TD9

# Valeurs propres, vecteurs propres

## Valeurs propres, vecteurs propres

### Exercice 9.1 (★)

On considère l'endomorphisme $u$ de $\mathbb{R}_2[x]$ défini par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[x], \quad u(P) = (x^2+1)P'' + 2xP'.$$

1. Justifier que $u$ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$.
2. Montrer que 1 et $x$ sont des vecteurs propres de $u$. À quelles valeurs propres sont-ils associés ?
3. Montrer que 6 est une valeur propre de $u$.
4. $u$ admet-il d'autres valeurs propres ? Déterminer les sous-espaces propres de $u$.
5. Déterminer une base de $\mathbb{R}_2[x]$ dans laquelle la matrice de $u$ est diagonale.

---

### Exercice 9.2 (★)

Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$ défini par $f(P) = -P''(1) + 2P'(1)(x-1) - 2P(1)(x-1)^2$.

On pose $Q_1 = 1$, $Q_2 = x-1$ et $Q_3 = \dfrac{1}{2}(x-1)^2$.

1. Vérifier que $f$ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$.
2. Montrer que $(Q_1, Q_2, Q_3)$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$ et déterminer la matrice de $f$ dans cette base.
3. Montrer que 2 et $-2$ sont des valeurs propres de $f$ et déterminer les dimensions des sous-espaces propres $E_2$ et $E_{-2}$ associés.
4. L'endomorphisme $f$ peut-il admettre d'autres valeurs propres ?
5. Montrer que $E_2 \oplus E_{-2} = \mathbb{R}_2[x]$ et déterminer une base de $\mathbb{R}_2[x]$ où la matrice de $f$ est diagonale.

---

### Exercice 9.3 (★)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible.

Montrer que $\mathrm{Sp}(A^{-1}) = \left\{\dfrac{1}{\lambda},\ \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\right\}$, et que pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, $E_\lambda(A) = E_{1/\lambda}(A^{-1})$.

---

### Exercice 9.4 (★)

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, et $x \in E$, $x \neq 0_E$. Montrer l'équivalence suivante :

$$\mathrm{Vect}(x) \text{ est stable par } f \quad \Leftrightarrow \quad x \text{ est un vecteur propre de } f$$

---

### Exercice 9.5 (★★ - Matrices stochastiques - D'après EML 2010 - ✍)

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad a_{i,j} \geq 0 \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![1,n]\!], \quad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1.$$

1. Soit $V \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ le vecteur colonne dont tous les coefficients valent 1. Calculer $AV$ et en déduire une valeur propre de $A$.

2. Soit $\lambda$ une valeur propre de $A$, et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé à $\lambda$. Soit $i \in [\![1,n]\!]$ tel que $|x_i| = \max\limits_{k\in[\![1,n]\!]} |x_k|$.
   (a) Montrer que $|\lambda x_i| \leq |x_i|$.
   (b) En déduire que $|\lambda| \leq 1$, et que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset [-1,1]$.

---

### Exercice 9.6 (★★★ - QSP HEC 2012)

Soit $E$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$. Soit $T$ l'application qui à toute fonction $f \in E$ associe la fonction $F = T(f)$ définie par : $F(0) = f(0)$ et $\forall x > 0,\ F(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $T$ est un endomorphisme de $E$. Est-il injectif ?
2. Déterminer les réels $\lambda$ et les fonctions $f$ vérifiant $T(f) = \lambda f$.

---

### Exercice 9.7 (★★★★ - QSP HEC 2014)

Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ est un projecteur.
2. Quelles sont les valeurs propres de $f$ ?
3. Combien existe-t-il de droites vectorielles de $\mathbb{R}^3$ stables par $f$ ?
4. Combien existe-t-il de plans vectorielles de $\mathbb{R}^3$ stables par $f$ ?

---

## Recherche des éléments propres

### Exercice 9.8 (★)

Déterminer les éléments propres des matrices suivantes (on les étudiera dans $\mathbb{C}$ et dans $\mathbb{R}$ lorsque cela a un sens). On pourra vérifier ses calculs sur `Python` à l'aide de la commande `al.eig(A)` (de la librairie `numpy.linalg`) qui donne les valeurs propres d'une matrice `A`.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 2 & -7 & 6 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 7 \\ -2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

---

### Exercice 9.9 (★)

Considérons les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $A$ et $B$ ont même rang, même trace, mêmes valeurs propres et des sous-espaces propres de même dimension.
2. Calculer $(A - 2I_4)^2$ et $(B - 2I_4)^2$. En déduire que les matrices $A$ et $B$ ne sont pas semblables.

---

### Exercice 9.10 (★)

Déterminer sans calcul les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

---

**Exercice 9.11 (★★★ - Oral HEC 2010)**
Soit $n \geq 2$, et soit $M_n$ a matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $M_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $a \in \mathbb{R}$ est valeur propre de $M_n$ si, et seulement si, $a$ est racine du polynôme
$$P_n(X) = X^n - X^{n-1} - X^{n-2} - \dots - X - 1.$$
2. Déterminer alors le sous-espace propre associé à la valeur $a$.

---

**Exercice 9.12 (★)**
Soit $f : \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} d & 2b \\ 2c & a \end{pmatrix}$. Montrer que $f$ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et déterminer ses éléments propres.

---

**Exercice 9.13 (★★ - ✍)**
Soit $n \geq 2$ et soit $J_n \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1.

1. Déterminer $\mathrm{Sp}(J_n)$.
2. Montrer que $J_n$ est semblable à une matrice diagonale dont on précisera les coefficients diagonaux.

---

**Exercice 9.14 (★★)**
Soit $E = \mathbb{R}_n[x]$ et soit $a$ un réel non nul. On note $f$ l'application définie sur $E$ par $f(P) = (x-a)P'$

1. Montrer que $f$ est un endomorphisme de $E$.
2. Écrire la matrice de $f$ dans la base canonique de $E$. En déduire que $f$ admet $n+1$ valeurs propres distinctes que l'on notera $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n$.
3. Soit $P_k$ un vecteur propre de $f$ associé à la valeur propre $\lambda_k$.
   (a) Déterminer $\deg(P_k)$.
   *Indication. On identifiera le coefficient dominant dans l'égalité $f(P_k) = \lambda_k P_k$.*
   (b) On note $r_k$ l'ordre de multiplicité de $a$ en tant que racine de $P_k$, et $Q_k$ tel que $P_k = (x-a)^{r_k} Q_k$.
   Déterminer $r_k$ et en déduire le sous-espace propre de $f$ associé à la valeur propre $\lambda_k$.

---

**Exercice 9.15 (★★★)**
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$ et soit $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = \mathrm{Tr}(A)M - \mathrm{Tr}(M)A$.

1. Montrer que $f$ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Déterminer les valeurs propres de $f$ et la dimension des sous-espaces propres associés.

---

## Valeurs propres et polynômes annulateurs

**Exercice 9.16 (★)**
1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 6 \\ 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 \end{pmatrix}$. Calculer $A^4 - 3A^3 + 4A$, et en déduire les éléments propres de $A$.
2. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. Chercher un polynôme annulateur de $B$. En déduire le spectre de $B$.

---

**Exercice 9.17 (★★ - Matrices compagnons - ✍)**
Soit $P$ un polynôme unitaire de degré 3 à cœfficients dans $\mathbb{R}$, qu'on note $P = x^3 - a_2x^2 - a_1x - a_0$.

On appelle *matrice compagnon du polynôme* $P$ la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & a_2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $P$ est un polynôme annulateur de $M$.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lambda$ est une valeur propre de $M$ si, et seulement si, $\lambda$ est une racine de $P$.
3. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\text{rg}(M - \lambda I_3) \geq 2$. En déduire que chaque sous-espace propre de $M$ est de dimension 1.
4. **Exemples.** Déterminer un polynôme annulateur et les valeurs propres des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

---

**Exercice 9.18 (★★★ - QSP HEC 2015)**
Soit $E$ un espace vectoriel réel de dimension finie et $f$ un endomorphisme de $E$.

1. Établir l'existence d'un polynôme $P$ non nul tel que $P(f) = 0$.
2. Soit $Q$ un polynôme tel que $Q(f) = 0$ et de degré minimal parmi les polynômes non nuls tels que $P(f) = 0$.

   Montrer que toute racine réelle de $Q$ est valeur propre de $f$.

---

**Exercice 9.19 (★★★★ - Oral ESCP 2012)**
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ admettant $n$ valeurs propres distinctes.

1. Montrer que la famille $(I_n, A, \ldots, A^{n-1})$ est libre.

   *Indication : On pourra commencer par remarquer que si $P$ est un polynôme annulateur non nul de $A$, alors* $\deg(P) \geq n$.
2. On note $\mathscr{C} = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \quad AM = MA\}$. Montrer que $\mathscr{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension supérieure ou égale à $n$.
3. Montrer qu'il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et une matrice $\Delta \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telle que :

$$A = P\Delta P^{-1}.$$

4. Soit $M \in \mathscr{C}$. Montrer que tout vecteur propre de $A$ est un vecteur propre de $M$.

   En déduire que la matrice $P^{-1}MP$ est diagonale.

   En déduire que $\mathscr{C}$ est de dimension inférieure ou égale à $n$.
5. Montrer que $(I, A, \ldots, A^{n-1})$ est une base de $\mathscr{C}$.
6. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. On note $\mathscr{R} = \{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}), \quad M^2 = A\}$.
   (a) Montrer que $\mathscr{R} \subset \text{Vect}(I, A)$.
   (b) Montrer que $\mathscr{R}$ est de cardinal 4, et déterminer les 4 matrices $M$ vérifiant $M^2 = A$.

---