Colle 1. Arthur Bobot

Question de cours. CNS de diagonalisabilité de f.

Exercice 1

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier qu'on définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[x]$ en posant :
$$\langle P, Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$
2. Établir l'existence de réels $(p_0, p_1, \ldots, p_n)$ (on précisera p_0) tels que :
$$(x-1)(x-2)\ldots(x-n) = p_0 + \sum_{k=1}^{n} p_k(x+1)(x+2)\ldots(x+k).$$
3. Vérifier que $P(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} p_k x^k$ est orthogonal au sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(x, x^2, \ldots, x^n)$.

   En déduire la distance du polynôme 1 au sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(x, x^2, \ldots, x^n)$.

Exercice 2

On considère un circuit électronique avec 3 composants C_1, C_2 et C_3.

Ce circuit ne fonctionne qui si C_1 fonctionne ainsi que C_2 ou C_3.

Sachant que les durées de vie de chaque composant, supposées mutuellement indépendantes, suivent une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, déterminer la loi de la durée de vie du circuit complet.

Proposer un programme `Python` permettant de vérifier le résultat obtenu.

Colle 2. Romane Jeangirard

Question de cours. Expression du projeté orthogonal lorsqu'on dispose d'une base orthonormée de F.

Exercice 3

Dans cet exercice, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. On désigne par I la matrice unité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Établir que $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \ker(\mathrm{tr}) \oplus \mathrm{Vect}(I)$.
2. Soit f l'application qui, à toute matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ associe $f(M) = M + \mathrm{tr}(M)I$.
   On admet que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   (a) Utiliser la première question pour déterminer les valeurs propres de f.
   (b) En déduire que f est un automorphisme diagonalisable de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Soit g l'application qui, à toute matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ associe $g(M) = M + \mathrm{tr}(M)J$, où J désigne une matrice non nulle de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont la trace est nulle.
   On admet que g est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   (a) Établir que le polynôme $X^2 - 2X + 1$ est un polynôme annulateur de g.
   (b) Montrer que 1 est la seule valeur propre de g.
   (c) g est-il diagonalisable ?

Exercice 4

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda > 0$.

1. Déterminer la valeur de r pour laquelle $f_\lambda : x \to \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq \lambda \\ \dfrac{r}{x^{k+1}} & \text{sinon} \end{cases}$ est une densité de probabilité.
   Si X admet pour densité f_λ, on dit que X suit la loi de Pareto de paramètre λ et k.
2. Déterminer la fonction de répartition d'une variable suivant la loi de Pareto de paramètres λ et k.
3. En utilisant la méthode d'inversion, simuler une variable aléatoire suivant une loi de Pareto de paramètres λ et k.
4. Soient $X_1, \cdots, X_k$ k variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur [0,1]. On pose alors $Y = \dfrac{\lambda}{\max(X_1, \cdots, X_k)}$.
   (a) Montrer que Y suit une loi de Pareto de paramètres λ et k.
   (b) En déduire une autre méthode pour simuler la loi de Pareto.

Colle 3. Julie Magnin

Question de cours. Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors $\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F)$ et $E = F \oplus F^\perp$.

Exercice 5

On note $E = \mathscr{C}^1([-1,1])$ et on pose pour tout f et g dans E :
$$\langle f, g\rangle = f(0)g(0) + \int_{-1}^{1} f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t.$$
On définit les fonctions :
$$f_0 : x \mapsto x, \quad f_1 : x \mapsto \cos(2x), \quad f_2 : x \mapsto \sin(2x).$$

1. Justifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E.
2. On pose $F = \mathrm{Vect}(f_1, f_2)$.
   (a) Calculer la projection orthogonale de f_0 sur F.
   (b) En déduire la distance de f_0 à F.

Exercice 6

Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ n variables mutuellement indépendantes et suivant chacune la loi exponentielle de paramètre λ. On pose $M = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

1. Montrer que M est une variable à densité et déterminer une densité de M.
2. Montrer que $E(M) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} \frac{(-1)^k}{\lambda(k+1)}$.
3. Montrer que pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, $\dfrac{1}{k+1} = \displaystyle\int_0^1 t^k \mathrm{d}t$ et en déduire que $E(M) = \dfrac{1}{\lambda} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.