TD9

Valeurs propres, vecteurs propres

Valeurs propres, vecteurs propres

Exercice 9.1 (★)

On considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}_2[x]$ défini par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[x], \quad u(P) = (x^2+1)P'' + 2xP'.$$

1. Justifier que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$.
2. Montrer que 1 et X sont des vecteurs propres de u. À quelles valeurs propres sont-ils associés ?
3. Montrer que 6 est une valeur propre de u.
4. u admet-il d'autres valeurs propres ? Déterminer les sous-espaces propres de u.
5. Déterminer une base de $\mathbb{R}_2[x]$ dans laquelle la matrice de u est diagonale.

Exercice 9.2 (★)

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$ défini par $f(P) = -P''(1) + 2P'(1)(x-1) - 2P(1)(x-1)^2$.
On pose $Q_1 = 1$, $Q_2 = x-1$ et $Q_3 = \frac{1}{2}(x-1)^2$.

1. Vérifier que f est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$.
2. Montrer que (Q_1, Q_2, Q_3) est une base de $\mathbb{R}_2[x]$ et déterminer la matrice de f dans cette base.
3. Montrer que 2 et -2 sont des valeurs propres de f et déterminer les dimensions des sous-espaces propres E_2 et E_{-2} associés.
4. L'endomorphisme f peut-il admettre d'autres valeurs propres ?
5. Montrer que $E_2 \oplus E_{-2} = \mathbb{R}_2[x]$ et déterminer une base de $\mathbb{R}_2[x]$ où la matrice de f est diagonale.

1. Pour tout $P \in \mathbb{R}_2[x]$:

$$f(P) = -P''(1) + 2P'(1)(x-1) - 2P(1)(x-1)^2 \in \mathrm{Vect}(1, x-1, (x-1)^2) \subset \mathbb{R}_2[x].$$

On montre de plus la linéarité de f (à faire). Donc f est bien un endomorphisme de $E = \mathbb{R}_2[x]$.

2. Notons $\mathscr{B} = (Q_1, Q_2, Q_3)$. C'est une famille échelonnée en degrés, donc libre. Elle est de cardinal $3 = \dim \mathbb{R}_2[x]$. C'est donc une base de E. De plus :

$$f(Q_1) = -2(x-1)^2 = -4Q_3, \quad f(Q_2) = 2(x-1) = 2Q_2, \quad f(Q_3) = -1 = -Q_1.$$

Ainsi :

$$M_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A.$$

3. Calculons :

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est de rang $1 < 3$. Donc 2 est valeur propre de A, et $\dim E_2(f) = 3 - 1 = 2$.

D'autre part :

$$A + 2I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est de rang $2 < 3$. Donc -2 est valeur propre de A, et $\dim E_{-2}(f) = 3 - 2 = 1$.

4. Puisque $\dim E_{-2}(f) + \dim E_2(f) = 1 + 2 = 3 = \dim \mathbb{R}_2[x]$, f ne peut pas admettre d'autres valeurs propres.

5. On sait déjà que les sous-espaces propres sont en somme directe. Comme de plus $\dim E_{-2}(f) + \dim E_2(f) = \dim \mathbb{R}_2[x]$, on en déduit directement que $E_2 \oplus E_{-2} = \mathbb{R}_2[x]$.

   On calcule les sous-espace propres, on trouve :

$$E_2(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}\right) \quad , \quad E_{-2}(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\right).$$

   et donc

$$E_2(f) = \text{Vect}\left(Q_2, Q_1 - 2Q_3\right) \quad , \quad E_{-2}(f) = \text{Vect}\left(Q_1 + 2Q_3\right).$$

   La famille $\mathscr{C} = (Q_2, Q_1 - 2Q_3, Q_1 + 2Q_3)$ est donc une base de $\mathbb{R}_2[x]$ par concaténation des bases de $E_2(f)$ et de $E_{-2}(f)$, dans laquelle la matrice de f est :

$$M_{\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & -2\end{pmatrix}.$$

Exercice 9.3 (★)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible.

Montrer que $\text{Sp}(A^{-1}) = \left\{\frac{1}{\lambda},\ \lambda \in \text{Sp}(A)\right\}$, et que pour $\lambda \in \text{Sp}(A)$, $E_\lambda(A) = E_{1/\lambda}(A^{-1})$.

Exercice 9.4 (★)

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, et $x \in E$, $x \neq 0_E$. Montrer l'équivalence suivante :

$$\text{Vect}(x) \text{ est stable par } f \quad \Leftrightarrow \quad x \text{ est un vecteur propre de } f$$

Soit $x \neq 0_E$. $\text{Vect}(x)$ est stable par f si, et seulement si, $f(x) \in \text{Vect}(x)$, soit si, et seulement si, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \alpha \cdot x$, ce qui est encore équivalent à x est un vecteur propre pour f

---

Exercice 9.5 (★★ - Matrices stochastiques - D'après EML 2010 - ✍)

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad a_{i,j} \geq 0 \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![1,n]\!], \quad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1.$$

1. Soit $V \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ le vecteur colonne dont tous les coefficients valent 1. Calculer AV et en déduire une valeur propre de A.

2. Soit λ une valeur propre de A, et $X = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ un vecteur propre associé à λ. Soit $i \in [\![1,n]\!]$ tel que $|x_i| = \max\limits_{k \in [\![1,n]\!]} |x_k|$.

   (a) Montrer que $|\lambda x_i| \leq |x_i|$.

   (b) En déduire que $|\lambda| \leq 1$, et que $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset [-1, 1]$.

1. Calculons $AV = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1,j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{n,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = V$. V (qui est non nul) est donc un vecteur propre de A pour la valeur propre 1.

2. (a) Par définition, $AX = \lambda X$. D'où en considérant la i-ème ligne de cette expression :

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j} = \lambda x_i.$$

On obtient par l'inégalité triangulaire, et puisque $|x_i| = \max_{k \in [\![1,n]\!]} |x_k|$:

$$|\lambda x_i| \leq \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j} x_j| \leq \sum_{j=1}^n a_{i,j} |x_i| = |x_i| \sum_{j=1}^n a_{i,j} = |x_i|.$$

(b) Puisque X est un vecteur propre, il est en particulier non nul, et donc $x_i \neq 0$. Ainsi on obtient $|\lambda| \leq 1$ en divisant par $|x_i|$. Il suit $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset [-1, 1]$.

Exercice 9.6 (★★★ - QSP HEC 2012)

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$. Soit T l'application qui à toute fonction $f \in E$ associe la fonction $F = T(f)$ définie par : $F(0) = f(0)$ et $\forall x > 0$, $F(x) = \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.

1. Montrer que T est un endomorphisme de E. Est-il injectif ?
2. Déterminer les réels λ et les fonctions f vérifiant $T(f) = \lambda f$.

1. Commençons par montrer que pour tout $f \in E$, $T(f)$ appartient bien à E. Puisque f est continue sur $\mathbb{R}_+$, $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est bien définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, et pour tout $x \geq 0$, $\varphi'(x) = f(x)$. Par suite, F est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus :

$$\lim_{x \to 0^+} F(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = \varphi'(0) = f(0) = F(0).$$

Donc F est continue sur $\mathbb{R}_+$, et $T(f) \in E$.

Montrons que T est linéaire : pour tout $f, g \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

- si $x > 0$:

$$T(\lambda f + \mu g)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x (\lambda f + \mu g)(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\lambda}{x} \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{\mu}{x} \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t = \lambda T(f)(x) + \mu T(g)(x).$$

- si $x = 0$:

$$T(\lambda f + \mu g)(0) = (\lambda f + \mu g)(0) = \lambda f(0) + \mu g(0) = \lambda T(f)(0) + \mu T(g)(0).$$

Ainsi $T(\lambda f + \mu g)(0) = \lambda T(f) + \mu T(g)$, et T est un endomorphisme de E.

Soit $f \in E$ tel que $T(f) = 0_E$. Alors $f(0) = 0$ et pour tout $x > 0$,

$$F(x) = 0, \quad \text{soit :} \quad \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

En dérivant, il suit que pour tout $x > 0$, $f(x) = 0$. Comme de plus $f(0) = 0$, on obtient $f = 0_E$. Ainsi $\mathrm{Ker}(T) = \{0_E\}$ et T est bien injective.

2. Si $\lambda = 0$, on vient de montrer qu'alors $f = 0_E$. Supposons $\lambda \neq 0$ et soit $f \in E$ tel que $T(f) = \lambda f$. Pour $x = 0$:
$$f(0) = \lambda f(0) \quad \Rightarrow \quad (1-\lambda)f(0) = 0.$$
Deux cas sont possibles :

   - Si $\lambda = 1$, alors pour tout $x > 0$:
   $$f(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$
   Ainsi f est le quotient de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ dont le dénominateur ne s'annule pas, donc est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et :
   $$xf(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$
   D'où en dérivant, on obtient pour tout $x > 0$
   $$f(x) + xf'(x) = f(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0.$$
   Ainsi f est constante sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme elle est de plus continue sur $\mathbb{R}_+$, elle est constante sur $\mathbb{R}_+$ égale à $f(0)$.
   - Si $\lambda \neq 1$, alors $f(0) = 0$, et par la même étude que précédemment, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour tout $x > 0$:
   $$f(x)+xf'(x) = \lambda f(x) \quad \Rightarrow \quad (1-\lambda)f(x)+xf'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad (1-\lambda)x^{-\lambda}f(x)+x^{1-\lambda}f'(x) = 0.$$
   Ainsi $[x^{1-\lambda}f(x)]' = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $x^{1-\lambda}f(x) = C$ pour tout $x > 0$, ce qui s'écrit encore :
   $$\forall x > 0, \quad f(x) = Cx^{\lambda-1}.$$
   Enfin, f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $f(0) = 0$, ce qui impose $C = 0$ ou $C \neq 0$ et $\lambda > 1$.

Réciproquement, on vérifie que toutes les fonctions obtenues sont bien solutions de l'équation $T(f) = \lambda f$. On peut donc conclure que :

   - $E_1(T)$ est l'ensemble des fonctions constantes ;
   - $E_\lambda(T)$ est réduit à la fonction nulle si $\lambda \leq 1$;
   - $E_\lambda(T) = \mathrm{Vect}\left(x \mapsto x^{\lambda-1}\right)$ si $\lambda > 1$.

Exercice 9.7 (★★★★ - QSP HEC 2014)
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ est un projecteur.
2. Quelles sont les valeurs propres de f ?
3. Combien existe-t-il de droites vectorielles de $\mathbb{R}^3$ stables par f ?
4. Combien existe-t-il de plans vectorielles de $\mathbb{R}^3$ stables par f ?

1. On vérifie que $(M - I_3)^2 = M - I_3$. Donc $p = f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ est un projecteur.
2. p est un projecteur sur $F = \mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id})$ parallèlement à $G = Ker(p)$. De plus :
$$\mathbb{R}^3 = F \oplus G.$$
Comme $M - I_3 \neq 0_3$ et de I_3, alors $F \neq \{0_E\}$ et $G \neq \{0_E\}$. De plus $p - \mathrm{Id} = f - 2\mathrm{Id}$, et donc $F = \mathrm{Ker}(f - 2Id)$. De même $G = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$. Donc 1 et 2 sont valeurs propres de f. Comme de plus $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$, on en déduit que f n'a pas d'autres valeurs propres, et donc que $\mathrm{Sp}(f) = \{1, 2\}$.

3. Soit $x \neq 0_E$. D'après l'exercice 9.4, $\mathrm{Vect}(x)$ est stable par f si, et seulement si, x est un vecteur propre pour f. Commençons donc par déterminer les vecteurs propres de f, et pour cela chercher ses sous-espaces propres. On trouve après calculs :

$$E_1(f) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right) \quad \text{et} \quad E_2(f) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right).$$

Donnons tout d'abord l'idée : l'espace $E_2(f)$ étant un sous-espace propre de dimension 2, toute droite vectorielle incluse dans ce plan vectoriel sera stable par f, et il y a une infinité de telles droites vectorielles. Ainsi f admet une infinité de droites stables.

Plus concrètement maintenant, considérons les vecteurs $x_\alpha = \alpha \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ avec α qui parcourt $\mathbb{R}$. Ce sont des vecteurs de $E_2(f)$ non nuls (car les vecteurs $\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ sont non colinéaires). Il s'agit donc de vecteurs propres de f pour la valeur propre 2. Ainsi $\mathrm{Vect}(x_\alpha)$ est une droite vectorielle stable par f. Et ces droites sont deux à deux distinctes : en effet supposons que $\mathrm{Vect}(x_\alpha) = \mathrm{Vect}(x'_\alpha)$ pour $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$. Alors il existerait $\beta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$x_{\alpha'} = \beta x_\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha' \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} = \beta\alpha \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Par liberté de la famille $\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right)$, on obtient $\begin{cases}\alpha' = \beta\alpha\\ 1 = \beta\end{cases} \Rightarrow \alpha' = \alpha.$

Ainsi les droites vectorielles $\mathrm{Vect}(x_\alpha)$ sont bien deux à deux distinctes et stables par f, et elles sont en nombre infini. Donc f admet bien une infinité de droites vectorielles stables.

4. Il y en a une infinité également. Pour le montrer, fixons $\alpha \in \mathbb{R}$, et considérons les vecteurs propres $x = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $y_\alpha = \alpha \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$. Posons $P_\alpha = \mathrm{Vect}(x, y_\alpha)$. C'est un sous-espace stable par f car $f(x) = x \in P_\alpha$ et $f(y_\alpha) = 2y_\alpha \in P_\alpha$. De plus (x, y_α) est une famille libre car c'est une famille de vecteurs propres (non nuls) associés à des valeurs propres distinctes. Ainsi $\dim(P_\alpha) = 2$, et P_α est un plan vectoriel stable par f pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Montrons que ces plans sont deux à deux distincts. Soit pour cela $\alpha \neq \beta$. Supposons que $P_\alpha = P_\beta$. Alors on aurait $y_\alpha \in P_\beta$, et il existerait $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que :

$$y_\alpha = \lambda \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + \mu y_\beta$$

soit encore :

$$\alpha \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + \mu\beta \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} \tag{1}$$

Or la famille $\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ comme réunion de bases de $E_1(f)$ et de $E_2(f)$ et puisque $\mathbb{R}^3 = E_1(f) \oplus E_2(f)$. Elle est en particulier libre. On déduit donc de (1) que :

$$\begin{cases}0 = \lambda\\ \alpha = \mu\beta\\ 1 = \mu\end{cases} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \beta.$$

Or ceci est impossible puisque $\alpha \neq \beta$ par hypothèse.

On a donc construit une famille $(P_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ infinie de plans vectoriels stables par f et deux à deux distincts. Il y a donc bien une infinité de plans vectoriels stables par f.

Recherche des éléments propres

Exercice 9.8 (★)

Déterminer les éléments propres des matrices suivantes (on les étudiera dans $\mathbb{C}$ et dans $\mathbb{R}$ lorsque cela a un sens). On pourra vérifier ses calculs sur `Python` à l'aide de la commande `al.eig(A)` (de la librairie `numpy.linalg`) qui donne les valeurs propres d'une matrice `A`.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 2 & -7 & 6 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 7 \\ -2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Je ne donne ici que les résultats à trouver, à vous de faire les calculs.

- A est une matrice 2×2, les valeurs propres sont donc les racines du polynôme :

$$P = x^2 - \mathrm{Tr}(A)x + \det(A) = x^2 + x - 12 = (x+4)(x-3).$$

  On obtient donc $\mathrm{Sp}(A) = \{-4, 3\}$. On a donc deux valeurs propres distinctes pour une matrice de taille 2×2. Les sous-espaces propres sont donc de dimension 1. On trouve après calcul :

$$E_3(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad \text{et} \quad E_{-4}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right).$$

- B est une matrice 2×2, les valeurs propres sont les racines du polynôme :

$$P = x^2 - \mathrm{Tr}(B)x + \det(B) = x^2 - 2x + 2.$$

  Le discriminant de ce polynôme étant strictement négatif, on a $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(B) = \emptyset$.

- La matrice C est diagonale, donc en particulier triangulaire supérieure. Les valeurs propres sont donc sur la diagonale, de sorte que $\mathrm{Sp}(C) = \{2, 1\}$. Comme C est diagonale, les vecteurs propres sont tout simplement ceux de la base canonique. On obtient donc sans calcul :

$$E_2(C) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad \text{et} \quad E_2(C) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

- La matrice D est triangulaire supérieure. Les valeurs propres sont donc sur la diagonale, de sorte que $\mathrm{Sp}(D) = \{-1, 2\}$. On détermine les sous-espaces propres par calculs en résolvant les systèmes linéaires associés. On trouve :

$$E_{-1}(D) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \quad \text{et} \quad E_2(D) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right).$$

- E n'est pas triangulaire, on ne trouve pas les valeurs propres à vue a priori. On doit donc appliquer l'algorithme de Gauss. On trouve après calculs que $\mathrm{Sp}(E) = \{1, -1, 2\}$. Il y a donc trois valeurs propres distinctes pour une matrice de taille 3×3. Les sous-espaces propres sont tous de dimension 1. On trouve après calculs :

$$E_1(D) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) \quad , \quad E_{-1}(D) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right) \quad \text{et} \quad E_2(D) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right).$$

- F n'est pas triangulaire, on ne trouve pas toutes les valeurs propres à vue. On peut seulement noter que 0 est valeur propre car le rang de F est 2. On doit malgré tout appliquer l'algorithme de Gauss pour obtenir les autres valeurs propres. On trouve après calculs que $\mathrm{Sp}(F) = \{1, -1, 0\}$. Il y a donc trois valeurs propres distinctes pour une matrice de taille 3×3. Les sous-espaces propres sont tous de dimension 1. On trouve après calculs :

$$E_1(F) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right) \quad , \quad E_{-1}(F) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right) \quad \text{et} \quad E_0(F) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right).$$

- Là aussi, on n'a pas d'autre choix que d'appliquer Gauss pour trouver les valeurs propres de G. On obtient après calculs que $\mathrm{Sp}(G) = \{1, 2\}$. On trouve après calculs :

$$E_1(G) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}\right) \quad \text{et} \quad E_2(G) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right).$$

- Encore une fois, on n'a pas d'autre choix que d'appliquer Gauss. On obtient après calculs que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(H) = \{3\}$. On trouve après calculs :

$$E_3(H) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}4\\2\\-1\end{pmatrix}\right).$$

Exercice 9.9 (★)
Considérons les matrices $A = \begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&2&1&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.

1. Montrer que A et B ont même rang, même trace, mêmes valeurs propres et des sous-espaces propres de même dimension.
2. Calculer $(A - 2I_4)^2$ et $(B - 2I_4)^2$. En déduire que les matrices A et B ne sont pas semblables.

Exercice 9.10 (★)
Déterminer sans calcul les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&1&2\end{pmatrix}$.

Exercice 9.11 (★★★ - Oral HEC 2010)
Soit $n \geq 2$, et soit M_n a matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $M_n = \begin{pmatrix}1&1&\dots&\dots&1\\1&0&\dots&\dots&0\\0&1&\ddots&&0\\\vdots&&\ddots&\ddots&\vdots\\0&\dots&0&1&0\end{pmatrix}$.

1. Montrer que $a \in \mathbb{R}$ est valeur propre de M_n si et seulement si a est racine du polynôme
$$P_n(X) = X^n - X^{n-1} - X^{n-2} - \dots - X - 1.$$
2. Déterminer alors le sous-espace propre associé à la valeur a.

1. Cette matrice est difficile à aborder car de taille n quelconque. Faisons toutefois à la main les premières opérations d'un pivot. On a, pour a réel :

$$M_n - aI_n = \begin{pmatrix} 1-a & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & -a & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftrightarrow L_1}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -a & \dots & \dots & 0 \\ 1-a & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2-(1-a)L_1}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -a & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -P_2(a) & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & -a & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftrightarrow L_2}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -a & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -a & \dots & 0 \\ 0 & -P_2(a) & 1 & & 1 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3+P_2(a)L_2}{\overset{\leftrightarrow}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & -a & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -a & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -P_3(a) & & 1 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a \end{pmatrix}$$

En effet, on obtient à la troisième étape $1+a(1-a) = 1+a-a^2 = -P_2(a)$. De même à la dernière étape, on reconnait après calculs $-P_3(a)$.

Remarquons en fait que pour tout i :

$$1 - aP_i(a) = 1 - a\left(a^i - a^{i-1} - \cdots - a - 1\right) = 1 - a^{i+1} + a^i + \cdots + a^2 + a = -P_{i+1}(a).$$

En procédant de proche en proche, en permutant à chaque fois la ligne i avec la ligne $i+1$, puis en procédant à l'opération $L_{i+1} \leftarrow L_{i+1} + P_i(a)L_i$, on obtient la matrice échelonnée :

$$\begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & -a \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -P_n(a) \end{pmatrix}$$

Ainsi, a est valeur propre si, et seulement si, cette matrice est de rang strictement inférieur à n, c'est-à-dire si, et seulement si, $P_n(a) = 0$.

2. Un vecteur $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est dans $E_a(M_n)$ si, et seulement si, $M_nX = aX \Leftrightarrow (M_n - aI_n)X = 0$.

Le système associé est alors :

$$\begin{cases} (1-a)x_1 + x_2 + \cdots + x_n & = 0 \\ x_1 - ax_2 & = 0 \\ x_2 - ax_3 & = 0 \\ & \vdots \\ x_{n-2} - ax_{n-1} & = 0 \\ x_{n-1} - ax_n & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (1-a)x_1 + x_2 + \cdots + x_n & = 0 \\ x_1 & = ax_2 \\ & \vdots \\ x_2 & = ax_3 \\ x_{n-2} & = ax_{x-1} \\ x_{n-1} & = a_nx_n \end{cases}$$

En remplaçant de proche en proche, on obtient $x_{n-2} = ax_{n-1} = a^2x_n$, puis $x_{n-3} = a^3x_n, \ldots, x_1 = a^{n-1}x_n$.

La première équation s'écrit alors :

$$(1-a)a^{n-1}x_n + a^{n-2}x_n + \cdots + x_n = 0 \Leftrightarrow \left(-a^n + a^{n-1} + \cdots + a + 1\right) x_n = 0 \Leftrightarrow P_n(a)x_1 = 0$$

Si a est valeur propre, alors cette équation est en fait $0 = 0$.

Ainsi, $X = \begin{pmatrix} a^{n-1}x_1 \\ a^{n-2}x_2 \\ \vdots \\ ax_1 \\ x_1 \end{pmatrix}$, de sorte que $E_a(M_n) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} a^{n-1} \\ a^{n-2} \\ \vdots \\ a \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Exercice 9.12 (★)
Soit $f : \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} d & 2b \\ 2c & a \end{pmatrix}$. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et déterminer ses éléments propres.

Exercice 9.13 (★★ - ✍)
Soit $n \geq 2$ et soit $J_n \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1.

1. Déterminer $\text{Sp}(J_n)$.
2. Montrer que J_n est semblable à une matrice diagonale dont on précisera les coefficients diagonaux.

Exercice 9.14 (★★)
Soit $E = \mathbb{R}_n[x]$ et soit a un réel non nul. On note f l'application définie sur E par $f(P) = (x-a)P'$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Écrire la matrice de f dans la base canonique de E. En déduire que f admet $n+1$ valeurs propres distinctes que l'on notera $\lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n$.
3. Soit P_k un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ_k.
   (a) Déterminer $\deg(P_k)$.
   Indication. On identifiera le coefficient dominant dans l'égalité $f(P_k) = \lambda_k P_k$.
   (b) On note r_k l'ordre de multiplicité de a en tant que racine de P_k, et Q_k tel que $P_k = (X-a)^{r_k} Q_k$. Déterminer r_k et en déduire le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ_k.

Exercice 9.15 (★★★)
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\text{Tr}(A) \neq 0$ et soit $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = \text{Tr}(A)M - \text{Tr}(M)A$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Déterminer les valeurs propres de f et la dimension des sous-espaces propres associés.

Valeurs propres et polynômes annulateurs

Exercice 9.16 (★)
1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 6 \\ 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 \end{pmatrix}$. Calculer $A^4 - 3A^3 + 4A$, et en déduire les éléments propres de A.
2. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. Chercher un polynôme annulateur de B. En déduire le spectre de B.

Exercice 9.17 (★★ - Matrices compagnons - ✍)
Soit P un polynôme unitaire de degré 3 à cœfficients dans $\mathbb{R}$, qu'on note $P = x^3 - a_2x^2 - a_1x - a_0$.

On appelle *matrice compagnon du polynôme* P la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & a_2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est un polynôme annulateur de M.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que λ est une valeur propre de M si et seulement si λ est une racine de P.
3. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\text{rg}(M - \lambda I_3) \geq 2$. En déduire que chaque sous-espace propre de M est de dimension 1.
4. **Exemples.** Déterminer un polynôme annulateur et les valeurs propres des matrices suivantes :
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9.18 (★★★ - QSP HEC 2015)
Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie et f un endomorphisme de E.

1. Établir l'existence d'un polynôme P non nul tel que $P(f) = 0$.
2. Soit Q un polynôme tel que $Q(f) = 0$ et de degré minimal parmi les polynômes non nuls tels que $P(f) = 0$.
Montrer que toute racine réelle de Q est valeur propre de f.

Exercice 9.19 (★★★★ - Oral ESCP 2012)
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ admettant n valeurs propres distinctes.

1. Montrer que la famille $(I_n, A, \ldots, A^{n-1})$ est libre.
Indication : On pourra commencer par remarquer que si P est un polynôme annulateur non nul de A, alors $\deg(P) \geq n$.
2. On note $\mathscr{C} = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \quad AM = MA\}$. Montrer que $\mathscr{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension supérieure ou égale à n.
3. Montrer qu'il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et une matrice $\Delta \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telle que :
$$A = P\Delta P^{-1}.$$
4. Soit $M \in \mathscr{C}$. Montrer que tout vecteur propre de A est un vecteur propre de M.
En déduire que la matrice $P^{-1}MP$ est diagonale.
En déduire que $\mathscr{C}$ est de dimension inférieure ou égale à n.
5. Montrer que $(I, A, \ldots, A^{n-1})$ est une base de $\mathscr{C}$.
6. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. On note $\mathscr{R} = \{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}), \quad M^2 = A\}$.
   (a) Montrer que $\mathscr{R} \subset \text{Vect}(I, A)$.
   (b) Montrer que $\mathscr{R}$ est de cardinal 4, et déterminer les 4 matrices M vérifiant $M^2 = A$.

On suppose que A admet n valeurs propres distinctes qu'on notera $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

1. Supposons que P est un polynôme annulateur non nul de A. On sait alors que les valeurs propres de A sont **parmi** les racines de P. En particulier, on en déduit que $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des racines distinctes de P. Donc le polynôme $(x - \lambda_1) \ldots (x - \lambda_n)$ divise P, et il existe $Q \in \mathbb{R}[x]$ tel que :
$$P = (x - \lambda_1) \ldots (x - \lambda_n)Q(x).$$
Or puisque $P \neq 0$, Q est non nul, et en prenant le degré, $\deg(P) \geq n$.

Montrons que la famille $(I_n, A, \ldots, A^{n-1})$ est libre : soit pour cela $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ des scalaires tels

que :
$$\alpha_0 I_n + \alpha_1 A + \cdots + \alpha_{n-1}A^{n-1} = 0.$$
Alors le polynôme $Q = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_{n-1}x^{n-1}$ est annulateur de A. Or il est de degré $n-1 < n$. D'après ce qu'on vient de voir, ce n'est possible que si $Q = 0_{\mathbb{R}[x]}$. Ainsi $\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_{n-1} = 0$, et la famille $(I_n, A, \dots, A^{n-1})$ est libre.

2. $0_n \in \mathscr{C}$. De plus pour tout $M_1, M_2 \in \mathscr{C}$ et pour tout $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$:
$$A(\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2) = \lambda_1 A M_1 + \lambda_2 A M_2 = \lambda_1 M_1 A + \lambda_2 M_2 A = (\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2)A,$$
la deuxième égalité étant satisfaite car M_1 et M_2 appartiennent à $\mathscr{C}$. Ainsi $\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2$ appartient à $\mathscr{C}$, et $\mathscr{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

D'autre part, A^k appartient à $\mathscr{C}$ pour tout $0 \leq k \leq n-1$ (car ces matrices commutent avec A de manière évidente). Donc $\mathscr{C}$ contient la famille libre $(I_n, A, \dots, A^{n-1})$. Sa dimension est donc supérieure au cardinal de cette famille, c'est-à-dire supérieure à n.

Remarque. Plus généralement, pour tout $P \in \mathbb{R}[x]$, $P(A) \in \mathscr{C}$.

3. Notons V_i un vecteur propre associé à la valeur propre λ_i. $\mathscr{B}' = (V_1, \dots, V_n)$ est une famille de vecteurs propre de A (ou de φ_A l'application linéaire canoniquement associée à A) associés à des valeurs propres distinctes. C'est donc une famille libre de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de cardinal $n = \dim(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$, et donc une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Pour tout $1 \leq i \leq n$:
$$\varphi_A(V_i) = \lambda_i V_i$$
et donc $M_{\mathscr{B}'}(\varphi_A) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = \Delta$. Si on note $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et $P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$, alors $A = M_{\mathscr{B}}(\varphi_A)$ et par les formules de changements de bases :
$$\Delta = P^{-1}AP \quad \Rightarrow \quad A = P\Delta P^{-1}.$$

4. Soit $M \in \mathscr{C}$. Puisque M et A commutent, φ_M et φ_A commutent puisque pour tout $V \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:
$$\varphi_M \circ \varphi_A(V) = \varphi_M(AV) = MAV = AMV = \varphi_A \circ \varphi_M(V).$$
D'après le cours, tous les sous-espaces propres de φ_A sont stables par φ_M. Ainsi pour tout $1 \leq i \leq n$, puisque $E_{\lambda_i}(A) = \mathrm{Vect}(V_i)$, $\varphi_M(V_i)$ appartient à $E_{\lambda_i}(A) = \mathrm{Vect}(V_i)$. Il existe donc $\alpha_i \in \mathbb{R}$ tel que :
$$\varphi_M(V_i) = \alpha_i V_i.$$
Tout vecteur propre de A est donc bien un vecteur propre de M.

On en déduit que $M_{\mathscr{B}'}(\varphi_M) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$. Avec les mêmes notations que précédemment, $P^{-1}MP$ est donc diagonale. Ainsi, pour tout $M \in \mathscr{C}$:
$$M = P\begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}P^{-1} = \alpha_1 PE_{1,1}P^{-1} + \cdots + PE_{n,n}P^{-1}.$$
Il suit que $\mathscr{C} \subset \mathrm{Vect}(PE_{1,1}P^{-1}, \dots, PE_{n,n}P^{-1})$. Comme cet espace est de dimension $\leq n$ (car il est engendré par une famille de n vecteurs), on peut donc conclure que $\dim(\mathscr{C}) \leq n$.

5. Comme $\dim(\mathscr{C}) \geq n$ (question 2.), il suit que $\dim(\mathscr{C}) = n$. Enfin, puisque $(I_n, A, \dots, A^{n-1})$ est une famille libre de $\mathscr{C}$ de cardinal $n = \dim(\mathscr{C}) \leq n$, c'est donc une base de $\mathscr{C}$.

Concluons :
$$\mathscr{C} = \mathrm{Vect}(I_n, A, \dots, A^{n-1}) = \{P(A),\ P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]\}.$$

6. (a) Remarquons que si $M \in \mathscr{R}$, alors $M^2 = A$ et :

$$MA = MM^2 = M^2M = AM.$$

Ainsi M appartient à $\mathscr{C}$. Donc $\mathscr{R}$ est inclus dans $\mathscr{C}$.

D'autre part, A est triangulaire supérieure, donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux 1 et 4. On est donc dans le cadre de la situation étudiée précédemment. On sait alors que (pour $n = 2$) :

$$\mathscr{C} = \mathrm{Vect}(I_2, A)$$

Ainsi $\mathscr{R} \subset \mathrm{Vect}(I_2, A)$

(b) On cherche M sous la forme $\alpha I_2 + \beta A$. Calculons $A^2 = 5A - 4I_2$, et $M^2 = (\alpha^2 - 4\beta^2)I_2 + (2\alpha\beta + 5\beta^2 A$ après simplification. Ainsi, $M^2 = A$ si, et seulement si, $(\alpha^2 - 4\beta^2)I_2 + (2\alpha\beta + 5\beta^2)A = A$, ce qui équivaut par liberté de la famille (I_2, A) à :

$$\begin{cases} \alpha^2 - 4\beta^2 = 0 \\ 2\alpha\beta + 5\beta^2 = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha = 2\beta \\ \beta^2 = 1/9 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \alpha = -2\beta \\ \beta^2 = 1 \end{cases} \quad .$$

On obtient donc quatre « racines carrées » de A qui sont :

$$\pm\left(\frac{2}{3}I_2 + \frac{1}{3}A\right), \ \pm(-2I_2 + A).$$