votre copie.

Ces trois points sont à vérifier essentiellement dans un cas pour nous : lorsqu'on étudie la convergence en loi d'une suite (X_n) de variables aléatoires, on vérifie que la « fonction limite » F des F_{X_n} est la fonction de répartition d'une variable aléatoire (quitte, si nécessaire, à changer sa valeur en ses points de discontinuité).

Méthode 3. Déterminer la fonction de répartition d'une variable aléatoire.

Si on dispose d'une densité f de X, alors F_X s'obtient à l'aide d'un calcul intégrale :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t.$$

Si $Y = g(X)$ et qu'on connait la loi F_X de X et une densité f_X, on détermine F_Y en procédant comme suit :

- on détermine $X(\Omega) = \{t \in \mathbb{R},\ f(t) \neq 0\}$, puis $Y(\Omega) = g(X(\Omega))$, et on en déduit sans calcul à quels endroits F_Y vaut 0 ou 1 ;
- on exprime $F_Y(x) = P(Y \leq x)$ à l'aide de F_X en résolvant (avec le plus grand soin) l'inéquation $g(X) \leq x$. On justifiera en particulier le passage d'une inégalité stricte à une inégalité large lorsque X est à densité.

Méthode 4. Prouver qu'une variable aléatoire X est à densité.

La question ne se pose pas si la loi de X est définie à partir d'une densité de probabilité.

Dans les autres cas, si la fonction de répartition F_X de X n'a pas été déterminée, on commencera par l'expliciter.

Il faut ensuite prouver que F_X est :

- continue sur $\mathbb{R}$ tout entier. En général, seuls un ou deux points peuvent poser problème. En ces points, il faudra revenir à la définition de la continuité, en étudiant les limites à droite et à gauche et en les comparant à la valeur de F_X au point.
- de classe $\mathscr{C}^1$, sauf éventuellement en un nombre fini de points. On se contentera de préciser quels sont ces points, il est inutile de pousser l'étude plus loin.

Méthode 5. Déterminer une densité d'une variable aléatoire X.

Il faut bien entendu avoir déjà calculé F_X et prouvé que la variable X est à densité (voir ci-dessus).

Pour obtenir une densité de X :

- on dérive F_X partout où c'est possible de le faire ;
- on prend comme densité une fonction qui coïncide avec F_X' là où cette dernière existe, et n'importe quelle valeur (0 est le choix standard) en les points (nécessairement en nombre fini) où F_X' n'est pas définie.