Colle 1. Mathilde Corniche

Question de cours. Propriétés de la norme euclidienne.

Exercice 1

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi normale centrée réduite.

1. Déterminer la loi de $T = X^2$.
2. Justifier la convergence et calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1+\sin(u)}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t-t^2}}$ à l'aide du changement de variable $t = \frac{1+\sin(u)}{2}$.
3. Déterminer la loi de $Z = X^2 + Y^2$.

Exercice 2

On note E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $c_k : t \mapsto \cos(kt)$ et $s_k : t \mapsto \sin(kt)$.

1. Montrer qu'on définit un produit scalaire sur E en posant :
$$\forall f, g \in E, \quad \langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$
2. (a) Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, calculer $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt)\,\mathrm{d}t$.
   (b) Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Rappeler les formules trigonométriques relatives à $\cos(a+b)$ et $\cos(a-b)$.
   (c) Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ et $t \in [-\pi, \pi]$.
   Écrire $\cos(mt)\cos(nt)$ et $\sin(mt)\sin(nt)$ comme une somme de deux cosinus.
3. (a) Déterminer la norme de c_k et de s_k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la famille $(c_0, c_1, s_1, c_2, s_2, \ldots, c_n, s_n)$ est orthogonale.
   (c) En déduire une famille orthonormale de E.

Colle 2. Houyeim Smaïn

Question de cours. Formules dans une base orthonormée.

Exercice 3

On considère, pour tous polynômes P, Q à cœfficients réels :
$$\Phi(P,\, Q) = (PQ)(0) + \int_{-1}^{1} P'(t)\,Q'(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que Φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[x]$.
   On note désormais $\langle P, Q\rangle = \Phi(P, Q)$.
2. Déterminer $\langle x^p, x^q\rangle$ pour tout couple $(p, q) \in \mathbb{N}^2$.
3. Montrer que la famille $(1, x, x^2, x^3 - x)$ est une famille orthogonale.
4. En déduire une famille orthonormée de $\mathbb{R}_3[x]$ qui est également une base de $\mathbb{R}_3[x]$.

Exercice 4 (★)

Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé, suivant respectivement des lois $\mathscr{E}(a)$ et $\mathscr{E}(b)$ avec $a, b > 0$.

Déterminer la loi de $Z = X + Y$. *On distinguera pour cela les cas $a = b$ et $a \neq b$.*