TD8

Intégrales généralisées

Intégration sur un segment

Exercice 8.1 (★)

Déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{k}{n^2}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n} (e^{k+n})^{\frac{1}{n}}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=n}^{2n-1} \sin \dfrac{k\pi}{n}$.

Exercice 8.2 (★★)

Déterminer la limite de la suite de terme général $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n - t^{2n}}{1-t}\,\mathrm{d}t$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 8.3 (★★)

Étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^4+t^2+1}}.$$

On étudiera la parité, les variations, et l'on montrera que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Exercice 8.4 (★★★ - QSP ESCP 2018)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^n}.$$

Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 8.5 (★★★★ - Oral ESCP 2013)

Soit f la fonction définie par :

$$f : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t+\sin(t)}.$$

1. Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}_f$ de f.
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{D}_f$.
3. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
4. Montrer que l'on peut prolonger f par continuité en $x = 0$.
   On note $\tilde{f}$ la fonction ainsi prolongée.
5. Montrer que $\tilde{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer $\tilde{f}'(0)$.
6. La fonction $\tilde{f}$ est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

Nature d'une intégrale généralisée

Exercice 8.6 (★★)

Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes.

$$\int_1^{+\infty} e^{-\pi t}\,\mathrm{d}t \;;\; \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+2t)\sqrt{t}} \;;\; \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+(t\ln t)^2}\,\mathrm{d}t \;;\; \int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t}\right)\,\mathrm{d}t$$

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{t}\ln t}\,\mathrm{d}t \;;\; \int_0^{+\infty} \frac{1+\sin(x^2)}{x^2}\,\mathrm{d}x \;;\; \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^t}\,\mathrm{d}t \;;\; \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\frac{1}{t})e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \;;\; \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{t}}{\sin(2t)-\sin(t)}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 8.7 (★)

Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes, et en cas de convergence, calculer leur valeur.

$$\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t}\,\mathrm{d}t \;;\; \int_0^{1/2} \frac{1}{t(\ln t)^2}\,\mathrm{d}t \;;\; \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\arctan(t)^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \;;\; \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t\ln(t^2)}{1+t^4}\,\mathrm{d}t \;;\; \int_{-\infty}^{+\infty} \ln\left(\frac{1}{t^2}\right)\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 8.8 (★)

Montrer que les intégrales généralisées suivantes convergent et déterminer leur valeur à l'aide d'une intégration par parties.

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \;;\; \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^3}e^{-1/t}\,\mathrm{d}t \;;\; \int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 8.9 (★★ - Exemple d'intégrale généralisée semi-convergente)

1. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ converge.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\displaystyle\int_\pi^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t \geq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\pi}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin t|\mathrm{d}t.$

   (b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin t|\mathrm{d}t = 2.$

   (c) En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_\pi^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t = +\infty.$

   (d) En déduire que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t$ diverge.

Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ converge mais ne converge pas absolument. Elle est dite *semi-convergente*.

Exercice 8.10 (★)

Déterminer la nature des intégrales suivantes et préciser leur valeur en cas de convergence en utilisant les changements de variable indiqués entre parenthèses.

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x \;\text{(poser } t=\ln x\text{)} \;;\; \int_0^{+\infty} \frac{1}{e^t+1}\,\mathrm{d}t \;\text{(poser } u=e^t\text{)}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{u(1-\ln u)^2}\,\mathrm{d}u \;\text{(poser } u=e^x\text{)} \;;\; \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}\mathrm{d}x \;\text{(poser } u=\sqrt{x}\text{)}$$

Exercice 8.11 (★)
Étudier la nature des intégrales suivantes (on utilisera si nécessaire un changement de variable affine).

$$\int_{-\infty}^{0} x^2 e^x \,\mathrm{d}x \;;\; \int_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-x^2+2x+3}} \;;\; \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\ln t}{(1-t)^{\frac{5}{2}}}\mathrm{d}t \;;\; \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x^2+12x}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 8.12 (★★)

1. (a) À l'aide du changement de variable $y = \frac{1}{x}$, montrer que les intégrales $\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ convergent et sont de valeurs opposées.

   (b) Que peut-on en déduire sur l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x$?

2. Soit $a > 0$. À l'aide d'un changement de variable, prouver la convergence et déterminer la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{a^2+x^2}\mathrm{d}x$.

Exercice 8.13 (★★★★ - QSP ESCP 2016)
Soit f une fonction continue sur $[1, +\infty[$ telle que $\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge également.

Exercice 8.14 (★★★★)

1. Montrer que l'intégrale $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t$ converge. On note I sa valeur.
2. À l'aide du changement de variables $u = -\ln(t)$, montrer que $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}-e^{-2u}}{u}\,\mathrm{d}u$.
3. Montrer que $I = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u$.
4. En déduire que $I = \ln(2)$.

Suites et fonctions définies par des intégrales généralisées

Exercice 8.15 (★★)
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^{n+1}}$.

1. Justifier la convergence des intégrales généralisées I_n pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et qu'elle converge.
3. Montrer, grâce à une intégration par parties, que : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n - I_{n+1} = \frac{1}{2n+2} I_n$.
4. Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $I_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2}$.

Exercice 8.16 (★★)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+t^{x+2}}}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que l'ensemble de définition de f est $]0,+\infty[$.
2. Montrer que la fonction f est décroissante sur $]0,+\infty[$. En déduire que f admet une limite finie en $+\infty$.
3. Montrer que pour tout $x>0$, $0 \leq f(x) \leq \dfrac{2}{x}$. En déduire la limite de f en $+\infty$.

Exercice 8.17 (★★)

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note, sous réserve de convergence, $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale définissant $f(x)$ converge absolument. *Ainsi, f est une fonction définie sur* $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est paire et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq \Gamma(1/2)$.
3. (a) Montrer que pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a $|\cos(a)-\cos(b)| \leq |a-b|$.

   (b) En déduire que pour tout $(x,x_0) \in \mathbb{R}^2$, on a $|f(x)-f(x_0)| \leq \dfrac{\Gamma(1/2)}{2}|x-x_0|$.

   (c) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8.18 (★★★ - Étude d'un reste)

Soit f la fonction définie pour tout $x \in]0,+\infty[$ par $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que la fonction f est bien définie, préciser ses variations et ses limites en $+\infty$ et en 0.
2. (a) Montrer que pour tout $x>0$, $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x} - \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\mathrm{d}t$.

   (b) En déduire que pour tout $x>0$,
   $$\frac{e^{-x}}{x}\left(1-\frac{1}{x}\right) \leq f(x) \leq \frac{e^{-x}}{x}.$$

   (c) Donner un équivalent simple de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
3. (a) Montrer que pour tout $x \in]0,1[$, l'intégrale $g(x) = \displaystyle\int_x^1 \frac{1-e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ est bien définie.

   (b) Montrer que g admet une limite finie lorsque x tend vers 0.

   (c) En déduire que $f(x) \underset{0}{\sim} -\ln x$.
4. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et calculer sa valeur.

Exercice 8.19 (★★★ - Oral ESCP 2019)

On considère l'intégrale suivante : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\,\mathrm{d}t$.

1. (a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que cette intégrale est convergente pour tout $x > 0$.
   (b) Montrer que cette intégrale est convergente pour $x = 0$.

   On pose alors, pour tout $x \geq 0$, $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\,\mathrm{d}t$.

2. À l'aide d'un changement de variable affine, montrer que :

$$\forall x > 0, \quad f(x) = \cos(x) \int_x^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}\,\mathrm{d}u - \sin(x) \int_x^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u}\,\mathrm{d}u.$$

3. (a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x > 0$.
   (b) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ et calculer $f''(x)$ pour tout $x > 0$.
   (c) En déduire une relation entre $x, f(x)$ et $f''(x)$ pour tout $x > 0$.

4. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Comparaison série intégrale

Exercice 8.20 (★★ - Théorème de comparaison série/intégrale - ✍)

On considère une fonction f continue, décroissante et strictement positive sur $[p, +\infty[$ où $p \in \mathbb{N}$. On pose pour tout entier $n \geq p$:

$$u_n = \int_p^n f(t)\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad v_n = \sum_{k=p}^{n} f(k).$$

1. On montre dans cette partie que (u_n) et (v_n) sont de même nature (*Théorème de comparaison série-intégrale*).

   (a) Soit $n \geq p+1$. Justifier que pour tout $p \leq k \leq n-1$,

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t \leq f(k).$$

   (b) En déduire que pour tout $n \geq p+1$, $v_n - f(p) \leq u_n \leq v_{n-1}$.
   (c) Conclure que les suites (u_n) et (v_n) sont de même nature.

2. **Application. Étude de la série de Bertrand** $S = \displaystyle\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln(n)^\beta}$.

   (a) Montrer que si $\beta \leq 0$, alors la série S diverge.
   (b) On suppose $\beta > 0$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln(t))^\beta}$ est convergente si, et seulement si, $\beta > 1$.
   On effectuera le changement de variable $u = \ln(t)$.
   (c) Conclure que S converge si, et seulement si, $\beta > 1$.

Fonction Gamma

Exercice 8.21 (★★ - Valeur de Γ aux demi-entiers)

1. Justifier la convergence et déterminer la valeur de intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{t}e^{-t}\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{\frac{5}{2}}e^{-t}\mathrm{d}t$.

2. Montrer que pour tout entier naturel n, on a $\Gamma\left(n+\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}$.

Exercice 8.22 (★★)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
2. Déterminer I_0 et I_1.
3. À l'aide du changement de variable $y = x^2$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \dfrac{1}{2}\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)$.
4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{2} I_n$.
5. Exprimer I_{2n+1} et I_{2n} en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
6. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(x)e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ converge et déterminer sa valeur en fonction des cœfficients de P.

Exercice 8.23 (★★★ - Oral ESCP 2012 - Fonction bêta d'Euler)

Pour tous réels strictement positifs x et y, on pose $B(x,y) = \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t$.

1. Prouver la convergence de l'intégrale définissant $B(x,y)$.
2. (a) Prouver que : $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $B(x,y) = B(y,x)$.
   (b) Montrer que : $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $B(x+1,y) = \frac{x}{y}B(x,y+1)$.
3. Montrer que : $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $B(x,y+1) = B(x,y) - B(x+1,y)$.
   En déduire que $B(x+1,y) = \frac{x}{x+y}B(x,y)$.
4. Soit n un entier naturel non nul, et soit $x > 0$.
   (a) Étudier le signe sur $[0,1]$ de la fonction $g : t \mapsto e^{-t} - 1 + t$. En déduire que pour tout $t \in [0,n]$, on a :
   $$\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}.$$
   (b) Montrer que pour tout $t \in [0,n]$, on a : $\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)e^{-t} \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$.
   (c) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t = \Gamma(x)$.
5. Montrer que :
$$\forall x > 0, \quad \Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

Exercice 8.24 (★★★★ - Étude de la fonction Gamma)

1. Montrer que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x) \geq \dfrac{1}{e}\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t$.
   En déduire que $\lim\limits_{x\to 0} \Gamma(x) = +\infty$.

2. Montrer que pour tout $x > 1$, $\Gamma(x) \geq 2^{x-1}\displaystyle\int_2^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$.
   En déduire $\lim\limits_{x\to +\infty} \Gamma(x)$.

3. On définit pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ la fonction $f_t : x \mapsto t^{x-1}e^{-t}$.
   (a) Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$.
   Montrer que la fonction f_t est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer f_t' et f_t''.
   (b) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $|h| \leq \min(x/2, 1)$.
   Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$:
   $$\left|\frac{f_t(x+h) - f_t(x)}{h} - f_t'(x)\right| \leq \frac{|h|}{2} M_2(t,x)$$
   où
   $$M_2(t,x) = \begin{cases} (\ln t)^2 e^{-t} t^{x/2-1} & \text{si } t < 1 \\ (\ln t)^2 e^{-t} t^{x} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$
   (c) Justifier la convergence des intégrales :
   $$\int_0^{+\infty} (\ln t) e^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t \ , \ \int_0^1 (\ln t)^2 e^{-t} t^{x/2-1}\,\mathrm{d}t \ \text{ et } \ \int_1^{+\infty} (\ln t)^2 e^{-t} t^{x}\,\mathrm{d}t.$$
   (d) En déduire que Γ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} f_t'(x)\,\mathrm{d}t.$$
   (e) À l'aide du théorème de Rolle, montrer qu'il existe un réel $\alpha \in]1,2[$ tel que $\Gamma'(\alpha) = 0$.
   On ne cherchera pas à déterminer α.

4. (a) Soit $t > 0$, montrer que la fonction f_t est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) En déduire que la fonction Γ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

5. Dresser le tableau de variation de la fonction Γ et tracer sa courbe représentative.