TD8

Intégrales généralisées

Intégration sur un segment

Exercice 8.1 (★)

Déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{k}{n^2}$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n}(e^{k+n})^{\frac{1}{n}}$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=n}^{2n-1}\sin\dfrac{k\pi}{n}$.

Commençons par un rappel de cours.

Rappel. Sommes de Riemann.

On pensera à une somme de Riemann lorsqu'on cherche la limite d'une suite (u_n) qui est une somme finie de n termes et que le terme général de cette somme dépend également de n. On procèdera alors ainsi :

- commencer par mettre $\dfrac{1}{n}$ en facteur, et identifier une fonction f **continue** sur $[0,1]$ de sorte que $u_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$.
- Par le théorème des sommes de Riemann, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

On applique cette méthodes aux sommes considérées.

- Pour tout $n \geq 1$:
$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$
où $f : x \in [0,1] \mapsto x$ est continue. Par le théorème des sommes de Riemann :
$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n^2} = \int_0^1 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}.$$
- Pour tout $n \geq 1$:
$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}(e^{k+n})^{\frac{1}{n}} &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} e^{\frac{k}{n}+1} = \frac{e}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{k}{n}} + \frac{e^2}{n}\\ &== \frac{e}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(k/n) + \frac{e^2}{n}\end{aligned}$$
où $f : x \in [0,1] \mapsto e^x$ est continue. Par le théorème des sommes de Riemann :
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}(e^{k+n})^{\frac{1}{n}} = e\int_0^1 e^t\,\mathrm{d}t + 0 = e(e-1).$$

- Pour tout $n \geq 1$, en faisant un glissement d'indices :

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\sin\frac{k\pi}{n} &= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\sin\frac{(j+n)\pi}{n} = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\sin\left(\frac{j\pi}{n}+\pi\right)\\ &= -\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\sin\left(\frac{j\pi}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}f(j/n)\end{aligned}$$

où $f : x \in [0,1] \mapsto \sin(x\pi)$ est continue. Par le théorème des sommes de Riemann :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\sin\frac{k\pi}{n} = -\int_0^1 \sin(\pi t)\,\mathrm{d}t = -\left[-\frac{\cos(\pi t)}{\pi}\right]_0^1 = -\frac{2}{\pi}.$$

Exercice 8.2 (★★)
Déterminer la limite de la suite de terme général $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n - t^{2n}}{1-t}\,\mathrm{d}t$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto \dfrac{t^n - t^{2n}}{1-t}$ est continue sur $[0,1[$, donc l'intégrale I_n est généralisée en 1. Pour tout $t \in [0,1[$:

$$\frac{t^n - t^{2n}}{1-t} = t^n\frac{1-t^n}{1-t} = t^n + t^{n+1} + \cdots + t^{2n}.$$

En particulier, $\displaystyle\lim_{t\to1}\frac{t^n-t^{2n}}{1-t}$ existe et vaut $n+1$. L'intégrale I_n est donc faussement généralisée en 1, et donc convergente. De plus, par linéarité de l'intégrale (tout converge) :

$$\begin{aligned}I_n &= \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t + \int_0^1 t^{n+1}\,\mathrm{d}t + \cdots + \int_0^1 t^{2n}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\end{aligned}$$

On reconnait ici une somme de Riemann associée à la fonction $f : x \in [0,1] \mapsto \frac{1}{x+1}$ qui est continue sur $[0,1]$. Par le théorème sur les sommes de Riemann, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$ existe donc bien, et elle vaut

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \ln(2).$$

Exercice 8.3 (★★)
Étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^4+t^2+1}}.$$

On étudiera la parité, les variations, et l'on montrera que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

La fonction $g : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_x^{2x}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$ est l'intégrale d'une fonction continue sur un segment. Il n'y a donc aucun problème de convergence ici, et $f(x)$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$, soit $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$f(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^4+t^2+1}}.$$
Effectuons le changement de variable $u = -t$, affine donc licite, dans cette intégrale. On obtient (toutes ces intégrales convergent, et sont égales) :
$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{-\mathrm{d}u}{\sqrt{(-u)^4+(-u)^2+1}} = -f(x).$$
Donc f est une fonction impaire.

Notons G une primitive de g sur $\mathbb{R}$ (qui existe bien car g est continue). G est donc $\mathscr{C}^1$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$f(x) = G(2x) - G(x).$$
f apparait ici comme la composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. Elle est donc $\mathscr{C}^1$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\begin{aligned} f'(x) = 2G'(2x) - G'(x) = 2g(2x) - g(x) &= \frac{2}{\sqrt{16x^4+4x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^4+x^2+1}} \\ &= \frac{2\sqrt{x^4+x^2+1} - \sqrt{16x^4+4x^2+1}}{\sqrt{16x^4+4x^2+1}\sqrt{x^4+x^2+1}} \\ &= \frac{4(x^4+x^2+1)-(16x^4+4x^2+1)}{\sqrt{16x^4+4x^2+1}\sqrt{x^4+x^2+1}(2\sqrt{x^4+x^2+1}+\sqrt{16x^4+4x^2+1})} \\ &= \frac{-12x^4+3}{\sqrt{16x^4+4x^2+1}\sqrt{x^4+x^2+1}(2\sqrt{x^4+x^2+1}+\sqrt{16x^4+4x^2+1})} \end{aligned}$$
du signe de $-12x^4+3 = 3(-4x^4+1) = 3(1-2x^2)(1+2x^2) = 3(1-\sqrt{2}x)(1+\sqrt{2}x)(1+2x^2)$. Ainsi, f est décroissante sur $]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}]$, croissante sur $]-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}[$ puis décroissante sur $]\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty[$.

Soit $x > 0$. La fonction g étant décroissante sur $\mathbb{R}_+$, on obtient pour tout $t \in [x, 2x]$:
$$g(2x) \leq g(t) \leq g(x).$$
D'où par croissance de l'intégrale ($x \leq 2x$) :
$$xg(2x) = \int_x^{2x} g(2x)\,\mathrm{d}t \leq f(x) \leq \int_x^{2x} g(x)\,\mathrm{d}t = xg(x).$$
Or :
$$xg(2x) = \frac{x}{\sqrt{16x^4+4x^2+1}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{\sqrt{16x^4}} = \frac{x}{4x^2} = \frac{1}{4x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
De même, on montre que $\lim\limits_{x\to+\infty} xg(x) = 0$. Par théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ existe et vaut 0. Notons enfin que puisque f est impaire, il suit également $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

Exercice 8.4 (★★★ - QSP ESCP 2018)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :
$$u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^n}.$$
Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Pour tout $t \in [0,1[$:
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+t+t^n} = \frac{1}{1+t}.$$

Aucun résultat de notre cours ne justifie cependant que :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^n} \overset{(*)}{=} \int_0^1 \lim_{n\to+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^n} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln(2).$$

En effet, l'égalité $(*)$ est fausse en général : on ne permute pas une limite et une intégrale, aucun théorème du cours ne le justifie, et cela découlera éventuellement d'une étude plus approfondie !

Tentons donc de justifier cette égalité en faisant la différence :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^n} - \ln(2) &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^n} - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+t+t^n} - \frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1 \frac{(1+t)-(1+t+t^n)}{(1+t+t^n)(1+t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{-t^n}{(1+t+t^n)(1+t)}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Intéressons nous à cette dernière intégrale. Puisque $0 \leq \dfrac{-t^n}{(1+t+t^n)(1+t)} \leq t^n$ pour tout $t\in[0,1]$, on obtient par croissance de l'intégrale :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^n}{(1+t+t^n)(1+t)}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}.$$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}$, la limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left|\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^n} - \ln(2)\right|$ existe et vaut 0 par le théorème des gendarmes. On peut donc conclure :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^n} = \ln(2).$$

Exercice 8.5 (★★★★ - Oral ESCP 2013)

Soit f la fonction définie par :

$$f : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t+\sin(t)}.$$

1. Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}_f$ de f.
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{D}_f$.
3. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$.
4. Montrer que l'on peut prolonger f par continuité en $x=0$.
   On note $\tilde{f}$ la fonction ainsi prolongée.
5. Montrer que $\tilde{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer $\tilde{f}'(0)$.
6. La fonction $\tilde{f}$ est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

1. Posons $\phi : t \mapsto t+\sin(t)$. ϕ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $t\in\mathbb{R}$:

   $$\phi'(t) = 1+\cos(t) \geq 0$$

   et est nulle si, et seulement si, $t \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$. Ainsi Φ' est positive sur $\mathbb{R}$ et non identiquement nulle sur aucun intervalle ouvert inclus dans I. Donc ϕ est strictement croissante. Comme de plus $\phi(0)=0$, ϕ s'annule une unique fois en 0.

   Ainsi pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, la fonction $g : t \mapsto \dfrac{1}{t+\sin(t)}$ est continue sur $[x,2x]$ (ou $[2x,x]$ si

$x < 0$), et f est définie sur $\mathbb{R}^*$.

2. g étant continue sur $\mathbb{R}_+^*$ (resp. $\mathbb{R}_-^*$), elle admet une primitive G de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (resp. $\mathbb{R}_-^*$).Pour tout $x > 0$ (resp. $x < 0$), f se récrit alors :

$$f(x) = G(2x) - G(x).$$

Ainsi f apparait comme une composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$. Elle est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (resp. $\mathbb{R}_-^*$) et pour tout $x > 0$ (resp. $x < 0$) :

$$f'(x) = 2G'(2x) - G'(x) = \frac{2}{2x + \sin(2x)} - \frac{1}{1 + \sin(x)}.$$

3. Soit $x > 1$. Pour tout $t \in [x, 2x]$:

$$\frac{1}{t+1} \leq \frac{1}{t + \sin(t)} \leq \frac{1}{t-1}$$

d'où par croissance de l'intégrale (sur un segment) :

$$\ln\left(\frac{2x+1}{x+1}\right) = \int_x^{2x} \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t \leq f(x) \leq \int_x^2 x\frac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t = \ln\left(\frac{2x-1}{x-1}\right).$$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(\frac{2x+1}{x+1}) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(\frac{2x-1}{x-1}) = \ln(2)$, il suit par théorème des gendarmes que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ existe et vaut $\ln(2)$.

Notons également que la fonction g est impaire. Pour tout $x \neq 0$, on obtient donc par changement de variable $u = -t$ affine (donc licite) :

$$f(-x) = \int_{-x}^{-2x} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^{2x} g(-u)(-\,\mathrm{d}u) = \int_x^{2x} g(u)\,\mathrm{d}u = f(x)$$

Donc f est une fonction paire. On en déduit en particulier que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ln(2)$.

4. **Au brouillon.** Quand $t \to 0$:

$$t + \sin(t) = t + t + o(t) = 2t + o(t)$$

donc $\frac{1}{t+\sin(t)} t \underset{\sim}{\to} 0 \frac{1}{2t}$ et $f(x) \approx \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{2t} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2x}{x}\right) = \frac{1}{2}\ln(2)$.

Essayons de justifier ces égalités en étudiant la limite de la différence.

Solution. Calculons :

$$f(x) - \frac{1}{2}\ln(2) = \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t + \sin(t)} - \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{2t} = \int_x^{2x} \underbrace{\frac{t - \sin(t)}{2t(t + \sin(t))}}_{=h(t)}\,\mathrm{d}t$$

La fonction h est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$. De plus, en effectuant un développement limité en 0 :

$$2t(t + \sin(t))t \underset{\sim}{\to} 0 4t^2 \text{ et } t - \sin(t)t \underset{\sim}{\to} 0 \frac{t^3}{6}.$$

Ainsi, $h(t)t \underset{\sim}{\rightarrow} 0\frac{t}{24}$ et $\lim_{t\to 0} h(t) = 0$. En particulier, les intégrales $\int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_{-1}^0 h(t)\,\mathrm{d}t$ sont faussement impropres en 0, et convergent donc. Par suite, pour tout $x > 0$:

$$f(x) - \frac{1}{2}\ln(2) = \int_x^{2x} h(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^1 h(t)\,\mathrm{d}t - \int_{2x}^1 h(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} \int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

De même on montre que $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) - \frac{1}{2}\ln(2) = 0$.

La fonction f est donc prolongeable par continuité en 0. Notons $\tilde{f}$ le prolongement par continuité de f en 0. $\tilde{f}$ est par définition continue sur $\mathbb{R}$, et satisfait $\tilde{f}(0) = \frac{1}{2}\ln(2)$

5. On a déjà établi que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, et on a calculé $f'(x)$ pour tout $x \neq 0$. Après réduction au même dénominateur, on obtient pour tout $x \neq 0$:

$$f'(x) = \frac{2\sin(x)(1-\cos(x))}{(2x+\sin(2x))(x+\sin(x))}.$$

À l'aide de développements limités au dénominateur et d'équivalents usuels au numérateur, on montre que $f'(x)x \underset{\sim}{\rightarrow} 0\frac{x}{8}$. On est donc dans la situation suivante :

La fonction $\tilde{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, et $\lim\limits_{x\to 0} \tilde{f}'(x) = 0$

Par théorème de passage à la limite sur la dérivée, $\tilde{f}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et $\tilde{f}'(0) = 0$.

6. On vient de montrer que $\tilde{f}$ est bien $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ par le théorème de passage à la limite sur la dérivée.

Nature d'une intégrale généralisée

Exercice 8.6 (★★)

Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes.

$$\int_1^{+\infty} e^{-\pi t}\,\mathrm{d}t \ ; \ \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+2t)\sqrt{t}} \ ; \ \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+(t\ln t)^2}\,\mathrm{d}t \ ; \ \int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t}\right)\,\mathrm{d}t$$

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{t}\ln t}\,\mathrm{d}t \ ; \ \int_0^{+\infty} \frac{1+\sin(x^2)}{x^2}\,\mathrm{d}x \ ; \ \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^t}\,\mathrm{d}t \ ; \ \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\frac{1}{t})e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \ ; \ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{t}}{\sin(2t)-\sin(t)}\,\mathrm{d}t$$

- La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}\ln(t)}$ est continue sur $]0, 1/2]$, donc l'intégrale $\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{t}\ln t}\,\mathrm{d}t$ est généralisée en 0. Et en 0 :
  - $\frac{1}{\sqrt{t}\ln(t)} = o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$.
  - $\frac{1}{\sqrt{t}} \geq 0$ pour tout $t > 0$.
  - $\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ converge en tant qu'intégrale de Riemann en 0 d'exposant $1/2 < 1$.

  Par théorème de comparaison, l'intégrale $\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{t}\ln t}\,\mathrm{d}t$ converge.

- La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1+\sin(x^2)}{x^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1+\sin(x^2)}{x^2}\,\mathrm{d}x$ est généralisée en 0 et en $+\infty$.

  En 0 :

  - $\dfrac{1+\sin(x^2)}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$.
  - $\dfrac{1}{x^2} \geq 0$ pour tout $x > 0$.
  - $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ diverge en tant qu'intégrale de Riemann en 0 d'exposant $2 \geq 1$.

  Par théorème de comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1+\sin(x^2)}{x^2}\,\mathrm{d}x$ diverge, et donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1+\sin(x^2)}{x^2}\,\mathrm{d}x$ diverge aussi.

- La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{t^t} = e^{-t\ln(t)}$ est continue sur $]0,+\infty[$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\frac{1}{t})e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ est généralisée en 0 et en $+\infty$.

  En 0, $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = e^0 = 1$ par croissances comparées. Donc l'intégrale est faussement généralisée en 0, et converge donc.

  En $+\infty$:

  - $t^2 e^{-t\ln(t)} = \dfrac{1}{\ln(t)^2}(t\ln(t))^2 e^{-t\ln(t)} \to 0$ lorsque $t \to +\infty$ par croissances comparées. Donc $f(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ en $+\infty$;
  - $\dfrac{1}{t^2} \geq 0$ lorsque $t > 0$;
  - $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge en tant qu'intégrale de Riemann en $+\infty$ d'exposant $2 > 1$.

  Par théorème de comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(\frac{1}{t})e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ converge, et donc $\int_0^{+\infty} \dfrac{\cos(\frac{1}{t})e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ aussi.

- Pour tout $t > 0$:
$$0 \leq \left|\frac{\cos(\frac{1}{t})e^{-t}}{\sqrt{t}}\right| \leq t^{-1/2}e^{-t} = t^{1/2-1}e^{-t}.$$
  Comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{1/2-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t = \Gamma(1/2)$ converge, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\frac{1}{t})e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ converge absolument par théorème de comparaison, donc converge.

- La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\sqrt{t}}{\sin(2t)-\sin(t)}$ est continue sur $]0,\pi/4]$ en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{t}}{\sin(2t)-\sin(t)}\,\mathrm{d}t$ est généralisée en 0.

  En 0 :

- il serait intéressant de disposer d'un équivalent en 0, mais on a une différence au dénominateur, et les équivalents ne sont pas compatibles avec les sommes et différences. Passons donc passer par un développement limité :

$$\sin(2t) - \sin(t) = 2t + o(t) - (t + o(t)) = t + o(t) \sim t.$$

  Ainsi $f(t) \underset{t \to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$.
- $\dfrac{1}{\sqrt{t}} \geq 0$ lorsque $t > 0$.
- L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ converge en tant qu'intégrale de Riemann en 0 d'exposant $\frac{1}{2} < 1$.

Par théorème de comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{t}}{\sin(2t) - \sin(t)}\,\mathrm{d}t$ converge.

Exercice 8.7 (★)

Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes, et en cas de convergence, calculer leur valeur.

$$\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t}\,\mathrm{d}t \;\; ; \;\; \int_0^{1/2} \frac{1}{t(\ln t)^2}\,\mathrm{d}t \;\; ; \;\; \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\arctan(t)^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \;\; ; \;\; \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t\ln(t^2)}{1+t^4}\,\mathrm{d}t \;\; ; \;\; \int_{-\infty}^{+\infty} \ln\left(\frac{1}{t^2}\right)\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 8.8 (★)

Montrer que les intégrales généralisées suivantes convergent et déterminer leur valeur à l'aide d'une intégration par parties.

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \;\; ; \;\; \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^3} e^{-1/t}\,\mathrm{d}t \;\; ; \;\; \int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x.$$

Exercice 8.9 (★★ - Exemple d'intégrale généralisée semi-convergente)

1. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ converge.
2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\displaystyle\int_\pi^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t \geq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\pi} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin t|\mathrm{d}t$.

   (b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin t|\mathrm{d}t = 2$.

   (c) En déduire que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_\pi^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t = +\infty$.

   (d) En déduire que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t$ diverge.

Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ converge mais ne converge pas absolument. Elle est dite *semi-convergente*.

1. Soit $A > \pi$. On fait une intégration par parties sur le segment $[\pi, A]$:

$$\begin{array}{c|ccc} + & \frac{1}{t} & \searrow & \sin(t) \\ - & -\dfrac{1}{t^2} & \overset{\int}{\longleftarrow} & -\cos(t) \end{array}$$

Les fonctions $t \mapsto \frac{1}{t}$ et $t \mapsto -\cos(t)$ sont bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\pi, A]$. Par IPP :

$$\begin{aligned}\int_\pi^A \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t &= \left[-\frac{\cos(t)}{t}\right]_\pi^A - \int_\pi^A \frac{\cos(t)}{t^2}\mathrm{d}t \\ &= \frac{\cos(\pi)}{\pi} - \frac{\cos(A)}{A} - \int_\pi^A \frac{\cos(t)}{t^2}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{A\to+\infty} \frac{\cos(A)}{A} = 0$ comme produit d'une fonction bornée par une fonction qui tend vers 0. De plus :

- pour tout $t \geq \pi$:
$$0 \leq \left|\frac{\cos(t)}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}.$$
- $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge en tant qu'intégrale de Riemann en $+\infty$ avec un exposant >1.

Par théorème de comparaison, $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}\mathrm{d}t$ converge absolument, donc converge. Ainsi la limite :

$$\lim_{A\to+\infty} \frac{\cos(\pi)}{\pi} - \frac{\cos(A)}{A} - \int_\pi^A \frac{\cos(t)}{t^2}\mathrm{d}t$$

existe et est finie, donc $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \int_\pi^A \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$ aussi. L'intégrale $\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$ converge donc bien.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par la relation de Chasles :

$$\int_\pi^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t = \sum_{k=2}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin(t)|}{t}\mathrm{d}t.$$

Soit $k \in [\![2, n]\!]$. Pour tout $t \in [(k-1)\pi, k\pi]$, $\frac{|\sin(t)|}{t} \geq \frac{|\sin(t)|}{k\pi}$, d'où par croissance et linéarité de l'intégrale :

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin(t)|}{t}\mathrm{d}t \geq \frac{1}{k\pi}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin(t)|\mathrm{d}t.$$

D'où finalement l'inégalité :

$$\int_\pi^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t \geq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\pi}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin t|\mathrm{d}t.$$

(b) La fonction $t \mapsto |\sin(t)|$ étant π-périodique, on obtient pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin(t)|\mathrm{d}t = \int_0^\pi |\sin(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \sin(t)\,\mathrm{d}t$$

car sin est positif sur $[0, \pi]$. Reste à calculer :

$$\int_0^\pi \sin(t)\,\mathrm{d}t = [-\cos(t)]_0^\pi = 2.$$

D'où le résultat.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_{\pi}^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t} \mathrm{d}t \geq \sum_{k=2}^{n} \frac{2}{k\pi}.$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{2}{k\pi}$ car la série $\sum \frac{1}{k}$ est divergente. Par théorème d'encadrement :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\pi}^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t} \mathrm{d}t = +\infty.$$

Par suite, l'intégrale généralisée $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t} \mathrm{d}t$ est divergente.

Exercice 8.10 (★)

Déterminer la nature des intégrales suivantes et préciser leur valeur en cas de convergence en utilisant les changements de variable indiqués entre parenthèses.

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x \ \ (\text{poser } t = \ln x) \ \ ; \ \ \int_0^{+\infty} \frac{1}{e^t+1}\,\mathrm{d}t \ \ (\text{poser } u = e^t)$$

$$\int_0^1 \frac{1}{u(1-\ln u)^2}\,\mathrm{d}u \ \ (\text{poser } u = e^x) \ \ ; \ \ \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}\mathrm{d}x \ \ (\text{poser } u = \sqrt{x})$$

Exercice 8.11 (★)

Étudier la nature des intégrales suivantes (on utilisera si nécessaire un changement de variable affine).

$$\int_{-\infty}^0 x^2 e^x\,\mathrm{d}x \ \ ; \ \ \int_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-x^2+2x+3}} \ \ ; \ \ \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln t}{(1-t)^{\frac{5}{2}}}\mathrm{d}t \ \ ; \ \ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x^2+12x}\mathrm{d}x.$$

Rappel. Changement de variable affine.

Un changement de variable affine est un changement du type $\varphi(t) = at + b$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$. Un tel changement de variables est automatiquement licite, on ne vous demandera donc pas de justifier dans ce cas la classe $\mathscr{C}^1$ et la stricte monotonie. On rédigera donc simplement de la manière suivante :

« On effectue un changement de variables affine, donc licite ».

Notons enfin qu'un changement de variable affine ne sera pas forcément précisé dans l'énoncé. C'est à vous dans ce cas de figure d'en être à l'initiative.

- Effectuons le changement de variables $t = -x$ dans l'intégrale $\int_{-\infty}^0 x^2 e^x\,\mathrm{d}x$. Ce changement de variables étant affine, il est licite. De plus, $t : +\infty \to 0$ lorsque $x : -\infty \to 0$, et $\mathrm{d}t = -\mathrm{d}x$.

  Par le théorème de changement de variables, les intégrales $\int_{-\infty}^0 x^2 e^x\,\mathrm{d}x$ et $J = \int_{+\infty}^0 (-t)^2 e^{-t}(-\,\mathrm{d}t) = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t}\,\mathrm{d}t$ sont de même nature, et en cas de convergence sont égales. Or $J = \Gamma(3)$, donc elle converge et vaut $2! = 2$. Ainsi, $\int_{-\infty}^0 x^2 e^x\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 2.

- Commençons tout d'abord par factoriser le polynôme du second degré au dénominateur.

Après calcul du discriminant et des racines :

$$-x^2+2x+3=-(x-3)(x+1)=(3-x)(x+1).$$

On notera en particulier que cette quantité est strictement positive sur $[0,3[$, de sorte que $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{-x^2+2x+3}}$ est continue sur $[0,3[$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-x^2+2x+3}}$ est donc généralisée en 3.

En 3 :

- $\dfrac{1}{\sqrt{-x^2+2x+3}}=\dfrac{1}{\sqrt{(3-x)(x+1)}} \underset{x\to 3}{\sim} \dfrac{1}{2\sqrt{(3-x)}}$.
- $\dfrac{1}{\sqrt{(3-x)}} \geq 0$ pour tout $0 \leq x \leq 3$.
- L'intégrale $\displaystyle\int_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(3-x)}}$ converge, en tant qu'intégrale de Riemann en 3, d'exposant $\frac{1}{2}<1$.

Par théorème de comparaison, on en déduit que $\displaystyle\int_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-x^2+2x+3}}$ converge.

- Effectuons le changement de variables $x=1-t$, affine donc licite. Calculons $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$, et $x : 1/2 \to 0$ lorsque $t : 1/2 \to 1$. Par le théorème de changement de variables, les intégrales $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{\ln(t)}{(1-t)^{5/2}}\,\mathrm{d}t$ et $J=\displaystyle\int_{1/2}^0 \frac{\ln(1-x)}{x^{5/2}}(-\mathrm{d}x)=\int_0^{1/2}\frac{\ln(1-x)}{x^{5/2}}\mathrm{d}x$ sont de même nature.

  Pour l'intégrale J, la fonction $f : t \mapsto \dfrac{\ln(1-x)}{x^{\frac{5}{2}}}$ est continue sur $]0,1/2]$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1/2} f(x)\mathrm{d}x$ est généralisée en 0.

  En 0 :

  - $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{-x}{x^{\frac{5}{2}}}=-\dfrac{1}{x^{3/2}}$.
  - $\dfrac{1}{x^{3/2}} \geq 0$ pour tout $x \geq 0$.
  - $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{x^{3/2}}\mathrm{d}x$ diverge en tant qu'intégrale de Riemann en 0 d'exposant $3/2 \geq 1$.

  Par théorème de comparaison, l'intégrale J diverge, et donc l'intégrale $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{\ln(t)}{(1-t)^{5/2}}\,\mathrm{d}t$ également.

- **Astuce.**

  Faire une factorisation canonique du polynôme du second degré apparaissant dans l'exponentielle. Après changement de variables affine, on se ramènera ainsi à une intégrale de Gauss.

Calculons :

$$-2x^2+12x = -2(x^2-6x) = -2(x^2-6x+9)+18 = -2(x-3)^2+18 = -\left(\sqrt{2}(x-3)\right)^2+18.$$

Effectuons alors le changement de variables $t = \sqrt{2}(x-3)$, affine donc licite. Alors $\mathrm{d}t = \sqrt{2}\mathrm{d}x$, et $t : -\infty \to +\infty$ lorsque $x : -\infty \to +\infty$.

Par le théorème de changement de variables, les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x^2+12x}\mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2+18}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2}} = \frac{e^{18}}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ sont de même nature. Or J est une intégrale de Gauss, donc converge et vaut $\dfrac{e^{18}}{\sqrt{2}}\sqrt{\pi}$. Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x^2+12x}\mathrm{d}x$ converge également et vaut $e^{18}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Exercice 8.12 (★★)

1. (a) À l'aide du changement de variable $y = \dfrac{1}{x}$, montrer que les intégrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ convergent et sont de valeurs opposées.

   (b) Que peut-on en déduire sur l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x$?

2. Soit $a > 0$. À l'aide d'un changement de variable, prouver la convergence et déterminer la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{a^2+x^2}\mathrm{d}x$.

Exercice 8.13 (★★★★ - QSP ESCP 2016)

Soit f une fonction continue sur $[1,+\infty[$ telle que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge également.

Notons pour commencer qu'il n'est pas possible d'utiliser la majoration $\dfrac{f(t)}{t} \leq f(t)$ car f n'est pas forcément positive, ce qui exclu également d'utiliser les théorèmes de comparaison.

L'astuce ici est d'utiliser une intégration par parties. Pour cela, f étant continue sur $[1,+\infty[$, on note F l'unique primitive de f sur cet intervalle s'annulant en 1, qui s'exprime $F(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$ par le théorème fondamentale de l'intégration. Pour tout $x > 1$:

$$\begin{array}{c|cc} + & \frac{1}{t} & f \\ & & \\ - & -\frac{1}{t^2} & F \end{array}$$

Les fonctions F et $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1,+\infty[$, on obtient par IPP sur le segment $[1,x]$:

$$\int_1^x \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{F(x)}{x} + \int_1^x \frac{F(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Puisque $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, F admet une limite finie en $+\infty$, qu'on notera ℓ. En particulier, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$.

D'autre part, la fonction $t \mapsto \frac{F(t)}{t^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est généralisée en $+\infty$, et :

- $\frac{F(t)}{t^2} t \underset{=}{\to} +\infty o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$,
- $\frac{1}{t^{3/2}} \geq 0$ pour tout $t \geq 1$,
- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t$ converge en tant qu'intégrale de Riemann en $+\infty$ d'exposant $3/2 > 1$.

Par théorème de comparaison, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge, et $\displaystyle\int_1^{x} \frac{F(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie quand $x \to +\infty$.

Ainsi $\displaystyle\int_1^{x} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie quand $x \to +\infty$, de sorte que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

Exercice 8.14 (★★★★)

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t$ converge. On note I sa valeur.
2. À l'aide du changement de variables $u = -\ln(t)$, montrer que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u} - e^{-2u}}{u}\,\mathrm{d}u$.
3. Montrer que $I = \displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u$.
4. En déduire que $I = \ln(2)$.

1. La fonction $f : t \mapsto \dfrac{t-1}{\ln(t)}$ est continue sur $]0, 1[$. Donc l'intégrale est généralisée en 0 et en 1.
   - En 0 : $f(t)t \underset{\sim}{\to} 0 \dfrac{-1}{\ln(t)}$ et $\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{-1}{\ln(t)} = 0$. Donc l'intégrale est faussement impropre en 0. Elle converge donc.
   - En 1 : $\ln(t)t \underset{\sim}{\to} 1(t-1)$, donc $f(t)t \underset{\sim}{\to} 11$ et l'intégrale est faussement impropre en 1. Elle converge donc.

   Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t$ converge.
2. On pose $u = \varphi(t) = -\ln(t)$ qui est $\mathscr{C}^1$ et strictement monotone sur $]0, 1[$. Donc le changement de variables est licite. De plus, $u : +\infty \to 0$ lorsque $t : 0 \to 1$, $t = e^{-u}$, $\mathrm{d}t = -e^{-u}\,\mathrm{d}u$. Les intégrales en jeu sont donc de même nature, c'est-à-dire convergentes d'après 1., et :
$$I = \int_{+\infty}^{0} \frac{e^{-u} - 1}{-u}(-e^{-u}) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u} - e^{-2u}}{u}\,\mathrm{d}u.$$
3. On aimerait bien utiliser la linéarité de l'intégrale à présent, mais est-ce possible ? Pour pouvoir le faire, il est nécessaire que toutes les intégrales en jeu convergent ! Or ce n'est pas le cas ici. En effet, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u$ diverge : il s'agit de l'intégrale $\Gamma(\nu)$ avec $\nu = 0$. Or l'intégrale $\Gamma(\nu)$ converge si, et seulement si, $\nu > 0$. Plus précisément, c'est en 0 que l'intégrale diverge, puisqu'alors $\frac{e^{-u}}{u} u \underset{\sim}{\to} 0 \frac{1}{u}$.

Pour pouvoir malgré tout utiliser la linéarité de l'intégrale, on va prendre la précaution de « s'éloigner » de 0. Pour cela, reparquons que $I = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-u} - e^{-2u}}{u}\, du$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut à présent écrire :

$$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-u} - e^{-2u}}{u}\, du = \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\, du - \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-2u}}{u}\, du$$

ce qui est cette fois bien possible car toutes les intégrales en jeu convergent. En effet, $u \mapsto \frac{e^{-u}}{u}$ est continue sur $[\varepsilon, +\infty[$, donc l'intégrale $\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\, du$ converge. En $+\infty$:

- $\frac{e^{-u}}{u} = o\left(\frac{1}{u^2}\right)$,
- $\frac{1}{u^2} \geq 0$,
- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{u^2}\, du$ converge (intégrale de Gauss en $+\infty$).

Par théorème de comparaison, l'intégrale $\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\, du$ converge. On montre de même que $\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-2u}}{u}\, du$ converge aussi. On peut donc poursuivre notre calcul. Par changement de variable affine (donc licite) $v = 2u$ dans cette dernière intégrale :

$$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-2u}}{u}\, du = \int_{2\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-v}}{v/2} \frac{dv}{2} = \int_{2\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-v}}{v} dv.$$

On en déduit enfin que :

$$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-u} - e^{-2u}}{u}\, du = \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\, du - \int_{2\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\, du = \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^{-u}}{u}\, du$$

Ainsi $I = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^{-u}}{u}\, du$.

4. **Brouillon.** Lorsque $u \to 0$, $\frac{e^{-u}}{u} \sim \frac{1}{u}$, et donc quand $\varepsilon \to 0$, $\int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^{-u}}{u}\, du \approx \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{du}{u} = \ln(2)$. Reste à justifier ces égalités.

   Rédaction. Calculons :

$$\int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^{-u}}{u}\, du - \ln(2) = \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^{-u}}{u}\, du - \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{du}{u} = \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \underbrace{\frac{e^{-u} - 1}{u}}_{=g(u)}\, du.$$

g est une fonction continue sur $\mathbb{R}^*$, et $g(u)u \underset{sim}{\to} 0 \frac{-u}{u} = -1$. Donc g est prolongeable par continuité en 0. Ainsi l'intégrale $\int_0^1 g(u)\, du$ est faussement impropre en 0, et converge donc. D'où :

$$\int_\varepsilon^{2\varepsilon} g(u)\, du = \int_\varepsilon^1 g(u)\, du - \int_{2\varepsilon}^1 g(u)\, du \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} \int_0^1 g(u)\, du - \int_0^1 g(u)\, du = 0.$$

On peut donc conclure que :

$$I = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^{-u}}{u}\, du = \ln(2).$$

Autre méthode. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $t \in [\varepsilon, 2\varepsilon]$, encadrons :

$$\frac{e^{-2\varepsilon}}{u} \leq \frac{e^{-u}}{u} \leq \frac{e^{-\varepsilon}}{u}.$$

Par croissance de l'intégrale :

$$e^{-2\varepsilon}\ln(2) = e^{-2\varepsilon}\int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u \leq \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u \leq e^{-\varepsilon}\int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = e^{-\varepsilon}\ln(2).$$

Par théorème des gendarmes, il suit :

$$I = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u = \ln(2).$$

Suites et fonctions définies par des intégrales généralisées

Exercice 8.15 (★★)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^{n+1}}$.

1. Justifier la convergence des intégrales généralisées I_n pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et qu'elle converge.
3. Montrer, grâce à une intégration par parties, que : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n - I_{n+1} = \dfrac{1}{2n+2} I_n$.
4. Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $I_n = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 8.16 (★★)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+t^{x+2}}}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que l'ensemble de définition de f est $]0, +\infty[$.
2. Montrer que la fonction f est décroissante sur $]0, +\infty[$. En déduire que f admet une limite finie en $+\infty$.
3. Montrer que pour tout $x > 0$, $0 \leq f(x) \leq \dfrac{2}{x}$. En déduire la limite de f en $+\infty$.

Exercice 8.17 (★★)

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note, sous réserve de convergence, $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \cos(xt)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale définissant $f(x)$ converge absolument. *Ainsi, f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.*
2. Montrer que f est paire et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq \Gamma(1/2)$.
3. (a) Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a $|\cos(a) - \cos(b)| \leq |a - b|$.

   (b) En déduire que pour tout $(x, x_0) \in \mathbb{R}^2$, on a $|f(x) - f(x_0)| \leq \dfrac{\Gamma(1/2)}{2}|x - x_0|$.

   (c) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8.18 (★★★ - Étude d'un reste)
Soit f la fonction définie pour tout $x \in]0,+\infty[$ par $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que la fonction f est bien définie, préciser ses variations et ses limites en $+\infty$ et en 0.
2. (a) Montrer que pour tout $x > 0$, $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x} - \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\mathrm{d}t$.
   (b) En déduire que pour tout $x > 0$,
   $$\frac{e^{-x}}{x}\left(1 - \frac{1}{x}\right) \leq f(x) \leq \frac{e^{-x}}{x}.$$
   (c) Donner un équivalent simple de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
3. (a) Montrer que pour tout $x \in]0,1[$, l'intégrale $g(x) = \displaystyle\int_x^1 \frac{1-e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ est bien définie.
   (b) Montrer que g admet une limite finie lorsque x tend vers 0.
   (c) En déduire que $f(x) \underset{0}{\sim} -\ln x$.
4. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ converge et calculer sa valeur.

Exercice 8.19 (★★★ - Oral ESCP 2019)
On considère l'intégrale suivante : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\,\mathrm{d}t$.

1. (a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que cette intégrale est convergente pour tout $x > 0$.
   (b) Montrer que cette intégrale est convergente pour $x = 0$.
   On pose alors, pour tout $x \geq 0$, $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\,\mathrm{d}t$.
2. À l'aide d'un changement de variable affine, montrer que :
   $$\forall x > 0, \quad f(x) = \cos(x)\int_x^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}\,\mathrm{d}u - \sin(x)\int_x^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u}\,\mathrm{d}u.$$
3. (a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x > 0$.
   (b) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ et calculer $f''(x)$ pour tout $x > 0$.
   (c) En déduire une relation entre $x, f(x)$ et $f''(x)$ pour tout $x > 0$.
4. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Comparaison série intégrale

Exercice 8.20 (★★ - Théorème de comparaison série/intégrale - ✍)
On considère une fonction f continue, décroissante et strictement positive sur $[p,+\infty[$ où $p \in \mathbb{N}$. On pose pour tout entier $n \geq p$:

$$u_n = \int_p^n f(t)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=p}^{n} f(k).$$

1. On montre dans cette partie que (u_n) et (v_n) sont de même nature (*Théorème de comparaison série-intégrale*).

   (a) Soit $n \geq p+1$. Justifier que pour tout $p \leq k \leq n-1$,
   $$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t \leq f(k).$$

   (b) En déduire que pour tout $n \geq p+1$, $v_n - f(p) \leq u_n \leq v_{n-1}$.

   (c) Conclure que les suites (u_n) et (v_n) sont de même nature.

2. **Application. Étude de la série de Bertrand** $S = \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln(n)^\beta}$.

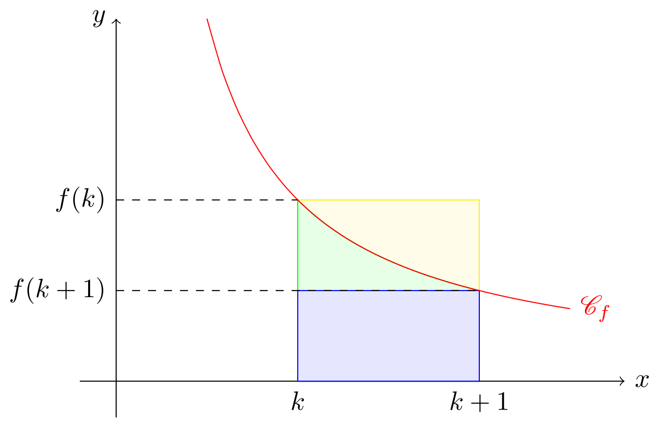
   (a) Montrer que si $\beta \leq 0$, alors la série S diverge.

   (b) On suppose $\beta > 0$. Montrer que l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln(t))^\beta}$ est convergente si, et seulement si, $\beta > 1$.
   On effectuera le changement de variable $u = \ln(t)$.

   (c) Conclure que S converge si, et seulement si, $\beta > 1$.

1. (a) Soit $p \leq k \leq n-1$. Puisque f est décroissante, il suit que pour tout $t \in [k, k+1]$:
   $$f(k+1) \leq f(t) \leq f(k).$$
   D'où par croissance de l'intégrale :
   $$\int_k^{k+1} f(k+1)\,\mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1} f(k)\,\mathrm{d}t.$$
   Ce qui se récrit :
   $$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq f(k).$$

   Remarque. Ces inégalités peuvent se retrouver graphiquement : l'air du rectangle bleu est plus petit que l'air du domaine vert, lui même plus petit que l'air du rectangle jaune.



   (b) Pour tout $n \geq p+1$, on somme ces inégalités pour tout $p \leq k \leq n-1$:
   $$\sum_{k=p}^{n-1} f(k+1) \leq \sum_{k=p}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=p}^{n-1} f(k)$$

soit encore (en faisant un glissement d'indice pour le terme de gauche, et à l'aide de la relation de Chasles pour regrouper toutes les intégrales en une seule dans le terme du milieu) :

$$v_n - f(p) \leq \int_p^n f(t)\,\mathrm{d}t = u_n \leq v_{n-1}.$$

À retenir. Comparaison séries/intégrales.
Les méthodes utilisées ici sont à retenir. Elles font très souvent l'objet de questions dans les sujets de concours. Il faudra dans ce cas partir des inégalités de la question 1.(a), et les sommer comme cela a été fait dans la question 1.(b).

(c) Puisque f est positive, les suites (u_n) et (v_n) sont croissantes. Elles convergent donc si, et seulement, si elles sont majorées (par théorème de limite monotone).

- Supposons que (u_n) converge, alors elle est majorée par un réel $M > 0$. Mais alors pour tout $n \geq p+1$:

$$v_n \leq f(p) + u_n \leq f(p) + M.$$

Ainsi (v_n) est majorée, elle converge donc.

- Supposons cette fois que (v_n) converge. Alors elle est majorée par $N > 0$, et pour tout $n \geq p+1$:

$$u_n \leq v_{n-1} \leq N.$$

(u_n) est donc croissante majorée, elle converge donc.

On a donc montré que (u_n) converge si, et seulement si, (v_n) converge. Ces suites sont donc de même nature.

2. (a) Supposons que $\beta \leq 0$. Pour tout $n \geq 3$:

$$\frac{1}{n\ln(n)^\beta} = \frac{\ln(n)^{-\beta}}{n} \geq \frac{1}{n} \geq 0.$$

La série harmonique étant divergente, S diverge par théorème de comparaison.

(b) On pose $u = \varphi(t) = \ln(t)$. φ est strictement croissante et $\mathscr{C}^1$ sur $]2, +\infty[$. De plus, $u : \ln(2) \to +\infty$ lorsque $t : 2 \to +\infty$, $t = e^u$ et $\mathrm{d}t = e^u\,\mathrm{d}u$. Par le théorème de changement de variables, l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln(t))^\beta}$ est de même nature que :

$$\int_{\ln(2)}^{+\infty} \frac{e^u\,\mathrm{d}u}{e^u(u)^\beta} = \int_{\ln(2)}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{(u)^\beta}.$$

Or cette intégrale converge si, et seulement si, $\beta > 1$ comme intégrale de Riemann en $+\infty$.

(c) Posons $f : t \in [2, +\infty[\mapsto \dfrac{1}{t\ln(t)^\beta}$. f est continue comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Elle est de plus décroissante et strictement positive sur $[2, +\infty[$.
Par le théorème de comparaison série - intégrale établi à la question 1., la série S est de même nature que la suite (u_n) définie par :

$$\forall n \geq 2, \quad u_n = \int_2^n f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Deux cas se présentent :

- Si $\beta > 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_2^x f(t)\,\mathrm{d}t$ existe et est finie d'après la question 2.(b). Par caractérisation séquentielle de la limite, la suite (u_n) converge vers cette même limite finie.
- Si $\beta \leq 1$, la fonction $x \in [2,+\infty[\mapsto \int_2^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est croissante donc admet une limite finie ou infinie en $+\infty$ par le théorème de limite monotone. Et cette limite est $+\infty$ par la question 2.(b). Toujours par caractérisation séquentielle de la limite, (u_n) diverge alors également vers $+\infty$.

Ainsi la suite (u_n) converge si, et seulement si, $\beta > 1$, et il en est donc de même de la série S par théorème de comparaison série - intégrale.

Fonction Gamma

Exercice 8.21 (★★ - Valeur de Γ aux demi-entiers)

1. Justifier la convergence et déterminer la valeur de intégrales $\int_0^{+\infty} \sqrt{t}e^{-t}\mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} t^{\frac{5}{2}}e^{-t}\mathrm{d}t$.
2. Montrer que pour tout entier naturel n, on a $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}$.

Rappel. La fonction Gamma d'Euler.

L'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} t^{\nu-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $\nu > 0$. On appelle *fonction Gamma d'Euler* et on note Γ la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\Gamma(\nu) = \int_0^{+\infty} t^{\nu-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

De plus :

(1) $\forall \nu \in]0,+\infty[,\ \Gamma(\nu+1) = \nu\Gamma(\nu)$.

(2) $\forall n \in \mathbb{N},\ \Gamma(n+1) = n!$.

(3) $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

1. Remarquons que $\int_0^{+\infty} \sqrt{t}e^{-t}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t^{\frac{3}{2}-1}e^{-t}\mathrm{d}t = \Gamma(3/2)$. Puisque $3/2 > 0$, l'intégrale converge, et :
$$\Gamma(3/2) = \Gamma(1/2+1) = \frac{1}{2}\Gamma(1/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$
De même, $\int_0^{+\infty} t^{\frac{5}{2}}e^{-t}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t^{\frac{7}{2}-1}e^{-t}\mathrm{d}t = \Gamma(7/2)$ converge car $7/2 > 0$, et :
$$\Gamma(7/2) = \Gamma(5/2+1) = \frac{5}{2}\Gamma(5/2) = \frac{5}{2}\frac{3}{2}\Gamma(3/2) = \frac{5}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma(1/2) = \frac{5}{2}\frac{3}{2}\Gamma(3/2) = \frac{5}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$
2. On le montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Init. $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} = \frac{(2\times 0)!\sqrt{\pi}}{4^0 \times 0!}$, donc la propriété est vraie au rang 0.

Hér. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vraie au rang n. Au rang $n+1$:

$$\begin{aligned}
\Gamma\left((n+1)+\frac{1}{2}\right) &= \Gamma\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)+1\right) = \left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) \\
&\overset{HR}{=} \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!} = \frac{2n+1}{2}\frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!} \\
&= \frac{(2n+2)(2n+1)}{2(2n+2)}\frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)}\frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!} \\
&= \frac{(2n+2)!\sqrt{\pi}}{4^{n+1}(n+1)!} = \frac{(2(n+1))!\sqrt{\pi}}{4^{n+1}(n+1)!}
\end{aligned}$$

D'où la propriété au rang $n+1$.

Par principe de récurrence, $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 8.22 (★★)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
2. Déterminer I_0 et I_1.
3. À l'aide du changement de variable $y = x^2$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$.
4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = \frac{n+1}{2} I_n$.
5. Exprimer I_{2n+1} et I_{2n} en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
6. Soit $P \in \mathbb{R}[x]$. Montrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(x)e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ converge et déterminer sa valeur en fonction des cœfficients de P.

Exercice 8.23 (★★★ - Oral ESCP 2012 - Fonction bêta d'Euler)

Pour tous réels strictement positifs x et y, on pose $B(x,y) = \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t$.

1. Prouver la convergence de l'intégrale définissant $B(x,y)$.
2. (a) Prouver que : $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $B(x,y) = B(y,x)$.
   (b) Montrer que : $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $B(x+1,y) = \frac{x}{y}B(x,y+1)$.
3. Montrer que : $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $B(x,y+1) = B(x,y) - B(x+1,y)$.
   En déduire que $B(x+1,y) = \frac{x}{x+y}B(x,y)$.
4. Soit n un entier naturel non nul, et soit $x > 0$.
   (a) Étudier le signe sur $[0,1]$ de la fonction $g : t \mapsto e^{-t} - 1 + t$. En déduire que pour tout $t \in [0,n]$, on a :
   $$\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}.$$
   (b) Montrer que pour tout $t \in [0,n]$, on a : $\left(1-\frac{t^2}{n}\right)e^{-t} \leq \left(1-\frac{t}{n}\right)^n$.
   (c) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t = \Gamma(x)$.

5. Montrer que :
$$\forall x > 0, \quad \Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

1. La fonction $t \mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est continue et positive sur $]0,1[$.

   Au voisinage de 0 , on a $t^{x-1}(1-t)^{y-1} \underset{t\to 0}{\sim} t^{x-1}$ et $\int_0^{1/2} t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ est une intégrale de Riemann convergente, donc, par le critère de comparaison pour les fonctions positives,
$$\int_0^{1/2} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t \text{ est convergente.}$$
   De même, au voisinage de 1, $t^{x-1}(1-t)^{y-1} \underset{t\to 1}{\sim} (1-t)^{y-1}$.

   Mais $\int_{1/2}^1 (1-t)^{y-1} dt$ est une intégrale de Riemann convergente et donc $\int_{1/2}^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t$ converge.

   On en déduit que l'intégrale définissant $B(x,y)$ est convergente.

2. (a) Procédons au changement de variable $u = 1-t$ (qui est légitime car l'intégrale définissant $B(x,y)$ converge). On a alors $u = 1$ pour $t = 0$ et $u = 0$ pour $t = 1$. De plus, $du = -dt$, et alors
$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t = -\int_1^0 (1-u)^{x-1}u^{y-1}\,\mathrm{d}u = \int_0^1 u^{y-1}(1-u)^{x-1}\,\mathrm{d}u = B(y,x).$$
   (b) Par intégration par parties sur un segment de la forme $[a;b] \subset]0,1[$:
$$\int_a^b t^x(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{y}t^x(1-t)^{y-1}\right]_a^b + \frac{x}{y}\int_a^b t^{x-1}(1-t)^y\,\mathrm{d}t.$$
   En prenant la limite lorsque $a \to 0^+$, il vient :
$$\int_0^b t^x(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{y}b^x(1-b)^{y-1} + \frac{x}{y}\int_0^b t^{x-1}(1-t)^y\,\mathrm{d}t$$
   Puis en prenant la limite lorsque $b \to 0^+$:
$$B(x+1,y) = \int_0^1 t^x(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t = \frac{x}{y}\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^y\,\mathrm{d}t = \frac{x}{y}B(x,y).$$

3. Calculons :
$$\begin{aligned} B(x,y+1) &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^y\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 t^x(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t = B(x,y) - B(x+1,y). \end{aligned}$$
   On en déduit :
$$B(x+1,y) = \frac{x}{y}B(x,y) = \frac{x}{y}B(x,y) - \frac{x}{y}B(x+1,y),$$
   soit :
$$\frac{x+y}{y}B(x+1,y) = \frac{x}{y}B(x,y) \Leftrightarrow B(x+1,y) = \frac{x}{x+y}B(x,y).$$

4. (a) Soit $g : t \mapsto e^{-t} - 1 + t$. Alors g est dérivable et $g'(t) = -e^{-t} + 1 \geq 0$, de sorte que g est croissante sur $[0, 1]$.
De plus, $g(0) = 0$, et donc g est positive sur $[0, 1]$.
On en déduit que pour $t \in [0, n]$, puisque $\frac{t}{n} \in [0, 1], 1 - \frac{t}{n} \leqslant e^{-t/n}$ et donc :

$$\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq \left(e^{-t/n}\right)^n = e^{-t}.$$

(b) Si $t \in [\sqrt{n}, n]$, la relation est évidente car le membre de gauche est négatif lorsque celui de droite est positif.
Supposons donc que $t \in [0, \sqrt{n}]$. L'inégalité à prouver est équivalente (par croissance du logarithme) à

$$-t + \ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) \leq n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right).$$

Étudions donc la fonction :

$$h : t \mapsto -t + \ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) - n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right).$$

Elle est dérivable sur $[0, \sqrt{n}]$, et :

$$h'(t) = -1 - \frac{2t}{n - t^2} + \frac{n}{n - t} = -\frac{t\left((t-1)^2 + (n-1)\right)}{(t^2 - n)(t - n)}$$

Ainsi, elle est négative sur $[0, \sqrt{n}]$, de sorte que h y est décroissante. Comme $h(0) = 0$, on en déduit que :

$$\forall t \in [0, \sqrt{n}], h(t) \leq 0 \Leftrightarrow -t + \ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) \leq n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) \Leftrightarrow \left(1 - \frac{t^2}{n}\right) e^{-t} \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n.$$

(c) Des deux questions précédentes, il vient, pour $x > 0$:

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t^2}{n}\right) e^{-t} t^{x-1}\, \mathrm{d}t \leq \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\, \mathrm{d}t \leq \int_0^n e^{-t} t^{x-1}\, \mathrm{d}t.$$

Mais par définition :

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^n t^{x-1} e^{-t}\, \mathrm{d}t = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, \mathrm{d}t = \Gamma(x).$$

De plus :

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t^2}{n}\right) t^{x-1} e^{-t}\, \mathrm{d}t = \int_0^n t^{x-1} e^{-t} - \frac{1}{n} \int_0^n t^{x+1} e^{-t}\, \mathrm{d}t \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \Gamma(x) - 0\Gamma(x+2) = \Gamma(x).$$

Par le théorème des gendarmes, on en déduit que :

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t = \Gamma(x).$$

5. En posant $u = \frac{t}{n}$, il vient

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (1-u)^n (un)^{x-1} n\,\mathrm{d}u = n^x \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1}\,\mathrm{d}u$$
$$= n^x B(x, n+1) = n^x B(n+1, x).$$

D'après la formule obtenue à la question 3., il vient :

$$B(n+1,x) = \frac{n}{n+x} B(n,x) = \frac{n(n-1)}{(n+x)(n-1+x)} B(n-1,x) \cdots = \frac{n!}{(x+1)\cdots(x+n)} B(1,x)$$
$$= \frac{n!}{(x+1)\cdots(x+n)} \int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t = \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

On en déduit par la question 4.(c) que :

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

Exercice 8.24 (★★★★ - Étude de la fonction Gamma)

1. Montrer que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x) \geq \frac{1}{e} \int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t$.
   En déduire que $\lim_{x\to 0} \Gamma(x) = +\infty$.

2. Montrer que pour tout $x > 1$, $\Gamma(x) \geq 2^{x-1} \int_2^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$.
   En déduire $\lim_{x\to+\infty} \Gamma(x)$.

3. On définit pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ la fonction $f_t : x \mapsto t^{x-1}e^{-t}$.
   (a) Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$.
   Montrer que la fonction f_t est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer f_t' et f_t''.
   (b) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $|h| \leq \min(x/2, 1)$.
   Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$:
   $$\left|\frac{f_t(x+h) - f_t(x)}{h} - f_t'(x)\right| \leq \frac{|h|}{2} M_2(t,x)$$
   où
   $$M_2(t,x) = \begin{cases} (\ln t)^2 e^{-t} t^{x/2-1} & \text{si } t < 1 \\ (\ln t)^2 e^{-t} t^x & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$
   (c) Justifier la convergence des intégrales :
   $$\int_0^{+\infty} (\ln t) e^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t \ , \quad \int_0^1 (\ln t)^2 e^{-t} t^{x/2-1}\,\mathrm{d}t \ \text{ et } \ \int_1^{+\infty} (\ln t)^2 e^{-t} t^x\,\mathrm{d}t.$$
   (d) En déduire que Γ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} f_t'(x)\,\mathrm{d}t.$$
   (e) À l'aide du théorème de Rolle, montrer qu'il existe un réel $\alpha \in]1,2[$ tel que $\Gamma'(\alpha) = 0$.
   On ne cherchera pas à déterminer α.

4. (a) Soit $t > 0$, montrer que la fonction f_t est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) En déduire que la fonction Γ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

5. Dresser le tableau de variation de la fonction Γ et tracer sa courbe représentative.

1. Pour tout $x > 0$, $\Gamma(x) \geq \int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ car $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est une fonction positive. Comme de plus $e^{-t} \geq e^{-1}$ pour tout $t \in]0,1]$, et que $\int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ converge car $x > 0$, il vient :

$$\Gamma(x) \geq \int_0^1 t^{x-1}e^{-1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{e}\int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t.$$

Puisque $x \neq 0$:

$$\int_\varepsilon^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^x}{x}\right]_\varepsilon^1 = \frac{1}{x} - \frac{\varepsilon^x}{x} \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{x}.$$

Ainsi $\Gamma(x) \geq \frac{1}{ex}$ pour tout $x > 0$. Puisque $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{ex} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0^+} \Gamma(x)$ existe et vaut $+\infty$ par théorème de comparaison.

2. Soit $x > 1$. $\Gamma(x) \geq \int_2^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ puisque $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est une fonction positive. Comme de plus $t^{x-1} \geq 2^{x-1}$ pour tout $t \in [2,+\infty[$ car $x > 1$, et que $\int_2^{+\infty} 2^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge (intégrale exponentielle de référence), on obtient :

$$\Gamma(x) \geq 2^{x-1}\int_2^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} 2^{x-1} = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{(x-1)\ln(2)} = +\infty$, par théorème de comparaison :

$$\lim_{x \to +\infty} \Gamma(x) \text{ existe et vaut } +\infty.$$

3. (a) On fixe $t \in \mathbb{R}_+^*$ et on regarde le caractère $\mathscr{C}^2$ en x de la fonction :

$$f_t : x \mapsto t^{x-1}e^{-t} = e^{(x-1)\ln(t)}e^{-t}.$$

La fonction exponentielle étant $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, f_t est $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour tout $x > 0$:

$$f_t'(x) = \ln(t)e^{(x-1)\ln(t)}e^{-t} \quad \text{et} \quad f_t''(x) = \ln(t)^2e^{(x-1)\ln(t)}e^{-t}.$$

(b) On applique la formule de Taylor Lagrange entre x et $x+h$ à f_t qui est $\mathscr{C}^2$:

> **Rappel. Inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n.**
> Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur un intervalle I. On suppose que $|f^{(n+1)}|$ est majorée par un réel M sur I. Alors pour tout $(a,x) \in I^2$, on a :
>
> $$\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}.$$

Pour appliquer cette formule, il nous faut majorer $|f_t''(u)|$ quand u est compris entre x et $x+h$:

$$|f_t''(u)| = \ln(t)^2t^{u-1}e^{-t} = \ln(t)^2e^{(u-1)\ln(t)}e^{-t}$$

On a deux cas à étudier :

- Si $t \geq 1$, alors $u \mapsto e^{(u-1)\ln(t)}$ est croissante. Comme $|h| \leq 1$, alors $u \leq x + |h| \leq x + 1$, et :
$$|f_t''(u)| \leq \ln(t)^2 e^{(x+1-1)\ln(t)} e^{-t} = \ln(t)^2 t^x e^{-t}.$$
- Si $t < 1$, alors $u \mapsto e^{(u-1)\ln(t)}$ est décroissante. Comme $|h| \leq \frac{x}{2}$, alors $u \geq x - |h| \geq x - \frac{x}{2} = \frac{x}{2}$, et :
$$|f_t''(u)| \leq \ln(t)^2 e^{(\frac{x}{2}-1)\ln(t)} e^{-t} = \ln(t)^2 t^{\frac{x}{2}-1} e^{-t}.$$

Posons $M_2(t,x)$ le réel de l'énoncé. En appliquant la formule de Taylor Lagrange :
$$\left|f_t(x+h) - f_t(x) - hf_t'(x)\right| \leq \frac{h^2}{2} M_2(t,x).$$

On obtient ainsi l'inégalité voulue en divisant par $|h| \neq 0$:
$$\left|\frac{f_t(x+h) - f_t(x)}{h} - f_t'(x)\right| \leq \frac{|h|}{2} M_2(t,x).$$

(c) Montrons la convergence de chacune de ces intégrales.

Pour l'intégrale $\int_0^{+\infty} (\ln t) e^{-t} t^{x-1} \, dt$: la fonction $t \mapsto (\ln t) e^{-t} t^{x-1}$ est continue sur $]0, +\infty[$. Donc cette intégrale est impropre en 0 et en $+\infty$.

En 0 :

- $(\ln t) e^{-t} t^{x-1} = o\left(\dfrac{1}{t^{1-\frac{x}{2}}}\right)$ puisque
$$t^{1-\frac{x}{2}} \times (\ln t) e^{-t} t^{x-1} = e^{-t} \ln(t) t^{\frac{x}{2}} \underset{t \to 0}{\to} 0$$
par croissances comparées (avec $x > 0$) ;
- $\dfrac{1}{t^{1-\frac{x}{2}}} \geq 0$ au voisinage de 0^+;
- $\int_0^1 \dfrac{1}{t^{1-\frac{x}{2}}} \mathrm{d}t$ converge (intégrale de Riemann d'exposant $1 - \frac{x}{2} < 1$).

Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 (\ln t) e^{-t} t^{x-1} \, dt$ converge.

En $+\infty$:

- $(\ln t) e^{-t} t^{x-1} = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ puisque
$$t^2 \times (\ln t) e^{-t} t^{x-1} = e^{-t} \ln(t) t^{x+1} \underset{t \to +\infty}{\to} 0$$
par croissances comparées ;
- $\dfrac{1}{t^2} \geq 0$ au voisinage de $+\infty$;
- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} \mathrm{d}t$ converge (intégrale de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$).

Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} (\ln t)e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ converge.

Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln t)e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ converge bien.

Pour l'intégrale $\int_0^1 (\ln t)^2 e^{-t}t^{x/2-1}\,\mathrm{d}t$: la fonction $t \mapsto (\ln t)^2 e^{-t}t^{x/2-1}$ est continue sur $]0,1]$. Donc cette intégrale est impropre en 0.

En 0 :

- $(\ln t)^2 e^{-t}t^{x/2-1} = o\left(\dfrac{1}{t^{1-\frac{x}{4}}}\right)$ puisque

$$t^{1-\frac{x}{4}} \times (\ln t)e^{-t}t^{x/2-1} = e^{-t}\ln(t)t^{\frac{x}{4}} \underset{t\to 0}{\to} 0$$

  par croissances comparées (avec $x > 0$) ;
- $\dfrac{1}{t^{1-\frac{x}{4}}} \geq 0$ au voisinage de 0^+;
- $\int_0^1 \dfrac{1}{t^{1-\frac{x}{4}}}\mathrm{d}t$ converge (intégrale de Riemann d'exposant $1-\frac{x}{4} < 1$)

Ainsi l'intégrale $\int_0^1 (\ln t)^2 e^{-t}t^{x/2-1}\,\mathrm{d}t$ converge.

Pour l'intégrale $\int_1^{+\infty} (\ln t)^2 e^{-t}t^{x}\,\mathrm{d}t$: la fonction $t \mapsto (\ln t)^2 e^{-t}t^{x}$ est continue sur $[1,+\infty[$. Donc cette intégrale est impropre en $+\infty$.

En $+\infty$:

- $(\ln t)^2 e^{-t}t^{x/2-1} = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ puisque

$$t^2 \times (\ln t)e^{-t}t^{x} = e^{-t}\ln(t)t^{x+2} \underset{t\to +\infty}{\to} 0$$

  par croissances comparées ;
- $\dfrac{1}{t^2} \geq 0$ au voisinage de 0^+;
- $\int_0^1 \dfrac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ converge (intégrale de Riemann d'exposant $2 > 1$).

Donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} (\ln t)^2 e^{-t}t^{x}\,\mathrm{d}t$ converge.

(d) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, et $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $|h| \leq \min(x/2, 1)$. D'après ce qui précède :

$$\left|\frac{f_t(x+h)-f_t(x)}{h} - f_t'(x)\right| \leq \frac{|h|}{2}M_2(t,x)$$

où

$$M_2(t,x) = \begin{cases} (\ln t)^2 e^{-t}t^{x/2-1} & \text{si } t < 1, \\ (\ln t)^2 e^{-t}t^{x} & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

De plus, on vient de montrer, en utilisant de plus la linéarité de l'intégrale, que $\displaystyle\int_0^{+\infty} M_2(t,x)\,\mathrm{d}t$ converge. On en déduit par comparaison que

$$\int_0^{+\infty} \frac{f_t(x+h)-f_t(x)}{h} - f_t'(x)\,\mathrm{d}t$$

converge absolument, donc converge, et par inégalité triangulaire :

$$\left|\int_0^{+\infty} \frac{f_t(x+h)-f_t(x)}{h} - f_t'(x)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^{+\infty} \left|\frac{f_t(x+h)-f_t(x)}{h} - f_t'(x)\right|\,\mathrm{d}t \leq \frac{|h|}{2}\int_0^{+\infty} M_2(t,x)\,\mathrm{d}t.$$

Montrons à présent que Γ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $|h| \leq \min(x/2, 1)$. Alors :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\Gamma(x+h)-\Gamma(x)}{h} - \int_0^{+\infty} f_t'(x)\,\mathrm{d}t\right| &= \left|\frac{1}{h}\int_0^{+\infty} f_t(x+h)\mathrm{d}t - \frac{1}{h}\int_0^{+\infty} f_t(x)\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} f_t'(x)\,\mathrm{d}t\right| \\
&= \left|\int_0^{+\infty} \frac{f_t(x+h)-f_t(x)}{h} - f_t'(x)\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \int_0^{+\infty} \left|\frac{f_t(x+h)-f_t(x)}{h} - f_t'(x)\right| \mathrm{d}t \\
&\quad \text{par inég. triang. (intég. abs. conv.)} \\
&\leq \frac{|h|}{2}\int_0^{+\infty} M_2(t,x)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Or $\leq \frac{|h|}{2}\int_0^{+\infty} M_2(t,x)\mathrm{d}t$ est indépendante de h. Par théorème d'encadrement lorsque h tend vers 0 :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Gamma(x+h)-\Gamma(x)}{h} \quad \text{existe et vaut} \quad \int_0^{+\infty} f_t'(x)\,\mathrm{d}t.$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, Γ est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} f_t'(x)\,\mathrm{d}t.$$

(e) On sait que $\Gamma(n+1) = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En particulier $\Gamma(1) = 0! = 1! = \Gamma(2)$. La fonction Γ est continue sur $[1,2]$ (on vient de voir qu'elle est dérivable, donc continue sur $\mathbb{R}_+^*$), dérivable sur $]1,2[$. Comme de plus $\Gamma(1) = \Gamma(2)$, il suit par le théorème de Rolle qu'il existe $\alpha \in]1,2[$ tel que $\Gamma'(\alpha) = 0$.

4. (a) On rappelle les caractérisations suivantes d'une fonction convexe sur un intervalle I :

> **Rappel.**
> Soit $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ sur I.
>
> $$\begin{aligned} f \text{ est convexe sur } I &\Leftrightarrow \forall x,y \in I, \forall \lambda \in [0,1], f((1-\lambda)x+\lambda y) \leq (1-\lambda)f(x)+\lambda f(y) \\ &\Leftrightarrow \mathscr{C}_f \text{ est au dessus de ses tangentes sur } I \\ &\Leftrightarrow f' \text{ est croissante sur } I \\ &\Leftrightarrow \forall x \in I, f''(x) \geq 0 \end{aligned}$$

Ici on a vu que pour tout $t > 0$, f_t est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et :

$$\forall x > 0, \quad f_t''(x) = (\ln(t))^2 t^{x-1} e^{-t} > 0.$$

Ainsi f_t est bien convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) Pour tout $t > 0$, f_t est convexe. Ainsi pour tout $\lambda \in [0,1]$, et tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f_t(1-\lambda)x+\lambda y) \leq (1-\lambda)f_t(x) + \lambda f_t(y).$$

Intégrons alors cette relation entre 0 et $+\infty$ (possible car tout converge ici) :

$$\int_0^{+\infty} f_t((1-\lambda)x+\lambda y)\mathrm{d}t \leq \int_0^{+\infty} (1-\lambda)f_t(x)+\lambda f_t(y)\mathrm{d}t.$$

On obtient ainsi (en utilisant la linéarité de l'intégrale, possible ici car tout converge) :

$$\Gamma(1-\lambda)x+\lambda y) \leq (1-\lambda)\int_0^{+\infty} f_t(x)\mathrm{d}t + \lambda\int_0^{+\infty} f_t(y)\mathrm{d}t = (1-\lambda)\Gamma(x)+\lambda\Gamma(y).$$

Ainsi Γ est une fonction convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. De tout ce qu'on a fait, on obtient le tableau de variation de Γ suivant :

x	0		α		$+\infty$
$\Gamma'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$\Gamma(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

On peut alors tracer la représentation graphique de la courbe de Γ.