Colle 1. Ruby Flajoulot

Question de cours. Loi faible des grands nombres.

Exercice 1
Soit σ un réel strictement positif. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)\frac{n^2 x}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{n^2x^2}{2\sigma^2}\right).$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est une densité de probabilité.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ de densité f_n.
   (a) Déterminer la fonction de répartition de X_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que X_n admet une espérance et la déterminer.
   (c) Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers la variable constante égale à 0.
   (d) Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable constante égale à 0.

Exercice 2
Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3.
On note H le sous-espace vectoriel de E engendré par les trois polynômes $(X-1)(X-2)(X-4)$, $(X-1)(X-3)(X-4)$ et $(X-2)(X-3)(X-4)$.

1. (a) Justifier que H est un hyperplan de E.
   (b) Trouver une forme linéaire dont le noyau est égal à H. Est-elle unique ?
2. On considère le produit scalaire sur E défini pour tout $(P, Q) \in E^2$ par :

$$\langle P, Q\rangle = P(1)Q(1) + P(2)Q(2) + P(3)Q(3) + P(4)Q(4).$$

   Calculer, pour tout polynôme $P \in E$, la projection orthogonale de P sur $H^\perp$.

Colle 2. Théo Mary

Question de cours. Convergence en loi de (X_n) dans le cas où $X_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n, \lambda/n)$.

Exercice 3
Soient E et F deux espaces vectoriels euclidiens de dimensions non nulles. Soit f une application linéaire de E dans F et b un élément de F.

1. Montrer que $\min\limits_{x\in E}\|b - f(x)\|$ existe.
2. Soit $\mathscr{S}$ l'ensemble des éléments de E qui réalisent ce minimum et a_0 un élément de $\mathscr{S}$.
   (a) Montrer que $\mathscr{S} = \{a_0 + u, u \in \mathrm{Ker} f\}$.
   (b) Montrer que $\mathscr{S}$ contient un élément de norme minimale et un seul que nous noterons a.
   (c) Montrer que a est caractérisé par $b - f(a) \in (\mathrm{Im} f)^\perp$ et $a \in (\mathrm{Ker} f)^\perp$.
3. (a) Montrer que l'application g de F dans E qui à tout élément b de F associe l'élément a obtenu à la question 2. est linéaire.
   On dit que g est *la pseudo-inverse* de f.
   (b) Montrer que $f \circ g$ est la projection orthogonale sur $\mathrm{Im} f$ et $g \circ f$ celle sur $(\mathrm{Ker} f)^\perp$. Que dire lorsque f est bijective ?

Exercice 4
On considère pour tout entier $n \geq 1$, la variable aléatoire Z_n qui est simulée dans la fonction Python ci-dessous.

```python
def Z(n,lbd):
      X = rd.exponential(1/lbd,[2,n])
      c = 0
      for k in range(n):
            if X[0,k] <= X[2,k] :
                  c = c+1
      return c/n
```

Montrer que la suite de variables aléatoires (Z_n) converge en probabilité vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

Colle 3. Mathéo Morvan

Question de cours. Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors $E = F \oplus F^\perp$ et $\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F)$.

Exercice 5
Soit (p_n) une suite de réels appartenant à $]0, 1[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p_n.

1. On suppose que (p_n) converge vers 1.
   (a) Étudier la convergence en loi de la suite (X_n).
   (b) La suite (X_n) converge-t-elle en probabilité ?
2. On suppose que (p_n) converge vers 0.
   (a) Étudier la convergence en loi de la suite (X_n).
   (b) On pose $Y_n = p_n X_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Quelle est la limite en loi de la suite $(p_n X_n)$?

Exercice 6
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $A = I_n - C\,{}^tC \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, où C est un vecteur colonne non nul. On confond $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^n$.
On note $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ l'endomorphisme de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire usuel, et on note $\|\cdot\|$ la norme associée.

1. La matrice A est-elle diagonalisable ? Déterminer ses valeurs propres et les vecteurs propres associés.
2. À quelle condition sur C l'application f est-elle un projecteur ? Préciser alors de quel projecteur il s'agit.
3. Dans cette question, $n = 4$ et $C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. On note H le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ d'équation $x - y + z - t = 0$.
   (a) Quelle est la dimension de H ?
   (b) Soit $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Déterminer le réel α défini par $\alpha = \inf\{\|U - X\|, X \in H\}$.
   La valeur α est-elle atteinte ? Si oui, préciser pour quel(s) vecteur(s) de H.
   (c) Déterminer, dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$, la matrice B de la projection orthogonale sur H.
