Colle 1. Yasmine Abdelmagid

Question de cours. Propriétés de la fonction Γ : domaine de définition, $\Gamma(\nu+1)=\nu\Gamma(\nu)$

Exercice 1

Soient les matrices $F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ et $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $P = X^3 - X$ est un polynôme annulateur de F.
   En déduire les éléments propres de F.
2. Déterminer le rang de $G - I_3$ et calculer $G\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   En déduire les éléments propres de G.
3. (a) Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ composée de vecteurs propres communs à F et G.
   (b) Déterminer la matrice de passage P de la base canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ à la base $\mathscr{B}$, ainsi que les matrices $P^{-1}FP$ et $P^{-1}GP$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(xt)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq \sqrt{2\pi}$.
3. Montrer que f est croissante sur $[-1,1]$.
4. Montrer que pour tout $x \in [-1,1]$, $|f(x)| \leq \dfrac{\pi^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{2}}|x|$.
   En déduire que f est continue en 0.

Colle 2. Tim Moussié

Question de cours. La somme de sous-espaces propres est directe.

Exercice 3

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note, sous réserve de convergence, $F(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-tx^2}}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale définissant $F(x)$ converge. Ainsi, F est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que F est paire.
3. Étudier les variations de F sur $\mathbb{R}_+$, et calculer sa limite en $+\infty$. En déduire le tableau de variation de F (on ne demande pas la valeur de $F(0)$).
4. (a) Montrer que pour tout $(a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2$, on a : $|e^{-a} - e^{-b}| \leq |a-b|$.
   (b) En déduire que pour tous $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a : $|F(x) - F(y)| \leq |x^2 - y^2|$.
   (c) Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4

Soit φ une forme linéaire non nulle d'un espace vectoriel E de dimension finie, et soit u un vecteur non nul de E. On définit un endomorphisme de E par $f(x) = x + \varphi(x)\cdot u$. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f.

Colle 3. Ourane Pointelin

Question de cours. Valeurs propres et polynômes annulateurs.

Exercice 5

Soit f la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-xt}\frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que, pour tout $x > 0$, l'intégrale définissant $f(x)$ converge. Ainsi, f est une fonction définie sur $]0,+\infty[$.
2. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que f est bien définie en 0.
3. (a) Montrer que pour tout $x \in [0,+\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et que $0 \leq \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t^2}\,\mathrm{d}t \leq 1$.
   (b) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t}\mathrm{d}t = 0$.
   (c) En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Exercice 6

On considère l'application $f : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mapsto \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} a+d & b+c \\ b+c & a+d \end{pmatrix}$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, et écrire la matrice de f dans la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $f^2 = f$.
3. Déterminer les valeurs propres de f, ainsi qu'une base de chacun de ses sous-espaces propres.
4. Déterminer une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de f. Donner la matrice de f dans cette base.
