Colle 1. Rihab Khalloufi

Question de cours. CNS de diagonalisabilité de f.

Exercice 1

Un joueur prend pour cible un mur muni d'un repère orthonormé (O, i, j). On note X et Y les variables aléatoires désignant respectivement l'abscisse et l'ordonnée du point d'impact du tir sur le mur, et on suppose que X et Y sont indépendantes, de même loi normale centrée réduite. On note Φ la fonction de répartition de X.

1. (a) Donner une densité de $|X|$.
   (b) Montrer que la variable aléatoire $Z = |X| + |Y|$ admet comme densité la fonction h définie par

$$h(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} e^{-x^2/4} \displaystyle\int_{-x/2}^{x/2} e^{-v^2} \, \mathrm{d}v & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. (a) Déterminer la dérivée de la fonction φ définie sur $\mathbf{R}$ par : $\varphi(x) = \displaystyle\int_{-x/2}^{x/2} e^{-v^2} \, \mathrm{d}v$.
   (b) Étudier les variations de φ et tracer l'allure de sa représentation graphique dans un repère orthonormé du plan.
3. On peint sur le mur un carré plein de sommets $(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)$.

   On note p la probabilité pour que l'impact soit dans le carré. Exprimer p à l'aide de la variable aléatoire Z, et déterminer p en fonction de Φ.

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de dimension finie $n \geq 2$. On considère des endomorphismes f, p et q de E, ainsi que des scalaires distincts λ et μ tels que pour tout $k \in \{0, 1, 2\}$, on a $f^k = \lambda^k p + \mu^k q$.

1. Montrer que $(f - \lambda \mathrm{Id}_E) \circ (f - \mu \mathrm{Id}_E) = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
2. En déduire que l'ensemble des valeurs propres de f est inclus dans $\{\lambda, \mu\}$ et que f est diagonalisable.

Colle 2. Malak Lokhnati

Question de cours. Loi de $\max(X_1, \ldots, X_n)$ lorsque $X_1, \ldots, X_n \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1, N]\!])$ sont mutuellement indépendantes.

Exercice 3

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 2 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. On cherche dans cet exercice à trouver toutes les matrices $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :

$$M^2 + M = A. \qquad (*)$$

1. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.
2. Soit M une solution de $(*)$.
   (a) Vérifier que $AM = MA$.
   (b) Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé. Montrer que $MX \in E_\lambda(A)$, et en déduire qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $MX = \mu X$. Donner une relation entre λ et μ.
3. Déterminer toutes les solutions de $(*)$, et donner l'unique solution dont toutes les valeurs propres sont positives.

Exercice 4 (★)

Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé, suivant respectivement des lois $\mathscr{E}(a)$ et $\mathscr{E}(b)$ avec $a, b > 0$.

Déterminer la loi de $Z = X + Y$. *On distinguera pour cela les cas $a = b$ et $a \neq b$.*
