TD7

Couples de variables aléatoires discrètes

Loi d'un couple, lois marginales et conditionnelles

Exercice 7.1 (★)

On considère un couple (X, Y) de variables aléatoires réelles à valeurs dans $\mathbb{N}$ pour lequel il existe un réel a tel que la loi de (X, Y) soit définie par : $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ P([X = i] \cap [Y = j]) = \dfrac{1}{j!}\dfrac{a}{2^{i+j}}$.

1. Déterminer a.
2. Déterminer les lois marginales.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 7.2 (★★)

On désigne par n un entier naturel non nul et on considère n urnes numérotées de 1 à n. On suppose que pour tout entier k compris entre 1 et n, l'urne numéro k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit au hasard une urne parmi les n et dans cette urne on tire au hasard une boule.
On note X la variable aléatoire égale au numéro de l'urne choisie et N la variable aléatoire égale au numéro porté par la boule obtenue.

1. Reconnaitre la loi de X, ainsi que la loi de N sachant $[X = i]$ pour tout $i \in X(\Omega)$.
2. Déterminer la loi du couple (X, N).
3. En déduire la loi de N sous forme de somme.
4. Calculer l'espérance et la variance de N.

Exercice 7.3 (★★★ - QSP HEC 2014)

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad P([X = i] \cap [Y = j]) = \frac{a}{(i + j + 1)!}.$$

Déterminer le réel a. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

> Posons $p_{i,j} = \dfrac{a}{(i + j + 1)!}$ pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$. On cherche une condition nécessaire et suffisante sur a pour que la famille des $p_{i,j}$ définisse une loi de probabilité. Rappelons que c'est le cas si, et seulement si, $(p_{i,j})$ est une famille de réels positifs, sommable et dont la somme vaut 1. Le réel a doit donc être positif nécessairement. Montrons que la famille $(p_{i,j})$ est sommable et calculons sa somme. Pour cela, étant donné la présence de $i + j$ dans le terme général, on va procéder à une somme suivant les diagonales (comme tout est positif, inutile de mettre des valeurs absolues) :
>
> - Pour tout $n \in \mathbb{N}$:
>
> $$\sum_{i+j=n} p_{i,j} = \sum_{i+j=n} \frac{a}{(n+1)!} = (n+1)\frac{a}{(n+1)!} = \frac{a}{n!}$$
>
> car, rappelons le, le cardinal de $I_n = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2,\ i + j = n\}$ est $n + 1$.
>
> - $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{a}{n!}$ converge en tant que série exponentielle, et sa somme vaut ae^1.

Par le théorème de sommation suivant les diagonales, la série double $\sum P(X=i,Y=j)$ converge et elle vaut ae^1. Ainsi, la famille $(p_{i,j})$ définit une loi de probabilité si, et seulement si, $a=e^{-1}$.

Étudions à présent l'indépendance de X et Y. Pour cela, remarquons que :

$$P(X=0,Y=0)=\frac{e^{-1}}{(0+0)!}=e^{-1}.$$

D'autre part, calculons :

$$P(X=0)=\sum_{j=0}^{+\infty}P(X=0,Y=j)=\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{e^{-1}}{(j+1)!}=e^{-1}(\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{1}{j!})=e^{-1}(e-1)=1-e^{-1}.$$

De même, $P(Y=0)=1-e^{-1}$, et on a $P(X=0,Y=0)=e^{-1}$. Ainsi :

$$P(X=0,Y=0)\neq P(X=0)P(Y=0).$$

Donc les variables X et Y ne sont pas indépendantes.

Fonctions de deux variables discrètes

Exercice 7.4 (★)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de Poisson de paramètre $\lambda>0$.

Justifier que $\dfrac{X}{1+Y}$ possède une espérance et la calculer.

Exercice 7.5 (★★)

Soient X et Y deux variables indépendantes, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},P)$ telles que $X\hookrightarrow\mathscr{P}(\lambda)$ et $Y\hookrightarrow\mathscr{G}(p)$, $p\in]0,1[$.

Pour tout $\omega\in\Omega$, on définit une matrice $A(\omega)$ par :

$$A(\omega)=\begin{pmatrix}X(\omega) & Y(\omega)-1\\ Y(\omega)-1 & X(\omega)\end{pmatrix}.$$

Déterminer la probabilité que $A(\omega)$ soit inversible.

Passons par l'évènement contraire : $A(\omega)$ n'est pas inversible si, et seulement si, $\det(A(\omega))=0$, ce qui équivaut à :

$$\begin{aligned}X(\omega)^2-(Y(\omega)-1)^2=0 &\Leftrightarrow (X(\omega)-Y(\omega)+1)(X(\omega)+Y(\omega)-1)=0\\ &\Leftrightarrow X(\omega)-Y(\omega)+1 \text{ ou } X(\omega)+Y(\omega)-1\\ &\Leftrightarrow X(\omega)=Y(\omega)-1 \text{ ou } X(\omega)=-Y(\omega)+1\end{aligned}$$

Or $X\geq 0$ et $-Y+1\leq 0$. Donc $A(\omega)$ est inversible si, et seulement si :

$$X(\omega)=Y(\omega)-1 \text{ ou } X(\omega)=0=-Y(\omega)+1\Leftrightarrow X(\omega)=Y(\omega)-1$$

Ainsi la probabilité pour que A ne soit pas inversible est égale à $P(X=Y-1)$. Reste à calculer cette probabilité. On utilise le système complet d'évènements $([Y=k])_{k\geq 1}$ et la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(X=Y-1) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=Y-1,\ Y=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k-1,\ Y=k) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k-1)P(Y=k) \quad \text{car les variables sont indépendantes} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda}(1-p)^{k-1}p = pe^{-\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(\lambda(1-p))^{k-1}}{(k-1)!} = pe^{-\lambda}e^{\lambda(1-p)} = pe^{-\lambda p} \end{aligned}$$

La probabilité que A soit inversible est donc égale à $1-pe^{-\lambda p}$.

Exercice 7.6 (★★)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, telles que X suit la loi $\mathscr{P}(\lambda)$ et Y suit la loi $\mathscr{P}(\mu)$. Déterminer la loi de X sachant $[X+Y=n]$.

Tout d'abord, $X([X+Y=n]) = [\![0,n]\!]$. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$:

$$\begin{aligned} P_{[X+Y=n]}(X=k) &= \frac{P([X=k]\cap[X+Y=n])}{P(X+Y=n)} = \frac{P([X=k]\cap[Y=n-k])}{P(X+Y=n)} \\ &= \frac{P(X=k)P(Y=n-k)}{P(X+Y=n)} \end{aligned}$$

car X et Y sont indépendantes. De plus, par stabilité de la loi de Poisson, $X+Y$ suit la loi $\mathscr{P}(\lambda+\mu)$. On obtient :

$$P_{[X+Y=n]}(X=k) = \frac{\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\mu}}{\frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}e^{-(\lambda+\mu)}} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{\lambda^k\mu^{n-k}}{(\lambda+\mu)^n} = \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n-k}$$

Ainsi la loi de X sachant $[X+Y=n]$ est une loi binomiale $\mathscr{B}(n, \frac{\lambda}{\lambda+\mu})$.

Exercice 7.7 (★★)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes d'un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et suivant la même loi $\mathscr{G}(p)$.

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire $X+Y$. Admet-elle une espérance ?
2. Déterminer la loi de la variable aléatoire $S = \sup(X,Y)$. Admet-elle une espérance ?
3. Déterminer la loi de la variable aléatoire $I = \inf(X,Y)$. Admet-elle une espérance ?
4. Montrer que la variable aléatoire SI admet une espérance et la calculer.

Exercice 7.8 (★★★ - Minimum, maximum de lois uniformes)

On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, et on effectue des tirages avec remise dans cette urne. On note X le numéro de la première boule extraite, et Y le numéro de la seconde. On note également I le plus petit des numéros tirés, et S le plus grand.

1. Donner la loi de I et de S.

2. Montrer que $E(S) = \dfrac{(n+1)(4n-1)}{6n}$, $E(I) = \dfrac{(n+1)(2n+1)}{6n}$, puis que $V(S) = V(I) = \dfrac{(n+1)(n-1)(2n^2+1)}{36n^2}$.

3. Déterminer une relation liant X, Y, S et I. En déduire $V(S+I)$, puis $\rho_{S,I} = \dfrac{n^2-1}{2n^2+1}$.

1. Puisque $X, Y \hookrightarrow \mathscr{U}(\llbracket 1,n \rrbracket)$, $I(\Omega)$ est égal à $\llbracket 1,n \rrbracket$.

   Pour tout $k \in \llbracket 1,n \rrbracket$, $[I > k] = [X > k] \cap [Y > k]$ et donc :

$$P(I > k) \underbrace{=}_{X,Y \text{ indép.}} P(X > k)P(Y > k) \underbrace{=}_{X,Y \text{ de même loi}} P(X > k)^2 = \left(\frac{n-k}{n}\right)^2.$$

   Notons que cette égalité est encore vraie pour $k = 0$ car $P(I > 0) = 1 = \left(\dfrac{n-0}{n}\right)^2$. On obtient, pour tout $k \in \llbracket 1,n \rrbracket$:

$$P(I = k) = P(I > k-1) - P(I > k) = \left(\frac{n-k+1}{n}\right)^2 - \left(\frac{n-k}{n}\right)^2 = \frac{2n-2k+1}{n^2}.$$

   La loi de S avait été déterminée en cours, on avait obtenu $S(\Omega) = \llbracket 1,n \rrbracket$ et :

$$\forall k \in \llbracket 1,n \rrbracket, \quad P(S = k) = \left(\frac{k}{n}\right)^2 - \left(\frac{k-1}{n}\right)^2 = \frac{2k-1}{n^2}.$$

2. I et S étant des variables aléatoires finies, elles admettent une espérance et une variance. Pour I :

$$\begin{aligned} E(I) &= \sum_{k=1}^{n} kP(I=k) = \sum_{k=1}^{n} k\frac{2n-2k+1}{n^2} = \frac{2n+1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) - \frac{2}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right) \\ &= \frac{2n+1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} - \frac{2}{n^2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{3(n+1)(2n+1) - 2(n+1)(2n+1)}{6n} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n} \end{aligned}$$

   D'autre part :

$$\begin{aligned} E(I^2) &= \sum_{k=1}^{n} k^2P(I=k) = \sum_{k=1}^{n} k\frac{2n-2k+1}{n^2} = \frac{2n+1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right) - \frac{2}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n} k^3\right) \\ &= \frac{2n+1}{n^2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{2}{n^2}\frac{n^2(n+1)^2}{4} \\ &= \frac{6n(n+1)(2n+1)^2 - 18n^2(n+1)^2}{36n^2} = \frac{n(n+1)\left[6(4n^2+4n+1) - 18(n^2+n)\right]}{36n^2} \\ &= \frac{n(n+1)\left[6n^2+6n+6\right]}{36n^2} \end{aligned}$$

Par la formule de Huygens, on obtient :

$$\begin{aligned} V(I) = E(I^2) - E(I)^2 &= \frac{n(n+1)\left[6n^2+6n+6\right]}{36n^2} - \frac{(n+1)^2(2n+1)^2}{36n^2} \\ &= (n+1)\frac{6n^3+6n^2+6n-4n^3-8n^2-5n-1}{36n^2} = (n+1)\frac{2n^3-2n^2+n-1}{36n^2} \\ &= \frac{(n+1)(n-1)(2n^2+1)}{36n^2} \end{aligned}$$

On procède de manière similaire pour S, je vous laisse le faire en exercice.

3. Remarquons que $S+I = X+Y$. Puisque X et Y sont indépendantes :

$$V(S+I) = V(X+Y) = V(X)+V(Y) = \frac{n^2-1}{12} + \frac{n^2-1}{12} = \frac{n^2-1}{6}.$$

On obtient alors la covariance :

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(S,I) = \frac{1}{2}\left(V(S+I) - V(S) - V(I)\right) &= \frac{1}{2}\left(\frac{n^2-1}{6} - \frac{(n^2-1)(2n^2+1)}{18n^2}\right) \\ &= \frac{n^2-1}{2} \times \frac{3n^2-2n^2-1}{18n^2} = \frac{(n^2-1)^2}{36n^2} \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\rho_{I,S} = \frac{\mathrm{Cov}(I,S)}{\sqrt{V(I)V(S)}} = \frac{\mathrm{Cov}(I,S)}{V(I)} = \frac{n^2-1}{2n^2+1}.$$

Exercice 7.9 (★★★ - Somme de lois uniformes)

Soit $n \geq 1$, et soit X, Y des variables indépendantes suivant la loi $\mathscr{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$.
Déterminer la loi de $Z = X+Y$, son espérance et sa variance.
Pour le calcul $P(X+Y=k)$, on pourra distinguer les cas $k \leq n+1$ et $k > n+1$.

Notons tout d'abord que $Z(\Omega) = \llbracket 2, 2n \rrbracket$.

Fixons $k \in \llbracket 2, 2n \rrbracket$. Les variables X et Y étant indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, on va utiliser un produit de convolution :

$$P(Z=k) = \sum_{i=0}^{k} P(X=i)P(Y=k-i)$$

Puisque $X(\Omega) = Y(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$, $P(X=0)$ et $P(Y=0)$ sont nulles, d'où :

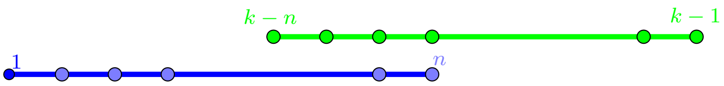
$$P(Z=k) = \sum_{i=1}^{k-1} P(X=i)P(Y=k-i). \qquad (*)$$

On a alors deux cas à distinguer :

- Si $k-1 \leq n$: dans ce cas, i et $k-i$ sont compris entre 1 et n pour tout $i = 1, \ldots, k-1$, de sorte que $P(X=i) = P(Y=k-i) = \frac{1}{n}$. D'où :

$$P(Z=k) = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{n^2} = \frac{k-1}{n^2}.$$

- Si $k-1>n$: cherchons $i \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket$ tel que $P(X=i)P(Y=k-i) \neq 0$. C'est le cas si, et seulement si :
$$1 \leq i \leq n \quad \text{ et } 1 \leq k-i \leq n$$
soit encore :
$$1 \leq i \leq n \quad \text{ et } k-n \leq i \leq k-1.$$
Puisque $k-1>n$, on obtient $\llbracket k-n, k-1 \rrbracket \cap \llbracket 1, n \rrbracket = \llbracket k-n, n \rrbracket$, ce qu'on peut aussi observer sur le diagramme suivant :



Finalement :
$$P(Z=k) = \sum_{i=k-n}^{n} P(X=i)P(Y=k-i) = \sum_{i=k-n}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{n-(k-n)+1}{n^2} = \frac{2n-k+1}{n^2}.$$

La loi de Z est donc donnée par $Z(\Omega) = \llbracket 2, 2n \rrbracket$ et par :
$$P(Z=k) = \begin{cases} \dfrac{k-1}{n^2} & \text{si } 2 \leq k \leq n+1, \\ \dfrac{2n-k+1}{n^2} & \text{si } n+2 \leq k \leq 2n. \end{cases}$$

Exercice 7.10 (★★★ - QSP HEC 2012)
Les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, et soit Y une variable aléatoire indépendante de X telle que : $Y(\Omega) = \{1, 2\}$, $P(Y=1) = P(Y=2) = \dfrac{1}{2}$. On pose : $Z = XY$.

1. Déterminer la loi de Z.
2. Quelle est la probabilité que Z prenne des valeurs paires ?

1. Comme $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $Y(\Omega) = \{1, 2\}$, $Z(\Omega)$ est égal à $\mathbb{N}$. Soit $k \in \mathbb{N}$, Deux cas sont possibles :

   - k est impair, soit de la forme $k = 2p+1$ avec $p \in \mathbb{N}$: $([Y=1], [Y=2])$ est un système complet d'évènements. Par la formule des probabilités totales :
$$\begin{aligned} P(Z=2p+1) &= P(Y=1, XY=2p+1) + P(Y=2, XY=2p+1) \\ &= P(Y=1, X=2p+1) + P(Y=2, 2X=2p+1) \\ &= P(Y=1)P(X=2p+1) + P(Y=2)P(2X=2p+1) \quad \text{par indépendance} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\lambda^{2p+1}}{(2p+1)!}e^{-\lambda} + \frac{1}{2} \times 0 = \frac{1}{2}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \end{aligned}$$

   - k est pair, soit de la forme $k = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}$: toujours avec le SCE $([Y=1], [Y=2])$

:

$$\begin{aligned} P(Z=2p) &= P(Y=1, XY=2p) + P(Y=2, XY=2p) \\ &= P(Y=1, X=2p) + P(Y=2, 2X=2p) \\ &= P(Y=1)P(X=2p) + P(Y=2)P(X=p) \quad \text{par indépendance} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\lambda^{2p}}{(2p)!}e^{-\lambda} + \frac{1}{2}\frac{\lambda^p}{p!}e^{-\lambda} = \frac{e^{-\lambda}}{2}\left(\frac{\lambda^k}{k!} + \frac{\lambda^{k/2}}{(k/2)!}\right) \end{aligned}$$

2. On cherche la probabilité de $\bigcup_{p\in\mathbb{N}} [Z=2p]$. Puisque ces évènements sont incompatibles, cette probabilité est égale à :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} P(Z=2p) = \frac{e^{-\lambda}}{2}\sum_{p=0}^{+\infty}\left(\frac{\lambda^{2p}}{(2p)!} + \frac{\lambda^p}{p!}\right)$$

La série $\sum_{p\geq 0}\frac{\lambda^p}{p!}$ converge et sa somme vaut e^λ.

On étudie l'autre série $\sum_{p\geq 0}\frac{\lambda^{2p}}{(2p)!}$: il s'agit de « la partie paire de la série exponentielle à laquelle on ne garde que les termes pairs ». En d'autres termes, il s'agit de la partie paire de l'exponentielle. En effet, rappelons que toute fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ se décompose de manière unique en la somme d'une fonction paire $p : x \mapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ et d'une fonction impaire $i : x \mapsto \frac{f(x)-f(-x)}{2}$ (on peut le faire par Analyse-Synthèse). On est donc amené à considérer :

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{x^k}{k!} + (-1)^k\frac{x^k}{k!}\right).$$

Or, $\dfrac{\frac{x^k}{k!} + (-1)^k\frac{x^k}{k!}}{2} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ impair} \\ \frac{x^k}{k!} & \text{si } k \text{ pair} \end{cases}$. On obtient donc :

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2} = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{2p}}{(2p)!}.$$

Ainsi, la série $\sum_{p\geq 0}\frac{\lambda^{2p}}{(2p)!}$ converge et sa somme vaut $\frac{e^x+e^{-x}}{2}$.

Finalement, comme tout converge, on peut écrire :

$$\frac{e^{-\lambda}}{2}\left(\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{2p}}{(2p)!} + \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\lambda^p}{p!}\right) = \frac{e^{-\lambda}}{2}\left(\frac{e^\lambda+e^{-\lambda}}{2} + e^\lambda\right) = \frac{3}{4} + \frac{e^{-2\lambda}}{4}$$

Ainsi la probabilité que Z soit paire est de $\frac{3}{4} + \frac{e^{-2\lambda}}{4}$.

Exercice 7.11 (★★★ - QSP ESCP 2016)

Soient n un entier supérieur ou égal à 1 et $p \in]0,1[$. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé et telles que X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$ et Y est à valeurs dans $[\![0,n]\!]$.

Que pensez vous de l'équivalence suivante : Y suit la loi $\mathscr{B}(n,p)$ si, et seulement si, $X+Y$ suit la loi $\mathscr{B}(2n,p)$?

Nous savons déjà que, si X et Y sont indépendantes et suivent une loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$, alors $X+Y$ suit la loi $\mathscr{B}(2n,p)$. Mais le cours ne dit rien au sujet de la réciproque.

Supposons donc que $X+Y$ suit la loi $\mathscr{B}(2n,p)$. Sachant que $Y(\Omega)\subset [\![0,n]\!]$, pour déterminer la loi de Y, on souhaite déterminer les probabilités ponctuelles $P(Y=k)$ pour $k=0,\dots,n$.

Puisque X et Y sont indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, on obtient par produit de convolution que pour tout $k\in[\![0,n]\!]$:

$$P(X+Y=k)=\sum_{i=0}^{k}P(Y=i)P(X=k-i),$$

soit encore :

$$\binom{2n}{k}p^k(1-p)^{2n-k}=\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{k-i}p^{k-i}(1-p)^{n-k+i}P(Y=i).$$

Ceci peut se récrire matriciellement :

$$\begin{pmatrix}\binom{2n}{0}(1-p)^{2n}\\ \binom{2n}{1}p(1-p)^{2n-1}\\ \vdots\\ \binom{2n}{n}p^n(1-p)^n\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}\binom{n}{0}(1-p)^n & 0 & \cdots & 0\\ \binom{n}{1}p(1-p)^{n-1} & \binom{n}{0}(1-p)^n & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & 0\\ \binom{n}{n}p^n & \binom{n}{n-1}p^{n-1}(1-p) & \cdots & \binom{n}{0}p^0(1-p)^n\end{pmatrix}}_{=A}\cdot\begin{pmatrix}P(Y=0)\\ P(Y=1)\\ \vdots\\ P(Y=n)\end{pmatrix}.$$

La matrice A étant triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux non nuls, elle est inversible. Ainsi, l'équation matricielle ci-dessus admet une unique solution. Or :

$$\begin{pmatrix}\binom{n}{0}(1-p)^n & 0 & \cdots & 0\\ \binom{n}{1}p(1-p)^{n-1} & \binom{n}{0}(1-p)^n & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & 0\\ \binom{n}{n}p^n & \binom{n}{n-1}p^{n-1}(1-p) & \cdots & \binom{n}{0}p^0(1-p)^n\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\binom{n}{0}p^0(1-p)^n\\ \binom{n}{1}p^1(1-p)^{n-1}\\ \vdots\\ \binom{n}{n}p^n(1-p)^0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\binom{2n}{0}(1-p)^{2n}\\ \binom{2n}{1}p(1-p)^{2n-1}\\ \vdots\\ \binom{2n}{n}p^n(1-p)^n\end{pmatrix}$$

puisque pour tout $k\in[\![0,n]\!]$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{k-i}p^{k-i}(1-p)^{n-k+i}\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}&=p^k(1-p)^{n-k}\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{k-i}\binom{n}{i}\\ &=\binom{2n}{k}p^k(1-p)^{2n-k}\end{aligned}$$

par l'identité de Vandermonde. Par unicité de la solution du système linéaire :

$$\begin{pmatrix}P(Y=0)\\ P(Y=1)\\ \vdots\\ P(Y=n)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\binom{n}{0}p^0(1-p)^n\\ \binom{n}{1}p^1(1-p)^{n-1}\\ \vdots\\ \binom{n}{n}p^n(1-p)^0\end{pmatrix}.$$

Ainsi Y suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$.

Exercice 7.12 (★★★★ - Oral HEC 2007)

On considère deux variables aléatoires X et Y, discrètes, définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. On considère une partie D (respectivement Δ) de $\mathbb{R}$, en bijection avec $\mathbb{N}$, dans laquelle X (resp. Y) prend presque sûrement ses valeurs, et on indexe bijectivement les éléments de D (resp. Δ) de sorte que $D = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ (resp. $\Delta = \{y_n,\ n \in \mathbb{N}\}$). On suppose que X et Y sont indépendantes et que X et $X+Y$ ont même loi.

1. On considère une série à termes positifs $\sum\limits_{n \geq 0} a_n$, qui est convergente.

   Justifier l'existence du nombre $M = \max\limits_{n \in \mathbb{N}}(a_n)$. En déduire que l'ensemble $\{P(X = x),\ x \in \mathbb{R}\}$ admet un plus grand élément.

   Soit alors a un réel tel que $P(X = a) = \max\{P(X = x),\ x \in \mathbb{R}\}$.

2. (a) Montrer que, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $P(X = a - y) = P(X = a)$ ou $P(Y = y) = 0$.

   (b) En déduire que la variable aléatoire Y est finie.

3. Soit μ un réel appartenant à l'ensemble $\{y \in \mathbb{R},\ P(Y = y) \neq 0\}$.

   Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(X = a - n\mu) = P(X = a)$.

4. Montrer que la variable Y est presque sûrement nulle.

1. Si $\sum a_n$ est convergente, alors nécessairement (a_n) tend vers 0.

   Si la suite (a_n) est nulle, elle admet évidemment un plus grand élément : 0.

   Si elle est non nulle, soit $i \in \mathbb{N}$ tel que $a_i > 0$. Puisque la suite $(a_n)_{n \geq i+1}$ tend vers 0, par définition de la limite d'une suite (en prenant $\varepsilon = a_i$) :

   $$\exists N \geq i+1,\ n \geqslant N \Rightarrow 0 \leq a_n \leq a_i.$$

   Considérons $j \in [\![0, N-1]\!]$ tel que $a_j = \max(a_0, a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_{N-1})$ (possible car une famille **finie** de réels admet toujours un plus grand élément). Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

   - soit $n \geq N$, et alors $a_n \leq a_i \leq a_j$.
   - Soit $n \leq N-1$, et alors $a_n \leq a_j$ par définition d'un maximum.

   Ainsi $a_n \leq a_j$ pour tout $n \in \mathbb{N}$: la famille (a_n) admet bien un plus grand élément.

   Puisque la série $\sum P(X = x_n)$ converge (par la formule des probabilités totales), elle admet un plus grand élément, atteint en (au moins) un réel $a \in D$. Et alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

   - soit $x \notin D$, et alors $P(X = x) = 0 \leq P(X = a)$;
   - soit il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x = x_n$, et alors $P(X = x_n) \leq P(X = a)$.

   Ainsi, l'ensemble $\{P(X = x),\ x \in \mathbb{R}\}$ admet un plus grand élément.

2. (a) Soit $y \in \mathbb{R}$. Si $y \notin \Delta$, alors par définition, $P(Y = y) = 0$.
   Sinon, on obtient, par indépendance de X et Y :

   $$P(X+Y = a) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(Y = y_n)\, P(X = a - y_n).$$

Et puisque X et $X+Y$ ont la même loi,

$$P(X=a)=P(X+Y=a)=\sum_{n=0}^{+\infty} P\left(Y=y_n\right) P\left(X=a-y_n\right).$$

Puisque $1=\sum_{n=0}^{+\infty} P\left(Y=y_n\right)$, on peut écrire :

$$P(X=a) \sum_{n=0}^{+\infty} P\left(Y=y_n\right)=\sum_{n=0}^{+\infty} P\left(Y=y_n\right) P\left(X=a-y_n\right)$$

D'où :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P\left(Y=y_n\right)\left(P(X=a)-P\left(X=a-x_n\right)\right)=0.$$

Mais par définition de a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$P\left(X=a-y_n\right) \leq P(X=a) \Leftrightarrow P(X=a)-P\left(X=a-y_n\right) \geq 0.$$

Ainsi, la somme des nombres positifs $P\left(Y=y_n\right)\left(P(X=a)-P\left(X=a-y_n\right)\right)$ est nulle. Donc chacun des nombres $P\left(Y=y_n\right)\left(P(X=a)-P\left(X=a-y_n\right)\right)$ est nul. D'où pour $n \in \mathbb{N}$:

$$P\left(Y=y_n=0\right) \quad \text{ou} \quad P(X=a)=P\left(X=a-y_n\right).$$

Autrement dit, pour tout $y \in \Delta$, $P(Y=y)=0$ ou $P(X=a)=P(X=a-y)$.

(b) Supposons que Y ne soit pas à support fini. Alors il existe une infinité de $y \in \mathbb{R}$ tels que $P(Y=y) \neq 0$. Et donc une infinité de $y \in \mathbb{R}$ tels que $P(X=a-y)=P(X=a)$. Or $P(X=a) \neq 0$, car il existe au moins un $x \in \mathbb{R}$ tel que $P(X=x) \neq 0$, faute de quoi la somme de la série $\sum P\left(X=x_n\right)$ ne serait pas égale à 1 .
Par conséquent, il existe une infinité d'entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $P\left(X=a-y_n\right)=P(X=a)$. Ceci est incompatible avec la sommabilité de la famille des $P(X=x)$ (le paquet constitué des $P(X=a-y_n)=P(X=a)$ n'étant pas sommable).
Par conséquent, il n'existe qu'un nombre fini de $y \in \mathbb{R}$ tels que $P(Y=y) \neq 0$: Y est une variable aléatoire finie.

3. Soit μ tel que $P(Y=\mu) \neq 0$. D'après la question 2.(a), on a nécessairement

$$P(X=a-\mu)=P(X=a).$$

Autrement dit, $P(X=a-\mu)$ est un maximum de l'ensemble $\{P(X=x), x \in \mathbb{R}\}$. On peut donc refaire le raisonnement de la question 2.(a) : pour tout $y \in \mathbb{R}, P(X=a-\mu-y)=P(X=a-\mu)$ ou $P(Y=y)=0$.

Et puisque $P(Y=\mu) \neq 0$, alors $P(X=a-\mu-\mu)=P(X=a)$. Donc $a-2\mu$ est tel que $P(X=a-2\mu)$ est le plus grand élément de l'ensemble $\{P(X=x), x \in \mathbb{R}\}$. Etc...

De proche en proche, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $P(X=a-n\mu)=P(X=a)$.

4. Supposons au contraire que Y ne soit pas presque sûrement nulle, c'est-à-dire qu'il existe $\mu \neq 0$ tel que $P(Y=\mu) \neq 0$.

D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbf{N}, P(X=a-n\mu)=P(X=a)$. Mais les $a-n\mu$ sont deux à deux distincts (puisque $\mu \neq 0$), et la série de terme général $P(X=a-n\mu)$

diverge. Or, $\bigcup_{n\in\mathbf{N}}[X = a - n\mu]$ est une union dénombrable d'événements deux à deux disjoints, donc cette série devrait converger par σ-additivité.

D'où une contradiction, et donc notre hypothèse de départ est fausse : pour tout $\mu \neq 0$, $P(Y = \mu) = 0$.

Ceci ne laisse plus beaucoup de choix, car $P(\Omega) = 1$: on a nécessairement $P(Y = 0) = 1$, et donc Y est presque sûrement nulle.

Covariance, corrélation linéaire

Exercice 7.13 (★)

Soit un couple (X, Y) de variables aléatoires dont la loi conjointe est donnée par :

$X \backslash Y$	b_1	b_2	b_3
a_1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
a_2	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	α

,

avec $a_i \neq a_j$ et $b_i \neq b_j$ si $i \neq j$.

1. Que vaut α ? Déterminer les lois marginales de X et de Y.
2. Montrer que $\operatorname{Cov}(X, Y) = \dfrac{(a_2 - a_1)(2b_1 - b_2 - b_3)}{25}$.
3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 7.14 (★ - ✍)

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de Bernoulli.

1. Montrer que $\operatorname{Cov}(X, Y) = P([X = 1] \cap [Y = 1]) - P([X = 1])P([Y = 1])$.
2. Montrer que deux variables aléatoires de Bernoulli sont indépendantes si, et seulement si, elles sont non corrélées.

1. Notons tout d'abord que XY prend uniquement les valeurs 0 et 1, et suit donc une loi de Bernoulli de paramètre $p = P(XY = 1) = P([X = 1] \cap [Y = 1])$. Ainsi :

$$E(XY) = p = P([X = 1] \cap [Y = 1]).$$

Par la formule de Huygens (toutes les variables sont finies, donc elles admettent bien des espérances et variances) :

$$\operatorname{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = P([X = 1] \cap [Y = 1]) - P(X = 1)P(Y = 1).$$

2. On sait déjà que deux variables indépendantes sont non corrélées puisque $\operatorname{Cov}(X, Y) = 0$. Mais la réciproque est fausse en générale ! On va montrer que c'est cependant vrai si les variables suivent une loi de Bernoulli toutes les deux. Supposons donc que $\operatorname{Cov}(X, Y) = 0$. Avec le calcul précédent, on obtient donc l'égalité :

$$P([X = 1] \cap [Y = 1]) = P(X = 1)P(Y = 1).$$

La famille $([X = 1], [Y = 1])$ d'évènement est donc indépendante. Par le cours, il en est de même de toute famille construite à partir de celle-ci en remplaçant l'un des évènement par son évènement contraire. Ce qui donne donc que pour tout $(i,j) \in \{0,1\}^2$:

$$P([X=i] \cap [Y=j]) = P(X=i)P(Y=j).$$

D'où l'indépendance de X et Y.

Exercice 7.15 (★★)

Une urne contient r boules rouges, v boules vertes et b boules bleues. On tire n boules dans l'urne successivement et avec remise. On note R (resp. V, B) la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges (resp. vertes, bleues) tirées.

1. Reconnaître les lois de R, V, B. Déterminer une relation liant R, V et B.
2. Calculer $V(R+V)$, puis montrer que $\rho_{R,V} = -\sqrt{\dfrac{rv}{(b+r)(b+v)}}$. Que peut-on en déduire ?
3. Que peut-on dire si $b=0$? Était ce prévisible ?

Exercice 7.16 (★★)

Soit $p \in]0,1[$, et soit (X,Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi conjointe est donnée par :

$$\forall (n,k) \in \mathbb{N}^2, \quad P([X=n] \cap [Y=k]) = \begin{cases} \lambda(1-p)^k & \text{si } k \geq n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer la valeur de λ.
2. Déterminer les lois marginales du couple (X,Y). Quelle est la loi de $X+1$? En déduire $E(X)$ et $V(X)$.
3. Montrer que X et $Y-X$ suivent la même loi.
4. Montrer que X et $Y-X$ sont indépendantes. En déduire $\mathrm{Cov}(X,Y)$. X et Y sont-elles indépendantes ?

1. Notons pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^2$, $p_{n,k} = \begin{cases} \lambda(1-p)^k & \text{si } k \geq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Tout d'abord, il est nécessaire que $\lambda \geq 0$ puisqu'une probabilité est positive. Montrons que la famille $(p_{n,k})$ est sommable (ce qui est sous-entendu dans l'énoncé puisque $([X=n] \cap [Y=k])$ est un SCE) et regardons à quelle condition sur λ sa somme vaut 1. Appliquons pour cela le théorème de Fubini :

   - Pour tout $k \geq 0$, $\sum\limits_{n \geq 0} p_{n,k}$ converge (absolument). En effet, puisque $p_{n,k} = 0$ si $n > k$, il y a un nombre fini de termes non nuls dans cette série, et sa somme vaut :
   $$\sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,k} = \sum_{n=0}^{k} \lambda(1-p)^k = \lambda(k+1)(1-p)^k.$$
   - La série $\sum\limits_{k \geq 0} \lambda(k+1)(1-p)^k$ est une série géométrique dérivée, avec $1-p \in]-1,1[$. Elle converge donc également.

Ainsi, la famille $(p_{n,k})$ est sommable, et sa somme vaut :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} p_{n,k} = \lambda\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)(1-p)^k = \lambda\sum_{k=1}^{+\infty}k(1-p)^{k-1} = \frac{\lambda}{(1-(1-p))^2} = \frac{\lambda}{p^2}.$$

Ainsi, pour $\lambda = p^2 \geq 0$, la famille $(p_{n,k})$ définit bien une loi de probabilité.

2. Calculons la loi marginale de X, à l'aide de la FPT et du SCE $([Y=k])_{k\in\mathbb{N}}$. Pour tout $n \in X(\Omega) = \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} P(X=n) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=n,\ Y=k) = \sum_{k=n}^{+\infty} P(X=n,\ Y=k) \\ &= \lambda\sum_{k=n}^{+\infty}(1-p)^k = \lambda(1-p)^n\frac{1}{1-(1-p)} = (1-p)^n p. \end{aligned}$$

En particulier, si on pose $Z = X+1$, alors $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P(Z=n) = P(X=n-1) = (1-p)^{n-1}p.$$

Donc Z suit une loi $\mathscr{G}(p)$. En particulier, $X = Z+1$ admet une espérance et une variance et :

$$E(X) = E(Z+1) = E(Z)+1 = \frac{1}{p}+1 \quad \text{et} \quad V(X) = V(Z+1) = V(Z) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Déterminons à présent la loi de Y : $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$ (à l'aide de la FPT avec le SCE $([X=n])$) :

$$P(Y=k) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n,\ Y=k) = \sum_{n=0}^{k} P(X=n,\ Y=k) = (k+1)p^2(1-p)^k.$$

3. A priori, $(Y-X)(\Omega) \subset \mathbb{Z}$. Soit $k \in \mathbb{Z}$, $k<0$. Par la FPT :

$$P(Y-X=k) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n,\ Y-X=k) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n,\ Y=k+n) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,k+n} = 0$$

car $k+n<n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Supposons à présent $k \geq 0$. En reprenant le calcul précédent, on obtient :

$$\begin{aligned} P(Y-X=k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n,\ Y=k+n) \\ &= \lambda\sum_{n=0}^{+\infty}(1-p)^{k+n} = p^2(1-p)^n\frac{1}{1-(1-p)} = p(1-p)^k \end{aligned}$$

On constate que X et $Y-X$ suivent bien la même loi.

4. Pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^*$, on a d'une part que :

$$P(X=n,\ Y-X=k) = P(X=n,\ Y=k+n) = p^2(1-p)^{k+n},$$

et d'autre part :

$$P(X=n)P(Y-X=k) = (1-p)^n p(1-p)^k p = p(1-p)^{k+n}.$$

Ces deux quantités étant égales, X et $Y-X$ sont indépendantes. D'où :

$$0 = \mathrm{Cov}(X, Y-X) = \mathrm{Cov}(X,Y) - \mathrm{Cov}(X,X)$$

par linéarité à droite de la covariance. Ainsi, $\mathrm{Cov}(X,Y) = V(X) = \dfrac{1-p}{p^2} \neq 0$, et X et Y ne sont pas indépendantes.

Exercice 7.17 (★★)

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire deux boules successivement et sans remise dans cette urne. Soit X la variable aléatoire égale au premier numéro obtenu et Y la variable aléatoire égale au deuxième numéro obtenu.

1. Déterminer la loi du couple (X,Y) ainsi que ses lois marginales.
2. Montrer que $E(XY) = \dfrac{(n+1)(3n+2)}{12}$.
3. En déduire la covariance et le cœfficient de corrélation linéaire de X et Y.
4. Exprimer sous forme factorisée la variance $V(X+Y)$.

1. Tout d'abord, $(X,Y)(\Omega) = [\![1,n]\!]^2$. De plus, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$:
   - Si $i=j$, alors $P(X=i, Y=i) = 0$ car les tirages sont effectués sans remise.
   - Si $i \neq j$, alors :

   $$P(X=i, Y=j) = P(X=i)P_{[X=i]}(Y=j) = \frac{1}{n}\frac{1}{n-1}.$$

   car le premier tirage est effectué uniformément sur une urne à n boules numérotés, et le deuxième tirage est aussi uniforme sur une urne à $n-1$ boules numérotés.

   On détermine les lois marginales :

   $$P(X=i) = \sum_{j=1}^{n} P(X=i, Y=j) = \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{1}{n(n-1)} = (n-1)\frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n}.$$

   Donc X suit une loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$. Les calculs pour Y sont identiques. On obtient $Y \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1,n]\!])$.

   Notons tout de suite que X et Y ne sont pas indépendantes puisque :

   $$P(X=i,\ Y=i) = 0 \neq P(X=i)P(Y=i) = \frac{1}{n^2}.$$

2. Par la formule de transfert (les variables sont finies, donc toutes les sommes convergent) :

$$\begin{aligned}
E(XY) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ijP(X=i,Y=j) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n(n-1)} \sum_{\substack{1\leq j\leq n\\ j\neq i}} j \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n(n-1)} \left(\sum_{j=1}^{i-1} j + \sum_{j=i+1}^{n} j \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n(n-1)} \left(\frac{(i-1)i}{2} + \frac{(n+i+1)(n-(i+1)+1)}{2} \right) \\
&= \frac{1}{2n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} i[i(i-1)+(n+i+1)(n-i)] \\
&= \frac{1}{2n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} i[i^2-i+n^2-in+in-i^2+n-i] \\
&= \frac{1}{2n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} i(n^2+n)-2i^2 \\
&= \frac{1}{2n(n-1)} \left(\frac{n^2(n+1)^2}{2} - 2\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) \\
&= \frac{n(n+1)}{2n(n-1)} \left(\frac{3n^2+3n}{6} - \frac{4n+2}{6} \right) \\
&= \frac{(n+1)}{2(n-1)} \frac{3n^2-n-2}{6} = \frac{(n+1)}{n-1} \frac{(n-1)(3n+2)}{12} = \frac{(n+1)(3n+2)}{12}
\end{aligned}$$

3. Par la formule de Huygens :

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY)-E(X)E(Y) = \frac{(n+1)(3n+2)}{12} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{n+1}{12}(3n+2-3n-3) = -\frac{n+1}{12}.$$

Pour le coefficient de corrélation linéaire :

$$\rho_{X,Y} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \frac{-\frac{n+1}{12}}{\frac{n^2-1}{12}} = -\frac{n+1}{n^2-1} = -\frac{1}{n-1}.$$

Remarque. En particulier si $n=2$, alors $\rho_{X,Y}=-1$, et donc on sait par le cours que $X=aY+b$ avec $a<0$. On aurait pu s'y attendre car si $n=2$, alors $X+Y=3$ (on tire nécessairement la boule 1 et la boule 2 dans les deux tirages), et donc $X=3-Y$.

4. Calculons :

$$V(X+Y) = V(X)+V(Y)+2Cov(X,Y) = \frac{n^2-1}{6} - \frac{n+1}{6} = \frac{(n+1)(n-1-1)}{6} = \frac{(n+1)(n-2)}{6}.$$

Exercice 7.18 (★★)

Soient $p \in]0;1[$ et $n > 2$. On considère n joueurs de basket-ball qui tirent chacun deux lancers francs. On considère qu'à chaque lancer, un joueur a une probabilité p de marquer, et que les deux lancers sont indépendants. On note X la variable aléatoire égale au nombre de joueurs ayant marqué leur premier lancer franc, et Z la variable aléatoire égale au nombre de joueurs ayant marqué au moins un lancer franc.

1. Déterminer la loi de X.

2. Montrer que Z suit une loi binomiale, donner son espérance et sa variance.

3. On pose $Y = Z - X$. Que représente la variable aléatoire Y ? Déterminer sa loi.

4. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ? Calculer $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

1. X représente le nombre de succès dans une succession d'épreuves de Bernoulli identiques (réussir ou non son premier lancer franc) et indépendantes (les joueurs lancent de façon indépendante les uns des autres). Elle suit donc une loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$.

2. La probabilité qu'un joueur rate ses deux lancers est $(1-p)^2$ (par indépendance des deux lancers), et donc la probabilité qu'il marque au moins un des deux lancers est $1-(1-p)^2$. On répète encore une fois une épreuve de Bernoulli de manière identique et indépendante, et Z représente le nombre de succès. Ainsi, $Z \hookrightarrow \mathscr{B}(n, 1-(1-p)^2)$, et $E(Z) = n(1-(1-p)^2)$ et $V(Z) = n(1-p)^2(1-(1-p)^2)$.

3. Y représente le nombre de joueurs ayant marqué uniquement leur second lancer franc. Pour chaque joueur, ceci se produit avec probabilité $p(1-p)$. On en déduit comme précédemment que $Y \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p(1-p))$.

4. Les variables X et Y ne sont pas indépendantes, puisque par exemple $P(X = n)P(Y = n) \neq 0$ alors que :
$$P(X = n,\ Y = n) = 0$$
puisqu'on ne peut pas avoir à la fois n joueurs qui réussissent peur premier lancer franc, et n joueurs qui réussissent uniquement leur second lancer franc.

   On connait $V(X+Y) = V(Z) = n(1-(1-p)^2)(1-p)^2$. On peut obtenir la covariance par la formule :
$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X, Y) &= \frac{1}{2}(V(X+Y) - V(X) - V(Y)) \\
&= \frac{n}{2}((1-(1-p)^2)(1-p)^2 - p(1-p) - p(1-p)(1-p(1-p)) \\
&= \frac{n(1-p)}{2}(2p - p^2 - 2p^2 + p^3 - p - p + p^2 - p^3) = -n(1-p)p^2
\end{aligned}$$

   Remarques.

   - On aurait pu commencer par calculer la covariance, constater qu'elle est non nulle, et en déduire que X et Y ne sont pas indépendantes.
   - On a une covariance négative, ce qui s'interprète en terme de variations de X et de Y : quand X augmente, Y a tendance à diminuer, et vice-versa. Cela est conforme à l'intuition : plus le nombre de joueurs marquant leur premier panier est important, plus le nombre joueurs réussissant uniquement le second est faible.

Exercice 7.19 (★★)

On lance n dés équilibrés à 6 faces. On note X le nombre de numéros distincts qui sont sortis lors des n lancers, et pour tout $i \in \{1, \cdots, 6\}$, on note X_i la variable de Bernoulli qui vaut 1 si et seulement si le numéro i est apparu.

1. Déterminer la loi des variables X_i.

2. Déterminer l'espérance de X.

3. Pour tout $(i,j) \in [\![1,6]\!]^2$, déterminer la loi de X_iX_j. En déduire $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$. Les variables aléatoires X_i et X_j sont-elles indépendantes ?
4. Déterminer $V(X)$.

1. X_i est une variable de Bernoulli car elle ne prend que les valeurs 0 et 1. De plus, $[X_i = 0]$ si, et seulement si, tous les dés ont donné un nombre différent de i, ce qui se produit avec probabilité $\left(\frac{5}{6}\right)^n$. Donc X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $P(X_i = 1) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$.
2. Comme $X(\Omega) = [\![1,6]\!]$, X est finie et admet bien une espérance. De plus, remarquons que $X = \sum_{i=1}^{6} X_i$, d'où par linéarité de l'espérance :
$$E(X) = \sum_{i=1}^{6} E(X_i) = \sum_{i=1}^{6} 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n = 6\left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right).$$
3. Si $i = j$, $X_i^2 = X_i$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$, et :
$$\mathrm{Cov}(X_i, X_i) = V(X_i) = \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right) \times \left(\frac{5}{6}\right)^n.$$
Supposons $i \neq j$. Notons que X_iX_j est encore une variable de Bernoulli car elle ne peut prendre que les valeurs 0 et 1. De plus, $X_iX_j = 1$ si, et seulement si, les numéros i et j sont apparus au cours des n lancers. En passant à l'événement contraire, on obtient :
$$\begin{aligned} P(X_iX_j = 0) &= P([X_i = 0] \cup [X_j = 0]) \\ &= P(X_i = 0) + P(X_j = 0) - P([X_i = 0] \cap [X_j = 0]) \\ &= 2\left(\frac{5}{6}\right)^n - \left(\frac{4}{6}\right)^n \end{aligned}$$
car si $[X_i = 0]$ et $[X_j = 0]$ sont réalisés, alors les différents lancers n'ont donné que des faces portant des numéros différents de i et de j, ce qui arrive à chaque lancer avec probabilité $\dfrac{4}{6}$. Ainsi X_iX_j suit une loi de Bernoulli de paramètre $1 - 2\left(\frac{5}{6}\right)^n + \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$. Par la formule de Huygens, on en déduit que la covariance $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$ vaut :
$$\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = E(X_iX_j) - E(X_i)E(X_j) = 1 - 2\left(\frac{5}{6}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{25}{36}\right)^n.$$
En particulier, la covariance $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$ est non nulle dans tous les cas, et donc X_i et X_j ne sont pas indépendantes.

4. Calculons :

$$\begin{aligned}
V(X) = \mathrm{Cov}(X,X) &= \mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{6} X_i, \sum_{j=1}^{6} X_j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{6} \mathrm{Cov}\left(X_i, \sum_{j=1}^{6} X_j\right) \qquad \text{par lin. à gauche} \\
&= \sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6} \mathrm{Cov}\left(X_i, X_j\right) \qquad \text{par lin. à droite} \\
&= \sum_{i=1}^{6}\left(V(X_i) + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{6} \mathrm{Cov}(X_i,X_j)\right) \\
&= 6\left(\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\right)\times\left(\frac{5}{6}\right)^n + 5\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{25}{36}\right)^n\right)
\end{aligned}$$

Formule à retenir.

On connait depuis le collège l'identité remarquable, où $a, b \in \mathbb{R}$:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab.$$

Cette égalité se généralise au cas de trois réels a, b, c :

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc,$$

et par récurrence au cas de n réels $a_1, \ldots, a_n$:

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 = a_1^2 + \cdots + a_n^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} a_i a_j,$$

la somme des doubles produits étant indexée de telle sorte que chaque double produit n'apparait qu'une seule fois dans cette somme.

On peut de manière analogue montrer que l'égalité :

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\mathrm{Cov}(X,Y)$$

se généralise par récurrence au cas de n variables aléatoires discrètes $X_1, X_2, \ldots, X_n$ admettant chacune une variance :

$$V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = V(X_1) + \cdots + V(X_n) + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j).$$

On pouvait appliquer directement cette égalité dans cette question, ce qui aurait un peu simplifié le calcul.

Exercice 7.20 (★★)

On suppose que le nombre de personnes qui se présentent à l'entrée d'un cinéma en une heure est une variable aléatoire X qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Le cinéma comporte $N \geq 3$ caisses, et on suppose que chaque personne choisit au hasard sa caisse parmi les N. Pour $i \in [\![1, N]\!]$, on note X_i le nombre de personnes ayant choisi la caisse numéro i.

1. Déterminer la loi de X_i conditionnellement à l'événement $[X = n]$, puis la loi de X_i.

2. Déterminer, sans nouveaux calculs la loi de $X_1 + X_2$.
3. En déduire la covariance de X_1 et X_2.
4. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire entre X_1 et X.
5. ($\bigstar$) Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

1. La loi de X_i conditionnellement à $[X = n]$ est une loi binomiale $\mathscr{B}(n, \frac{1}{N})$. En effet, chacune des n personnes arrivant au cinéma choisit de façon indépendante et équiprobable l'un des N guichets. Chaque personne a donc une probabilité de $\dfrac{1}{N}$ de choisir la caisse i.

   Remarquons que $X_i(\Omega) = \mathbb{N}$. De plus, par la formule des probabilités totales appliquée avec le SCE $([X = n])_{n\in\mathbb{N}}$, on obtient que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
P(X_i = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X_i = k, X = n) = \sum_{n=k}^{+\infty} P(X_i = k, X = n) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} P(X = n)P_{[X=n]}(X_i = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}\binom{n}{k}(\frac{1}{N})^k(\frac{N-1}{N})^{n-k} \\
&= \frac{e^{-\lambda}}{N^k}\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!}\frac{n!}{k!(n-k)!}(\frac{N-1}{N})^{n-k} = \frac{e^{-\lambda}}{k!N^k}\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{(n-k)!}(\frac{N-1}{N})^{n-k} \\
&= \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!N^k}\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^{n-k}}{(n-k)!}(\frac{N-1}{N})^{n-k} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!N^k}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{(n)!}(\frac{N-1}{N})^{n} \\
&= \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!N^k}e^{\lambda\frac{N-1}{N}} = \frac{(\lambda/N)^k}{k!}e^{-\frac{\lambda}{N}}
\end{aligned}$$

   Ainsi la variable X_i suit une loi de Poisson de paramètre λ/N.

2. En procédant comme précédemment, on montre que la loi de $X_1 + X_2$ sachant $[X = n]$ est une loi $\mathscr{B}(n, 2/N)$, et avec le même calcul, on montre que $X_1 + X_2$ suit une loi $\mathscr{P}(2\lambda/N)$.

   Mise en garde.

   On ne peut pas utiliser la stabilité de la loi de Poisson car on ne sait pas si les variables X_1 et X_2 sont indépendantes ou non.

3. Rappelons que :

$$\text{Cov}(X_1, X_2) = \frac{1}{2}(V(X_1 + X_2) - V(X_1) - V(X_2).$$

   D'où avec les calculs précédents :

$$\text{Cov}(X_1, X_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{2N}{\lambda} - \frac{N}{\lambda} - \frac{N}{\lambda}\right) = 0$$

4. Remarquons que $X = X_1 + \cdots + X_n$. D'où par linéarité à droite de la covariance :

$$Cov(X_1, X) = \sum_{i=1}^{n} \text{Cov}(X_1, X_i) = V(X_1) + \underbrace{\sum_{i=2}^{n} \text{Cov}(X_1, X_i)}_{=0} = V(X_1) = \frac{\lambda}{N}.$$

Ainsi :

$$\rho_{X_1,X} = \frac{\text{Cov}(X_1,X)}{\sigma(X_1)\sigma(X)} = \frac{\lambda/N}{\sqrt{(\lambda/N)\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{N}}.$$

5. La covariance entre X_1 et X_2 est nulle, mais cela n'assure pas que ces variables sont indépendantes, et ne nous dispense donc pas du calcul. Pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, en utilisant que $([X=n], n \in \mathbb{N})$ est un SCE :

$$\begin{aligned} P(X_1 = i, X_2 = j) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n) P_{[X=n]}(X_1 = i, X_2 = j) \\ &= \sum_{n=i+j}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \binom{n}{i} \binom{n-i}{j} \frac{1}{N^i} \frac{1}{N^j} \left(\frac{N-2}{N}\right)^{n-i-j} \end{aligned}$$

car il faut choisir i personnes parmi n prenant la caisse 1, et donc j parmi $n-i$ prenant la caisse 2. Et alors les $n-i-j$ autres personnes choisissent une caisse parmi les $N-2$ autres. D'où :

$$\begin{aligned} P(X_1 = i, X_2 = j) &= \frac{e^{-\lambda}}{N^{i+j}} \sum_{n=i+j}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \frac{n!}{i!(n-i)!} \frac{(n-i)!}{j!(n-i-j)!} \left(1 - \frac{2}{N}\right)^{n-i-j} \\ &= \frac{\lambda^{i+j} e^{-\lambda}}{i! j! N^{i+j}} \sum_{n=i+j}^{+\infty} \frac{\lambda^{n-i-j}}{(n-i-j)!} \left(1 - \frac{2}{N}\right)^{n-i-j} \\ &= \frac{\lambda^{i+j} e^{-\lambda}}{i! j! N^{i+j}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \left(1 - \frac{2}{N}\right)^{n} \\ &= \frac{\lambda^{i+j} e^{-\lambda}}{i! j! N^{i+j}} e^{\lambda - 2\frac{\lambda}{N}} = \frac{(\lambda/N)^i}{i!} e^{-\frac{\lambda}{N}} \frac{(\lambda/N)^j}{j!} e^{-\frac{\lambda}{N}} = P(X=i)P(Y=j) \end{aligned}$$

Ainsi les variables X_1 et X_2 sont bien indépendantes.

Exercice 7.21 (★★★ - QSP HEC 2014)

Soit $\mathscr{E}$ un ensemble de variables aléatoires discrètes centrées définies sur un même espace probabilisé, et admettant une variance.

1. Justifier l'existence de $V_0 = \inf\{V(X),\ X \in \mathscr{E}\}$.
2. On suppose que pour tout $X_1, X_2 \in \mathscr{E}$, $\frac{1}{2}(X_1 + X_2) \in \mathscr{E}$.
   Soient $(X_1, X_2) \in \mathscr{E}^2$ tel que $V(X_1) = V(X_2) = V_0$. Montrer que $X_1 = X_2$ presque sûrement.

1. L'ensemble $\{V(X),\ X \in \mathscr{E}\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ (on suppose que $\mathscr{E}$ est non vide), minorée par 0 (car une variance est toujours positive). Par propriété de la borne inférieure, $V_0 = \inf\{V(X),\ X \in \mathscr{E}\}$ existe bien.

2. Montrons que $X_1 = X_2$. Pour cela, il est équivalent de montrer que $V(X_1 - X_2) = 0$ (car alors $X_1 - X_2$ est égale à une constante c presque sûrement) et $E(X_1 - X_2) = 0$ (car alors $c = 0$).

   Puisque les variables X_1 et X_2 sont centrée, on obtient par linéarité de l'espérance :

   $$E(X_1 - X_2) = E(X_1) - E(X_2) = 0 - 0 = 0.$$

   Calculons :

   $$V(X_1 - X_2) = V(X_1) + V(X_2) - 2\text{Cov}(X_1, X_2) = 2V_0 - 2\text{Cov}(X_1, X_2).$$

D'autre part, exploitons l'hypothèse $\frac{1}{2}(X_1+X_2) \in \mathscr{E}$. Par définition de V_0 :

$$V\left(\frac{1}{2}(X_1+X_2)\right) \geq V_0.$$

Or :

$$V\left(\frac{1}{2}(X_1+X_2)\right) = \frac{1}{4}V(X_1+X_2) = \frac{1}{4}(V(X_1)+V(X_2)+2\mathrm{Cov}(X_1,X_2)) = \frac{1}{2}(V_0+\mathrm{Cov}(X_1,X_2)).$$

D'où en substituant dans l'inégalité ci-dessus :

$$\mathrm{Cov}(X_1,X_2)) \geq V_0.$$

Ainsi :

$$V(X_1-X_2) = 2V_0 - 2\mathrm{Cov}(X_1,X_2) \leq 0,$$

et donc $V(X_1-X_2)=0$.

Exercice 7.22 (★★★★ - Oral HEC 2014)

On lance indéfiniment un dé équilibré et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n le numéro sorti au n-ième tirage.

Les variables aléatoires X_n, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, sont donc supposées indépendantes et de même loi uniforme sur $[\![1,6]\!]$.

Pour tout $i \in [\![1,6]\!]$, on note T_i le temps d'attente de la sortie du numéro i.

1. (a) Donner la loi de T_1 ainsi que son espérance et sa variance.
   (b) Trouver l'espérance des variables aléatoires $\mathrm{Inf}(T_1,T_2)$ et $\mathrm{Sup}(T_1,T_2)$.
2. Justifier l'existence de la covariance de T_1 et de T_2, que l'on notera $\mathrm{Cov}(T_1,T_2)$.
3. (a) Établir, pour tout $i \in [\![2,6]\!]$, la relation : $E(T_1 \mid [X_1=i]) = 7$.
   (b) Montrer que pour tout $i \in [\![3,6]\!]$, on a : $E(T_1T_2 \mid [X_1=i]) = E((1+T_1)(1+T_2))$.
   (c) Calculer $E(T_1T_2)$.
   (d) En déduire $\mathrm{Cov}(T_1,T_2)$ ainsi que le coefficient de corrélation linéaire de T_1 et T_2.
4. (a) Trouver un réel α tel que les variables T_1 et $T_2+\alpha T_1$ soient non corrélées.
   (b) Calculer l'espérance conditionnelle $E(T_2+\alpha T_1 \mid [T_1=1])$.
   (c) Les variables aléatoires T_1 et $T_2+\alpha T_1$ sont-elles indépendantes ?

1. (a) T_1 suit une loi géométrique de paramètre $p=\dfrac{1}{6}$. Elle admet donc une espérance $E(T_1)=\dfrac{1}{p}=6$ et une variance $V(T_1)=\dfrac{1-p}{p^2}=36-6=30$.
   (b) $I=\mathrm{Inf}(T_1,T_2)$ représente le temps d'attente de la sortie du numéro 1 ou du numéro 2. Cette variable suit donc aussi une loi géométrique de paramètre $\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$, et a pour espérance $E(I)=3$.

   D'autre part, en notant $S=\mathrm{Sup}(T_1,T_2)$, on dispose de l'égalité :

   $$T_1+T_2 = I+S \quad \Rightarrow \quad S = T_1+T_2-I.$$

   Comme toutes les variables I, T_1, T_2 admettent une espérance, il en est de même de S par linéarité, et :

   $$E(S) = -E(I)+E(T_1)+E(T_2) = 6+6-3 = 9.$$

2. T_1 et T_2 admettent une variance (puisqu'elles suivent des lois géométriques), donc $\mathrm{Cov}(T_1, T_2)$ existe bien.

3. (a) Soit $i \in [\![2, 6]\!]$. Si $[X_1 = i]$ est réalisé, on a obtenu un numéro différent de 1 au premier tirage. Le temps d'attente pour obtenir le numéro 1 sachant cet évènement réalisé est donc $1+T_1$, c'est-à-dire le temps d'attente pour obtenir le numéro 1 auquel on ajoute le premier lancé qui n'a pas donné le numéro 1. Ainsi, la loi de T_1 sachant $[X_1 = i]$ est égale à la loi de T_1+1. Donc $E(T_1 \mid [X_1 = i])$ existe et vaut $E(T_1+1) = E(T_1)+1 = 7$.

   (b) Soit $i \in [\![2, 6]\!]$. Par le même raisonnement, la loi de T_1 sachant $[X_1 = i]$ est la même que celle de T_1+1, et de même pour T_2. Les espérances en jeux existant bien (puisque l'espérance de T_1T_2 existe), il suit :

$$E(T_1T_2 \mid [X_1 = i]) = E(1 + T_1)(1 + T_2))$$

   (c) Le système $([X_1 = i], i = 1, \ldots, 6)$ est complet, et l'espérance $E(T_1T_2)$ existe. Par la formule de l'espérance totale :

$$\begin{aligned}
E(T_1T_2) &= \sum_{i=1}^{6} E(T_1T_2 \mid [X_1 = i])P(X_1 = i) \\
&= \frac{1}{6}E(T_1T_2 \mid [X_1 = 1]) + \frac{1}{6}E(T_1T_2 \mid [X_1 = 2]) + \frac{1}{6}\sum_{i=3}^{6} E(T_1T_2 \mid [X_1 = i]) \\
&= \frac{1}{6}E(T_2 \mid [X_1 = 1]) + \frac{1}{6}E(T_1 \mid [X_1 = 2]) + \frac{1}{6}\sum_{i=3}^{6} E((1 + T_1)(1 + T_2)) \\
&= \frac{1}{6}(7 + 7 + 4E((1 + T_1)(1 + T_2))) = \frac{1}{6}(14 + 4(1 + E(T_1) + E(T_2) + 4E(T_1T_2)) \\
&= \frac{1}{6}(18 + 8 \times 6 + E(T_1T_2)) = 11 + \frac{2}{3}E(T_1T_2)
\end{aligned}$$

   On obtient $E(T_1T_2) = 33$.

   (d) Par la formule de Huygens, $\mathrm{Cov}(T_1, T_2) = E(T_1T_2) - E(T_1)E(T_2) = 33 - 36 = -3$. D'où :

$$\rho_{T_1,T_2} = \frac{\mathrm{Cov}(T_1, T_2)}{\sigma(T_1)\sigma(T_2)} = \frac{-3}{30} = -\frac{1}{10}.$$

4. (a) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Par linéarité à droite de la covariance :

$$\mathrm{Cov}(T_1, T_2 + \alpha T_1) = \mathrm{Cov}(T_1, T_2) + \alpha V(T_1) = -3 + 30\alpha.$$

   Ainsi $\mathrm{Cov}(T_1, T_2 + \alpha T_1) = 0$ si, et seulement si, $\alpha = \dfrac{1}{10}$.

   (b) Par linéarité de l'espérance (en remarquant que $[T_1 = 1] = [X_1 = 1]$) :

$$\begin{aligned}
E(T_2 + \alpha T_1 \mid [T_1 = 1]) &= E(T_2 + \alpha \mid [T_1 = 1]) = E(T_2 \mid [T_1 = 1]) + \alpha \\
&= E(T_2 \mid [X_1 = 1]) + \alpha = 7 + \frac{1}{10} = \frac{71}{10}
\end{aligned}$$

   (c) Ces deux variables sont non corrélées, mais cela n'implique pas en général leur indépendance.

   Ici, les variables T_1 et $T_2+\alpha T_1$ ne sont pas indépendantes. Pour le remarquer, calculons $E(T_2 + \alpha T_1)$. Par linéarité de l'espérance :

$$E(T_2 + \alpha T_1) = E(T_2) + \alpha E(T_1) = 6 + \frac{6}{10} = \frac{66}{10}.$$

Puisque $E(T_2 + \alpha T_1) \neq E(T_2 + \alpha T_1 \mid [T_1 = 1])$, T_1 et $T_2 + \alpha T_1$ ne sont effectivement pas indépendantes.
