Colle 1. Jules Barthelemy

Question de cours. Propriété de la trace.

Exercice 1

On note, pour tout entier $n \geq 1$, $A_n = \dfrac{1}{n!} n^n e^{-n} \sqrt{n}$.

On note, pour tout entier $n \geq 2$, $a_n = -1 - \left(n - \dfrac{1}{2}\right) \ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$.

1. À l'aide d'un développement limité, déterminer un équivalent simple de la suite a_n.

   En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} a_n$ converge.

2. Montrer, pour tout entier $n \geq 2$, que $a_n = \ln(A_n) - \ln(A_{n-1})$.

3. En déduire que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, et que sa limite ℓ est strictement positive.

4. Justifier que $n! \sim \dfrac{1}{\ell} n^n e^{-n} \sqrt{n}$.

Exercice 2

1. Montrer que la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 + 1$ est strictement monotone. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

2. En déduire que si P est un polynôme réel tel que $P(0) = 0$ et $P(X^2+1) = P(X)^2 + 1$, alors $P = X$.

Colle 2. Nathan Dos Santos

Question de cours. Formules des probabilités totales et de Bayes.

Exercice 3

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels strictement positifs. On dit que le produit $\prod u_n$ converge si la suite (v_n) définie par $v_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} u_k$ admet une limite non nulle ℓ, et l'on note alors :

$$\ell = \prod_{k=1}^{+\infty} u_k.$$

1. (a) Montrer que si $\prod u_n$ converge, alors $\lim u_n = 1$.

   (b) Montrer que le produit infini $\displaystyle\prod_{n\geq 2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ est divergent.

   La réciproque de la question précédente est-elle vraie ?

   (c) Étudier la convergence du produit $\displaystyle\prod_{n\geq 2}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$

2. Dans cette question, on suppose que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer l'équivalence entre les trois propositions suivantes :

   (1) le produit $\prod (1 + u_n)$ converge ;

   (2) la série $\sum \ln(1 + u_n)$ converge ;

   (3) la série $\sum u_n$ converge.

3. Étudier la convergence du produit $\displaystyle\prod_{n\geq 2} \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$.

Exercice 4

1. Soit $k \geq 0$ et notons $\mathscr{T}_k^+(\mathbb{R})$ l'ensemble de matrices $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

   $$a_{i,j} = 0 \text{ si } i + k > j.$$

   (i) Identifier $\mathscr{T}_0^+(\mathbb{R})$, $\mathscr{T}_1^+(\mathbb{R})$, $\mathscr{T}_n^+(\mathbb{R})$

   (ii) Soient $k, l \geq 1$. Montrer que si $A \in \mathscr{T}_k^+(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{T}_l^+(\mathbb{R})$, alors $A \times B \in \mathscr{T}_{k+l}^+(\mathbb{R})$.

2. Montrer qu'une matrice triangulaire supérieure stricte est nilpotente, d'ordre de nilpotence $\leq n$.

Colle 3. Lucien Malfroy

Question de cours. Équivalent de la série harmonique par comparaison série/intégrale.

Exercice 5

On considère deux urnes contenant chacune 2 boules. Initialement, les urnes sont unicolores : la première contient les deux boules noires et la seconde les deux blanches.

On tire au hasard une boule dans chaque urne et on les intervertit. On enchaîne les tirages de façon indépendante. À chaque étape de ce jeu, on dénombre les boules noires dans la première urne.

Pour n un entier naturel non nul, on note les événements :

- Z_n :« il y a aucune boule noire dans l'urne une » ;
- U_n : « il y a 1 boule noire dans l'urne une » ;
- D_n : « il y a 2 boules noires dans l'urne une ».

Pour la suite, on notera : $z_n = P(Z_n)$, $u_n = P(U_n)$ et $d_n = P(D_n)$.

1. Déterminer ces trois valeurs à l'étape $n = 0$ et $n = 1$.
2. Soit n un entier naturel non nul. Exprimer u_{n+1} en fonction de z_n, u_n et d_n.
3. En déduire une relation entre u_{n+1} et u_n.
4. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 6

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha \ln(n)}$.

   On pourra distinguer les cas où $\alpha < 1$ et $\alpha > 1$.

2. Montrer que $\dfrac{1}{n\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(n))$.

   En déduire la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{n\ln(n)}$.
