TD6

Applications linéaires

Applications linéaires

Exercice 6.1 (★)

Montrer que les applications suivantes sont linéaires, déterminer une base du noyau et de l'image de chacune d'elles ainsi que leur rang et leur matrice dans les bases canoniques :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2x-y-z, -x+2y+z) \end{array}$$

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+2y, 4x-y, -2x+2y+3z) \end{array}$$

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[x] & \to & \mathbb{R}_3[x] \\ P & \mapsto & P-(x+1)P' \end{array}$$

$$i : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[x] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & P(1) \end{array}$$

$$j : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[x] & \to & \mathbb{R}_2[x] \\ P & \mapsto & P(x+1)-P(x) \end{array}$$

$$k : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM \end{array} \quad \text{avec } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 6.2 (★★ - ✍)

Soient E, F, G des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E,F)$, $g \in \mathscr{L}(F,G)$.
Montrer que $g \circ f = 0_{\mathscr{L}(E,G)} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$.

Exercice 6.3 (★★ - Interpolation de Lagrange - ✍)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ des réels deux à deux distincts. On définit l'application :

$$\varphi : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}^{n+1},\ P \mapsto \varphi(P) = (P(a_0), P(a_1), \ldots, P(a_n)).$$

1. Montrer que φ est linéaire.
2. Montrer que φ est un isomorphisme.
3. En déduire que pour tout $(b_0, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, il existe un unique polynôme $Q \in \mathbb{R}_n[x]$ tel que $\forall i \in \{0, \ldots, n\},\ Q(a_i) = b_i$.
4. (a) Écrire la matrice de φ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_n[x]$ et $\mathbb{R}^{n+1}$.
   (b) En déduire que la *matrice de Vandermonde* $\begin{pmatrix} 1 & a_0 & \ldots & a_0^n \\ 1 & a_1 & \ldots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \ldots & a_n^n \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si les a_i sont deux à deux distincts.
5. Notons $(L_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ la famille des polynômes de Lagrange associés aux réels $(a_0, \ldots, a_n)$.
   (a) Calculer $\varphi(L_i)$.
   (b) Retrouver alors que φ est un isomorphisme, et que $(L_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.

Exercice 6.4 (★★ - Formes linéaires et hyperplans - ✍)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.

1. Montrer que si φ est une forme linéaire non nulle de E, alors $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$ est un hyperplan.
2. Réciproquement, soit H un hyperplan de E.
   (a) Soit $a \notin H$. Montrer que :
   $$E = H \oplus \mathrm{Vect}(a).$$
   Pour tout $x \in E$, il existe donc un unique couple $(y, \lambda_x) \in H \times \mathbb{R}$ tel que :
   $$x = y + \lambda_x a.$$

   (b) On définit l'application $\varphi : E \to \mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \lambda_x$ pour tout $x \in E$. Montrer que φ est une forme linéaire de E.
   (c) Montrer que $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$. Conclure.
3. **Application.** Montrer que $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$ est un hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et que : $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) \oplus \mathrm{Vect}(I_n)$.

Exercice 6.5 (★★★ - Noyaux et images itérés - ✍)

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme non nul. Notons pour tout $k \in \mathbb{N}$, $N_k = \mathrm{Ker}(u^k)$ et $I_k = \mathrm{Im}(u^k)$.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, N_k et I_k sont des sous-espaces vectoriels de E stables par u satisfaisant $N_k \subset N_{k+1}$ et $I_{k+1} \subset I_k$.
2. (a) On suppose qu'il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $N_r = N_{r+1}$. Montrer que pour tout $k \geq r$, $N_r = N_k$.
   (b) En déduire qu'il existe un entier $p \leq n$ tel que $\begin{cases} \forall k \in [\![0, p-1]\!], & N_k \neq N_{k+1} \\ \forall k \geq p, & N_k = N_{k+1} \end{cases}$.
   (c) Montrer qu'on a aussi $\begin{cases} \forall k \in [\![0, p-1]\!], & I_k \neq I_{k+1} \\ \forall k \geq p, & I_k = I_{k+1} \end{cases}$.
3. Montrer que $E = N_p \oplus I_p$, puis que l'endomorphisme induit par u sur N_p est nilpotent et préciser son ordre de nilpotence, et l'endomorphisme induit par u sur I_p est un automorphisme de I_p.

Exercice 6.6 (★★★★ - QSP HEC 2021)

Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice non nulle telle que $A^2 = 0$. Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Rang

Exercice 6.7 (★★)

Soit E, F, G trois espaces vectoriels de dimension finie, et soient $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $g \in \mathscr{L}(F, G)$.

1. Montrer que $\mathrm{rg}(g \circ f) \leq \mathrm{rg}(g)$.
2. Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de $\mathrm{Im}(f)$. Montrer que $(g(e_1), \ldots, g(e_p))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(g \circ f)$. En déduire que $\mathrm{rg}(g \circ f) \leq \mathrm{rg}(f)$.
3. Montrer que $\mathrm{rg}(g \circ f) \leq \min(\mathrm{rg}(g), \mathrm{rg}(f))$.

Exercice 6.8 (★★ - ✍)

Soit E de dimension finie n. On dit qu'un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ est *nilpotent* s'il existe $p \geq 1$ tel que :

$$f^p = 0_{\mathscr{L}(E)} \quad \text{et} \quad f^{p-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}.$$

L'entier p s'appelle alors *l'indice de nilpotence de f*.

On suppose dans la suite que f est un endomorphisme nilpotent d'indice p.

1. (a) f peut-il être bijectif ?
   (b) Justifier qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $f^{p-1}(x_0) \neq 0_E$. Montrer que la famille $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0))$ est libre.
   (c) En déduire que $f^n = 0$.
2. On suppose dans cette question que $p = n$. Déterminer le rang de f.
3. Montrer que $\mathrm{Id}_E - f$ est inversible, et déterminer son inverse.

Exercice 6.9 (★★★★)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer l'équivalence :

$$E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f^2).$$

Projecteurs

Exercice 6.10 (★)

Soit p l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $p((x,y)) = (9x - 12y, 6x - 8y)$.

1. Montrer que p est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(p)$ et de $\mathrm{Im}(p)$. p est-elle injective ? bijective ?
3. Montrer que p est un projecteur.
4. Les sous-espaces $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$?

Exercice 6.11 (★★ - ✍)

1. À l'aide d'un raisonnement par Analyse-Synthèse, montrer que $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.
2. Soit p le projecteur sur $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$, q le projecteur associé. Déterminer $p(M)$ et $q(M)$ en fonction de M et ${}^tM$.

Exercice 6.12 (★★ - ✍)

Soit $A \in \mathbb{R}[x]$ de degré $n \geq 0$. On considère l'application $f : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ qui à P associe R, reste de la division euclidienne de P par A.

1. Rappeler le théorème de division euclidienne dans $\mathbb{R}[x]$.
2. Montrer que f est une application linéaire, et qu'on a :
$$\mathrm{Ker}(f) = \{A \times Q,\ Q \in \mathbb{R}[x]\} \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_{n-1}[x].$$
3. Montrer que f est un projecteur.

Exercice 6.13 (★★★ - Oral ESCP 2019)

Soient deux entiers $n \geq 1$ et $k \geq 2$. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n.
Soient $p_1, p_2, \dots, p_k$ des endomorphismes de E tous non nuls et tels que :
$$p_1 + p_2 + \cdots + p_k = \mathrm{Id}_E \quad \text{et} \quad \mathrm{rg}(p_1) + \mathrm{rg}(p_2) + \cdots + \mathrm{rg}(p_k) \leq n.$$

1. Montrer que $E = \mathrm{Im}(p_1) \oplus \mathrm{Im}(p_2) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Im}(p_k)$.
2. Montrer que pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, l'endomorphisme p_i est un projecteur de E, et que pour tout couple $(i,j) \in [\![1,k]\!]^2$ vérifiant $i \neq j$, on a : $p_i \circ p_j = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
3. Montrer que pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, p_i est le projecteur sur $\mathrm{Im}(p_i)$ parallèlement à $K_i = \bigoplus_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{k} \mathrm{Im}(p_j)$.

Changement de bases

Exercice 6.14 (★)

Considérons la matice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à M.

On considère les vecteurs $f_1 = (1,-1,0)$, $f_2 = (1,1,0)$ et $f_3 = (0,0,1)$.

1. Montrer que $\mathscr{B} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathscr{B}$ et déterminer son inverse.
3. Soit $x = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer les coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$ en fonction de a, b et c.
4. Déterminer la matrice T de u dans la base $\mathscr{B}$.

5. En déduire T^n puis M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6.15 (★★)
Soit φ l'application définie sur $\mathbb{R}_2[x]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}[x]$, qui à un polynôme P associe $\varphi(P) = (x^2-1)P' - 2xP$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$.
2. Déterminer la matrice A de φ dans la base canonique, notée $\mathscr{B}_{can}$.
3. On pose $P_1 = (x+1)^2$, $P_2 = x^2 - 1$, $P_3 = (x-1)^2$. Montrer que $\mathscr{B} = (P_1, P_2, P_3)$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$, puis donner la matrice de passage de la base canonique à $\mathscr{B}$.
4. En déduire la matrice de φ dans la base $\mathscr{B}$.
5. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer la matrice de φ^n dans la base $\mathscr{B}$. En déduire la matrice de φ^n dans la base canonique.

Exercice 6.16 (★★)
On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.
On note $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Montrer que la famille $\mathscr{B}' = (A, B, C, D)$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Pour tout $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on pose $\varphi(M) = AM - MA$.
   (a) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Déterminer la matrice de φ dans la base $\mathscr{B}$ puis dans la base $\mathscr{B}'$.

Exercice 6.17 (★★)
On considère $F = \{(x, y, z) | x + y - z = 0\}$ et $G = \mathrm{Vect}(1, 1, 1)$.

1. (a) Déterminer une base (e_1, e_2) de F et une base (e_3) de G.
   (b) Montrer que $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. En déduire que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
2. On considère p le projecteur sur F parallèlement à G.
   (a) Déterminer la matrice de p dans la base $\mathscr{B}$.
   (b) En déduire la matrice de p dans la base canonique. On pourra pour cela s'aider du logiciel `Python` pour les calculs matriciels.
   (c) Donner $p(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
3. Soit q le projecteur sur G parallèlement à F. Déterminer $q(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 6.18 (★★★)
Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Trace

Exercice 6.19 (★★ - Trace d'un endomorphisme - ✍)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

1. Soit f un endomorphisme de E et soit $\mathscr{B}$ une base de E. Montrer que le scalaire $\mathrm{Tr}(M_{\mathscr{B}}(f))$ est indépendant de la base $\mathscr{B}$ choisie.

   Ce scalaire est appelée la *trace de* f et notée $\mathrm{Tr}(f)$.

2. Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, et considérons l'application $u_A : \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $u_A(M) = AM$.

   (a) Montrer que u_A est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

   (b) Calculer $\mathrm{Tr}(u_A)$.

3. Soit p un projecteur de E. Montrer que $\mathrm{Tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$.

Exercice 6.20 (★★)

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n. On suppose que $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{Tr}(f) = 1$.

1. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que :

$$M_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

2. En déduire que f est un projecteur.

Exercice 6.21 (★★★ - Formes linéaires sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\varphi_A(M) = \mathrm{Tr}(AM)$.
   Montrer que φ_A définit une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

2. On considère l'application $\Phi : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ définie par $\Phi(A) = \varphi_A$.

   (a) Montrer que Φ est linéaire.

   (b) Montrer que Φ est un isomorphisme.
   Indication. On pourra calculer $\varphi_A(E_{i,j})$ où $E_{i,j}$ est la matrice élémentaire d'indice (i,j).

   (c) En déduire que pour toute forme linéaire φ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une unique matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\varphi(M) = \mathrm{Tr}(AM)$ pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

3. Déterminer toutes les formes linéaires φ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ satisfaisant :

$$\forall M, N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \quad \varphi(MN) = \varphi(NM).$$

Polynômes d'endomorphismes

Exercice 6.22 (★)

Déterminer un polynôme annulateur et l'inverse s'il existe des endomorphismes :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & {}^tA + 2A \end{array}.$$

$g : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & \varphi(x)u + x \end{array}$ où E est un espace vectoriel, $u \in E$ et φ est une forme linéaire telle que $\varphi(u) = 1$.

Exercice 6.23 (★★)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $2f^2 - 3f - 9\mathrm{Id}_E = 0$.
On pose alors $u = 2f + 3\mathrm{Id}_E$ et $v = f - 3\mathrm{Id}_E$.

1. Calculer $u - 2v$. En déduire que $E = \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$.
2. Calculer $u \circ v$ et $v \circ u$. En déduire que $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(v)$ et $\mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Ker}(u)$.
3. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Ker}(v)$.
4. (Cubes) En déduire que f est diagonalisable.

Sous-espaces stables

Exercice 6.24 (★)

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $f \circ f = -\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4}$.
2. Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}^4$, le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(u, f(u))$ est stable par f.
3. On pose $e_1 = (1,0,0,0)$, $e_2 = f(e_1)$, $e_3 = (0,1,0,0)$ et $e_4 = f(e_3)$.
   Montrer que $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
4. Déterminer la matrice M' de l'endomorphisme f dans la base $\mathscr{B}$.

Exercice 6.25 (★★★ - QSP HEC 2017)

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, p un projecteur de E et u un endomorphisme de E.
Montrer que p et u commutent si, et seulement si, $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont stables par u.

Exercice 6.26 (★★★ - Caractérisation des homothéties - ✍)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, et soit $f \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que f laisse stable toutes les droites vectorielles.

1. Montrer que $\forall x \neq 0_E,\ \exists! \lambda_x \in \mathbb{R} :\ f(x) = \lambda_x x$.
2. Soient x et y deux vecteurs non nuls de E.
   (a) Montrer que si x et y sont liés, alors $\lambda_x = \lambda_y$.
   (b) Montrer que si (x, y) est une famille libre, alors $\lambda_{x+y} = \lambda_x$. En déduire que $\lambda_x = \lambda_y$.
3. Déduire de ce qui précède que f est une homothétie.

Exercice 6.27 (★★★★)

Montrer que $F = \{f \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))\ :\ \forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ f({}^tA) = {}^tf(A)\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))$ et en déterminer la dimension.
