Colle 1. Elena Marsoudet

Question de cours. Valeurs propres et polynôme annulateur (Propriétés 11 et 12).

Exercice 1

Soit Z une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. On pose $X = e^Z$.

1. On suppose que Z suit la loi normale centrée réduite. On dit alors que X *suit la loi log-normale de paramètres* 0 *et* 1.
   (a) Montrer que X est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de X.
   (b) Soit $\alpha > 0$. Montrer que X^α admet une espérance et déterminer $E(X^\alpha)$.
   (c) En déduire que X admet une espérance et une variance et les déterminer.
2. On suppose maintenant que Z suit la loi normale de paramètres m et σ^2 (où $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$). On dit alors que X *suit la loi log-normale de paramètres* m *et* σ^2.
   (a) Montrer que la variable aléatoire $X^* = (e^{-m}X)^{\frac{1}{\sigma}}$ suit la loi log-normale de paramètres 0 et 1.
   (b) Montrer que X admet une espérance et une variance et les déterminer.

Exercice 2

Soit φ une forme linéaire non nulle d'un espace vectoriel E de dimension finie, et soit u un vecteur non nul de E. On définit un endomorphisme de E par $f(x) = x + \varphi(x) \cdot u$. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f.

Colle 2. Clément Noir

Question de cours. Espérance et variance d'une loi normale.

Exercice 3

Dans tout l'exercice, (A, B) désigne un couple de matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tel que :

$$AB - BA = A \quad \text{et} \quad A \text{ non-nulle.} \qquad (*)$$

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^kB - BA^k = kA^k$.
2. En considérant l'endomorphisme φ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ défini par :
$$\varphi : M \mapsto MB - BM,$$
montrer qu'il existe un entier $p \geq 2$ tel que $A^p = 0$.
3. Montrer que $p \leq n$.
4. On étudie à présent le cas $n = 2$.
   (a) Montrer qu'il existe une matrice $P \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que :
$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = T.$$
   (b) Montrer que $(*)$ se réécrit alors :
$$TC - CT = T$$
   où $C = P^{-1}BP$.
   (c) Déterminer l'ensemble des solutions de $(*)$ dans le cas $n = 2$.

Exercice 4

Soit $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\ln(2)} \frac{1}{1+x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire admettant X pour densité. Montrer que $Y = \frac{1}{X} - \lfloor \frac{1}{X} \rfloor$ a même loi que X.

Colle 3. Samy Noui

Question de cours. Si X variable à densité suivant une loi de Cauchy, X^2 est à densité, et calcul d'une densité.

Exercice 5

Soient $f, g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$. On suppose que $f \circ g = g \circ f$ et que f admet n valeurs propres distinctes.

1. Montrer que tout sous-espace propre de f est stable par g.
2. Montrer que tout vecteur propre de f est vecteur propre de g.
3. Montrer qu'il existe une base de E formée à la fois de vecteurs propres de f et de vecteurs propres de g. Que dire des matrices de f et g dans une telle base ?
4. Soit A la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Déterminer le nombre de matrices $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $B^2 = A$ (i.e. le nombre de « racines carrées » de A).

Exercice 6

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ suivant la loi normale d'espérance m et de variance égale à 1. Soit b un réel strictement positif fixé.

1. Montrer que l'application $a \mapsto P(a < X < a + b)$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, admet un maximum atteint en un point a_0 que l'on déterminera.
2. Exprimer la valeur de ce maximum à l'aide de la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite.
3. Interpréter géométriquement ce résultat.
