Colle 1. Louise Equoy

Question de cours. Stabilité de la loi de Poisson par somme.

Exercice 1

On considère l'application $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^x \,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que l'intégrale $f(x)$ converge si, et seulement si, $x > -1$.

   Ainsi, f est une fonction définie sur $I =]-1, +\infty[$. On admet que f est continue sur I.

2. Montrer que f est décroissante sur I.

3. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $\forall x \in I, \quad (2x+3)f(x+1) = (2x+2)f(x)$.

4. En déduire que $f(x) \underset{x\to -1^+}{\sim} \dfrac{1}{2x+2}$.

Exercice 2

Soient $(p,q) \in]0,1[^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
Soient T, T' et U trois variables aléatoires mutuellement indépendantes.
On suppose que T suit la loi géométrique de paramètre p, T' suit la loi géométrique de paramètre q et U suit la loi uniforme sur $\{0, \dots, n\}$.
On pose $X = T + U$ et $X' = T' + (n-U)$.

1. Déterminer, en justifiant leur existence, l'espérance et la variance de X et X'.

2. Déterminer la covariance de X et X'.

3. Les variables aléatoires X et X' peuvent-elles être indépendantes ?

4. Déterminer le cœfficient de corrélation linéaire de U et X.

Colle 2. Julien Gogneau

Question de cours. Propriétés de la fonction Γ : domaine de définition et $\Gamma(\nu+1) = \nu\Gamma(\nu)$.

Exercice 3

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ suivant la même loi géométrique de paramètre p. On pose $q = 1-p$, $U = X_1 + X_2$, $T = X_1 - X_2$.

1. Déterminer la loi de U.

2. Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

   (a) Déterminer la loi conditionnelle de X_1 sachant $[U = n]$.

   (b) Calculer l'espérance conditionnelle $E(X_1 \,|\, [U=n])$.
   Retrouver la valeur de $E(X_1)$.

3. Déterminer la loi de T.

4. Calculer $\mathrm{Cov}(U,T)$. Les variables U et T sont-elles indépendantes ?

Exercice 4

Soit f la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(xt)}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq \sqrt{2\pi}$.

3. Montrer que f est croissante sur $[-1,1]$.

4. Montrer que pour tout $x \in [-1,1]$, $|f(x)| \leq \dfrac{\pi^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{2}}|x|$.
   En déduire que f est continue en 0.

Colle 3. Justine Mascaro

Question de cours. Loi de $Z = \max(X,Y)$ avec $X, Y \hookrightarrow \mathscr{U}(⟦1,n⟧)$ indépendantes.

Exercice 5

On note, sous réserve d'existence :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^n}, \quad J_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^n},$$

$$K_n = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^n}.$$

1. Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, l'existence de I_n, J_n, K_n.
   Quelle relation y a-t-il entre I_n, J_n, K_n ?

2. On note $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t}$. Montrer que :
$$\lim_{n\to+\infty} J_n - J = 0.$$

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$:
$$0 \leq K_n \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^n}\,\mathrm{d}t.$$

4. Conclure sur la limite de I_n.

Exercice 6

Soit λ et μ deux réels strictement positifs.
Soit U, V et W trois variables aléatoires mutuellement indépendantes telles que U et W suivent la loi de Poisson de paramètre λ et V suit la loi de Poisson de paramètre μ.
On pose $X = U + V$ et $Y = V + W$.

1. Déterminer les lois de X et Y.

2. Montrer que $\mathrm{Cov}(X,Y)$ existe et la calculer.

3. En déduire le cœfficient de corrélation linéaire de X et Y.
