TD6

# Applications linéaires

## Applications linéaires

### Exercice 6.1 (★)

Montrer que les applications suivantes sont linéaires, déterminer une base du noyau et de l'image de chacune d'elles ainsi que leur rang et leur matrice dans les bases canoniques :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2x-y-z, -x+2y+z) \end{array}$$

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+2y, 4x-y, -2x+2y+3z) \end{array}$$

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[x] & \to & \mathbb{R}_3[x] \\ P & \mapsto & P-(x+1)P' \end{array}$$

$$i : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[x] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & P(1) \end{array}$$

$$j : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[x] & \to & \mathbb{R}_2[x] \\ P & \mapsto & P(x+1)-P(x) \end{array}$$

$$k : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM \end{array} \quad \text{avec } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

---

### Exercice 6.2 (★★ - ✍)

Soient $E, F, G$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E,F)$, $g \in \mathscr{L}(F,G)$.
Montrer que $g \circ f = 0_{\mathscr{L}(E,G)} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$.

> $\Rightarrow$ Supposons que $g \circ f = 0_{\mathscr{L}(E,G)}$. Pour tout $y \in \mathrm{Im}(f)$, montrons que $y \in \mathrm{Ker}(g)$. Comme $y \in \mathrm{Im}(f)$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. On obtient alors :
>
> $$g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x) = 0_G.$$
>
> D'où $y \in \mathrm{Ker}(g)$, et donc l'inclusion $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$.
>
> $\Leftarrow$ Supposons que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$. Pour tout $x \in E$ :
>
> $$g \circ f(x) = g(\underbrace{f(x)}_{\in \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)}) = 0_G.$$
>
> D'où $g \circ f = 0_{\mathscr{L}(E,G)}$.

---

### Exercice 6.3 (★★ - Interpolation de Lagrange - ✍)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ des réels deux à deux distincts. On définit l'application :

$$\varphi : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}^{n+1},\ P \mapsto \varphi(P) = (P(a_0), P(a_1), \ldots, P(a_n)).$$

1. Montrer que $\varphi$ est linéaire.
2. Montrer que $\varphi$ est un isomorphisme.
3. En déduire que pour tout $(b_0, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, il existe un unique polynôme $Q \in \mathbb{R}_n[x]$ tel que $\forall i \in \{0, \ldots, n\},\ Q(a_i) = b_i$.
4. (a) Écrire la matrice de $\varphi$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_n[x]$ et $\mathbb{R}^{n+1}$.

   (b) En déduire que la *matrice de Vandermonde* $\begin{pmatrix} 1 & a_0 & \ldots & a_0^n \\ 1 & a_1 & \ldots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \ldots & a_n^n \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si les $a_i$ sont deux à deux distincts.

5. Notons $(L_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ la famille des polynômes de Lagrange associés aux réels $(a_0,\dots,a_n)$.
   (a) Calculer $\varphi(L_i)$.
   (b) Retrouver alors que $\varphi$ est un isomorphisme, et que $(L_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.

1. Pour tout $P,Q\in\mathbb{R}_n[x]$, pour tout $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda P+\mu Q)&=((\lambda P+\mu Q)(a_0),(\lambda P+\mu Q)(a_1),\dots,(\lambda P+\mu Q)(a_n))\\&=(\lambda P(a_0)+\mu Q(a_0),\lambda P(a_1)+\mu Q(a_1),\dots,\lambda P(a_n)+\mu Q(a_n))\\&=\lambda(P(a_0),P(a_1),\dots,P(a_n))+\mu(Q(a_0),Q(a_1),\dots,Q(a_n))=\lambda\varphi(P)+\mu\varphi(Q).\end{aligned}$$

   Donc $\varphi$ est bien une application linéaire de $\mathbb{R}_n[x]$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$.

2. Montrons l'injectivité. Soit pour cela $P\in\mathbb{R}_n[x]$. Alors :

$$P\in\mathrm{Ker}(\varphi)\Leftrightarrow(P(a_0),\dots,P(a_n))=(0,\dots,0)\Leftrightarrow P(a_0)=P(a_1)=\dots=P(a_n)=0.$$

   Ainsi $P\in\mathrm{Ker}(\varphi)$ si, et seulement si, $a_0,\dots,a_n$ sont racines de $P$. Or $P$ est de degré au plus $n$, et il admet ici $n+1$ racines distinctes. Ceci est réalisé si, et seulement si, $P$ est le polynôme nul. Ainsi, $\mathrm{Ker}(\varphi)=\{0_{\mathbb{R}_n[x]}\}$, et $\varphi$ est injective.
   Comme de plus $\dim(\mathbb{R}^{n+1})=\dim(\mathbb{R}_n[x])=n+1$, $\varphi$ est bien un isomorphisme.

3. $\varphi$ étant un isomorphisme, c'est en particulier une application bijective de $\mathbb{R}_n[x]$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$. Ainsi, tout $(b_0,b_1,\dots,b_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$ admet un unique antécédent $Q\in\mathbb{R}_n[x]$ tel que :

$$\forall i\in[\![0,n]\!],\quad Q(a_i)=b_i.$$

   **Déjà vu ?**
   Nous avions déjà montré l'existence et l'unicité d'un tel polynôme dans le TD0a, Exercice 0.5. Nous étions alors passés par les polynômes de Lagrange $L_0,L_1,\dots,L_n$ en $a_0,a_1,\dots,a_n$, et nous avions alors exprimé $Q$ en fonction des $b_i$ et des $L_i$.

   On ne sera pas étonné à présent que les polynômes de Lagrange fassent d'ailleurs leur apparition dans la suite de cet exercice.

4. (a) Pour tout $0\le k\le n$ :
$$\varphi(x^k)=(a_0^k,a_1^k,\dots,a_n^k).$$
   Ainsi la matrice de $\varphi$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_n[x]$ et $\mathbb{R}^{n+1}$ est :

$$\begin{array}{cc}\begin{array}{ccccc}\varphi(1)&\dots&\varphi(x^j)&\dots&\varphi(x^n)\end{array}&\\ \begin{pmatrix}1&\dots&a_0^j&\dots&a_0^n\\1&\dots&a_1^j&\dots&a_1^n\\\vdots&&\vdots&&\vdots\\1&\dots&a_n^j&\dots&a_n^n\end{pmatrix}&\begin{array}{c}(1,0,0\dots,0)\\(0,1,0,\dots,0)\\\vdots\\(0,0,\dots,0,1)\end{array}\end{array}$$

   (b) On procède par double implication.
   $\Leftarrow$ Si les $a_i$ sont deux à deux distincts, alors $\varphi$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$, de sorte que sa matrice dans les bases canoniques de ces deux espaces est inversible. D'où le résultat.
   $\Rightarrow$ Raisonnons par contraposition, en montrant que s'il existe $1\le i<j\le n$ tels que $a_i=a_j$, alors la matrice de Vandermonde $V$ n'est pas inversible. En effet, on a dans ce cas (en notant $L_0,\dots,L_n$ les lignes de $V$) que $L_i=L_j$, et donc que :
$$\mathrm{rg}(V)=\dim(\mathrm{Vect}(L_0,\dots,L_n))<n+1$$
   car la famille $(L_0,\dots,L_n)$ est liée. Ainsi, $V$ n'est pas inversible.
   D'où l'équivalence voulue.

**Déjà vu ?**

On avait déjà obtenu ce critère d'inversibilité d'une matrice de Vandermonde dans le TD4, Exercice 4.8. On avait alors utilisé la base des polynômes de Lagrange en les $a_i$ (encore eux !).

5. (a) Rappelons que :

$$\forall (i,j) \in [\![0,n]\!]^2, \quad L_i(a_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi :

$$\varphi(L_j) = (L_j(a_0), \dots, L_j(a_j), \dots, L_j(a_n)) = (0, \dots, \underbrace{1}_{\text{position } (j+1)}, \dots 0).$$

(b) Par le calcul précédent, on en déduit que $\mathrm{Im}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{n+1}$ contenant tous les vecteurs $e_j$ de la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$. Ainsi :

$$\mathbb{R}^{n+1} = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{n+1}) \subset \mathrm{Im}(\varphi).$$

D'où $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}^{n+1}$, et $\varphi$ est surjective. Comme de plus $\dim(\mathbb{R}^{n+1}) = \dim(\mathbb{R}_n[x]) = n+1$, on retrouve que $\varphi$ est un isomorphisme.

Comme $\varphi$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$, $\varphi^{-1}$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^{n+1}$ dans $\mathbb{R}_n[x]$. De ce fait, on sait que $\varphi^{-1}$ envoie toute base de $\mathbb{R}^{n+1}$ sur une base de $\mathbb{R}_n[x]$. Ainsi, les polynômes $L_i = \varphi^{-1}(e_{i+1})$ forment une base de $\mathbb{R}_n[x]$.

**Déjà vu ?**

On retrouve ici encore un résultat obtenu au TD4, Exercice 4.8. On avait en effet montré « à la main » que les polynômes de Lagrange forment une base de $\mathbb{R}_n[x]$.

---

## Exercice 6.4 (★★ - Formes linéaires et hyperplans - ✍)

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.

1. Montrer que si $\varphi$ est une forme linéaire non nulle de $E$, alors $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$ est un hyperplan.
2. Réciproquement, soit $H$ un hyperplan de $E$.
   (a) Soit $a \notin H$. Montrer que :
   $$E = H \oplus \mathrm{Vect}(a).$$
   Pour tout $x \in E$, il existe donc un unique couple $(y, \lambda_x) \in H \times \mathbb{K}$ tel que :
   $$x = y + \lambda_x a.$$
   (b) On définit l'application $\varphi : E \to \mathbb{K}$ par $\varphi(x) = \lambda_x$ pour tout $x \in E$. Montrer que $\varphi$ est une forme linéaire de $E$.
   (c) Montrer que $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$. Conclure.
3. **Application.** Montrer que $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$ est un hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et que : $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) \oplus \mathrm{Vect}(I_n)$.

1. $\varphi$ étant une forme linéaire, $\mathrm{Im}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$, non réduit à $\{0\}$ car $\varphi$ est non nulle. Comme $\dim(\mathbb{R}) = 1$, on a donc $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}$. Par le théorème du rang, on en déduit que :
   $$\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = \dim(E) - 1.$$
   Donc $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est bien un hyperplan de $E$.
2. (a) Comme $a \notin H$, on a en particulier que $a \neq 0_E$ et donc que $\dim(\mathrm{Vect}(a)) = 1$. Ainsi on a déjà $\dim(E) = \dim(H) + \dim(\mathrm{Vect}(a))$. Étudions maintenant $H \cap \mathrm{Vect}(a)$, et soit pour cela $u \in H \cap \mathrm{Vect}(a)$. Comme $u \in \mathrm{Vect}(a)$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u = \lambda a$. Si de plus $\lambda \neq 0$, alors

on aurait :
$$a = \frac{1}{\lambda} u \in H \quad \text{car} \quad u \in H \cap \mathrm{Vect}(a).$$
D'où une contradiction. Donc $\lambda = 0$, de sorte que $u = 0_E$ et donc que $H \cap \mathrm{Vect}(a) = \{0_E\}$. On peut donc conclure que :
$$E = H \oplus \mathrm{Vect}(a).$$

(b) $\varphi$ est bien à valeurs dans $\mathbb{K}$. Reste à montrer qu'elle est linéaire. Soit pour cela $x_1, x_2 \in E$ et $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$. Puisque $E = H \oplus \mathrm{Vect}(a)$, il existe $(y_1, \lambda_{x_1})$ et $(y_2, \lambda_{x_2})$ tels que :
$$x_1 = y_1 + \lambda_{x_1} a \quad \text{et} \quad x_2 = y_2 + \lambda_{x_2} a.$$
Par somme, on a :
$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \underbrace{(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)}_{\in H} + \underbrace{(\alpha_1 \lambda_{x_1} + \alpha_2 \lambda_{x_2})}_{\in \mathbb{K}} a.$$
Par unicité de la décomposition dans une somme directe, on en déduit que :
$$\lambda_{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2} = \alpha_1 \lambda_{x_1} + \alpha_2 \lambda_{x_2}$$
ce qui s'écrit aussi :
$$\varphi(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 \lambda_{x_1} + \alpha_2 \lambda_{x_2} = \alpha_1 \varphi(x_1) + \alpha_2 \varphi(x_2).$$
Dons $\varphi$ est bien une forme linéaire.

(c) On procède par double inclusion :
- $\subset$ Soit $x \in H$, on a $x = \underbrace{x}_{\in H} + 0a$. Par unicité de l'écriture dans une somme directe, il suit que $\varphi(x) = \lambda_x = 0$. Ainsi $x$ appartient à $\mathrm{Ker}(\varphi)$.
- $\supset$ Soit $x \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. Il existe un unique couple $(y, \lambda_x) \in H \times \mathbb{K}$ tel que :
$$x = y + \lambda_x a.$$
De plus, $0 = \varphi(x) = \lambda_x$. Donc $x = y$ et appartient bien à $H$.

Ainsi $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$ et $H$ est bien le noyau d'une forme linéaire non nulle.

3. On a vu que Tr est une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, non nulle car par exemple $\mathrm{Tr}(I_n) = n$. D'après ce qu'on a obtenu plus haut, $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$ est un hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. De plus pour $a = I_n \notin \mathrm{Ker}(\varphi)$ et par ce qui a été fait :
$$\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) \oplus \mathrm{Vect}(I_n).$$

Pour plus d'informations sur les formes linéaires et hyperplans, je vous renvoie au :

☞ **Complément de cours 2. Formes linéaires et hyperplans.**

---

**Exercice 6.5 (★★★ - Noyaux et images itérés - ✍)**

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension $n$ et $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme non nul. Notons pour tout $k \in \mathbb{N}$, $N_k = \mathrm{Ker}(u^k)$ et $I_k = \mathrm{Im}(u^k)$.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $N_k$ et $I_k$ sont des sous-espaces vectoriels de $E$ stables par $u$ satisfaisant $N_k \subset N_{k+1}$ et $I_{k+1} \subset I_k$.
2. (a) On suppose qu'il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $N_r = N_{r+1}$. Montrer que pour tout $k \geq r$, $N_r = N_k$.

   (b) En déduire qu'il existe un entier $p \leq n$ tel que $\begin{cases} \forall k \in [\![0, p-1]\!], & N_k \neq N_{k+1} \\ \forall k \geq p, & N_k = N_{k+1} \end{cases}$.

   (c) Montrer qu'on a aussi $\begin{cases} \forall k \in [\![0, p-1]\!], & I_k \neq I_{k+1} \\ \forall k \geq p, & I_k = I_{k+1} \end{cases}$.
3. Montrer que $E = N_p \oplus I_p$, puis que l'endomorphisme induit par $u$ sur $N_p$ est nilpotent et préciser son ordre de nilpotence, et l'endomorphisme induit par $u$ sur $I_p$ est un automorphisme de $I_p$.

1. Vérifions les différents points suivants :

   - $N_k \subset N_{k+1}$. Soit $x \in N_k$, on a $u^k(x) = 0_E$. Alors en composant par $u$ :
   $$u^{k+1}(x) = u(u^k(x)) = u(0_E) = 0_E.$$
   Ainsi on a bien $x \in N_{k+1}$.
   - $I_{k+1} \subset I_k$. Soit $y \in I_{k+1}$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = u^{k+1}(x)$. Mais alors :
   $$y = u^k(u(x)) \in Im(u^k).$$
   Ainsi on a bien $y \in I_k$.
   - $N_k$ est stable par $u$. Pour tout $x \in N_k$, on a :
   $$u^k(u(x)) = u^{k+1}(x) = u(\underbrace{u^k(x)}_{=0_E}) = 0_E.$$
   Ainsi $u(x)$ appartient à $N_k$, et $N_k$ est bien stable par $u$.
   - $I_k$ est stable par $u$. Pour tout $y \in I_k$, il existe $x \in E$ tel que $y = u^k(x)$. On a alors :
   $$u(y) = u^{k+1}(x) = u^k(u(x)) \in I_k.$$
   Ainsi $u(x)$ appartient à $I_k$, et $I_k$ est bien stable par $u$.

   **Autre méthode.** Puisque $u$ et $u^k$ commutent, on sait par le cours que le noyau et l'image de $u^k$ est stable par $u$. Ainsi $N_k = \mathrm{Ker}(u^k)$ et $I_k = \mathrm{Im}(u^k)$ sont stables par $u$.

2. (a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel $k$, $N_p = N_{p+k}$.

   **Init.** La propriété est vraie pour $k = 0$ et $k = 1$ (par hypothèse).

   **Hér.** Soit $k \geq 1$ et supposons la propriété au rang $k$ vraie, c'est à dire $N_p = N_{p+k}$. Puisque :
   $$N_p \subset N_{p+1} \subset \cdots \subset N_{p+k},$$
   on en déduit que $N_p = N_{p+1} = \cdots = N_{p+k}$.
   Par la question précédente, on sait déjà que $N_{p+k} \subset N_{p+k+1}$. Soit à présent $x \in N_{p+k+1}$. Alors :
   $$u^{p+k+1}(x) = 0_E \Rightarrow u^{p+k}(u(x)) = 0_E.$$
   Ainsi $u(x)$ appartient à $\mathrm{Ker}(u^{p+k}) = \mathrm{Ker}(u^{p+k-1})$ et donc :
   $$u^{p+k-1}(u(x)) = 0_E \Rightarrow u^{p+k}(x) = 0_E.$$
   Finalement $x$ appartient à $Ker(u^{p+k})$ et donc $N_{p+k} \supset N_{p+k+1}$. D'où la propriété au rang $k+1$.

   On conclut par principe de récurrence.

   (b) La suite des dimensions $(n_k)$ des $N_k$ est une suite d'entiers naturels croissante d'après 1., et majorée par $n = \dim(E)$. Elle est donc constante à partir d'un certain rang, et il existe $s \in \mathbb{N}$ tel que $n_s = n_{s+1}$. Dès lors, remarquons que :
   $$\begin{cases} n_s = n_{s+1} \\ N_s \subset N_{s+1} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad N_s = N_{s+1}.$$
   Considérons $p$ le plus petit entier tel que $N_p = N_{p+1}$ (un tel entier existe car $A = \{k \in \mathbb{N},\ N_k = N_{k+1}\}$ est une partie non vide (contient $s$) de $\mathbb{N}$). Alors :
   - $\forall k \in [\![0, p-1]\!], \quad N_k \neq N_{k+1}$ par définition de $p$.
   - $\forall k \in \mathbb{N}, \quad k \geq p \Rightarrow N_k = N_{k+1}$ grâce à la question 2.(a).

Enfin, puisque $0 = n_0 < n_1 < \cdots < n_p \leq n$ :

$$n \geq n_p - n_0 = \sum_{k=1}^{p} \underbrace{(n_k - n_{k-1})}_{\geq 1} \geq p.$$

Ainsi, $p \leq n$.

(c) Par le théorème du rang appliqué à $u^k$ :

$$\dim(E) = rg(u^k) + \dim(Ker(u^k)) \quad \Rightarrow \quad n = i_k + n_k,$$

où $i_k = \dim(I_k)$. $(n_k)$ étant une suite d'entiers strictement croissante puis constante à partir du rang $p$, la suite $(i_k)$ est donc strictement décroissante puis constante à partir de ce même rang $q$. En utilisant de plus que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $I_{k+1} \subset I_k$, il suit que :

$$\begin{cases} \forall k \in [\![0, p-1]\!], \quad I_k \neq I_{k+1} \\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad k \geq p \Rightarrow I_k = I_{k+1} \end{cases}.$$

3. On a déjà par le théorème du rang (appliqué à $u^p$) que $\dim(E) = \dim(N_p) + \dim(I_p)$.

Montrons que $N_p \cap I_p = \{0_E\}$. Soit $y \in N_p \cap I_p$. Il existe $x \in E$ tel que $y = u^p(x)$. Alors :

$$u^p(y) = 0_E \quad \Rightarrow \quad u^{2p}(x) = 0_E.$$

Donc $x$ appartient à $\text{Ker}(u^{2p})$, qui est égal à $\text{Ker}(u^p)$ par définition de $p$. On obtient :

$$y = u^p(x) = 0_E.$$

Ainsi $N_p \cap I_p = \{0_E\}$, et on a bien :

$$E = N_p \oplus I_p.$$

On sait déjà que $u$ induit des endomorphismes sur $N_p$ et $I_p$ (car ces s.e.v sont stables par $u$).

Considérons l'endomorphisme $\tilde{u}$ induit par $u$ sur $N_p$. Alors pour tout $x \in N_p$, $\tilde{u}^p(x) = u^p(x) = 0_E$. Ainsi $\tilde{u}$ est un endomorphisme nilpotent. Comme de plus $N_{p-1} \subsetneq N_p$, alors il existe $x \in N_p \setminus N_{p-1}$, et on a $\tilde{u}^{p-1}(x) = u^{p-1}(x) \neq 0_E$. Donc l'indice de nilpotence de $\tilde{u}$ est $p$.

Considérons l'endomorphisme $\bar{u}$ induit par $u$ sur $I_p$. Montrons que $\bar{u}$ est un automorphisme de $I_p$. Comme on est en dimension finie, il suffit de montrer que $\bar{u}$ est injective. Soit donc $x \in I_p$ tel que $\bar{u}(x) = 0_E$. Alors on a :

$$u(x) = 0_E \quad \Rightarrow \quad x \in Ker(u).$$

Ainsi on a $x \in N_1 \cap I_p$. Or on a vu que $N_1 \subset N_p$, donc $x \in N_p \cap I_p = \{0_E\}$. On a donc bien $x = 0_E$, et $\bar{u}$ est bien un automorphisme de $I_p$.

**À retenir. Suite des noyaux et images itérés.**

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme non nul. Il existe un entier $p \in [\![1, n]\!]$ tel que :

$$\text{Ker}(u) \subsetneq \text{Ker}(u^2) \subsetneq \cdots \subsetneq \text{Ker}(u^p) = \text{Ker}(u^{p+1}) = \cdots$$

et

$$\text{Im}(u) \supsetneq \text{Im}(u^2) \supsetneq \cdots \supsetneq \text{Im}(u^p) = \text{Im}(u^{p+1}) = \cdots$$

En d'autres termes, la suite des noyaux itérées (resp. des images itérées) est d'abord strictement croissante (resp. décroissante) puis constante. De plus ces suites stationnent à partir du même rang.

---

**Exercice 6.6 (★★★★ - QSP HEC 2014)**

Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice non nulle telle que $A^2 = 0$. Montrer que $A$ est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Considérons $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{C}$ de $\mathbb{R}^3$ est $A$. Regardons déjà tout ce qu'on peut dire sur $f$. Puisque $A$ est non nulle et que $A^2 = 0$, il suit que :

$$f \neq 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)} \quad \text{et} \quad f^2 = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}.$$

Par l'exercice 6.2, il suit que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$. D'autre part, par le théorème du rang :

$$3 = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)).$$

Or, $f \neq 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$ de sorte que $\dim(\mathrm{Im}(f)) \geq 1$. Comme de plus $\dim(\mathrm{Im}(f)) \leq \dim(\mathrm{Ker}(f))$ (puisque $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$), il suit que :

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2 \quad \text{et} \quad \dim(\mathrm{Im}(f)) = 1.$$

Maintenant qu'on a toutes ces informations, on va chercher une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que :

$$M_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Procédons pour cela par analyse et synthèse.

- **Analyse.** Supposons qu'une telle base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ existe. Par lecture matricielle, il suit que :
$$f(e_1) = f(e_2) = 0_{\mathbb{R}^3} \quad \text{et} \quad f(e_3) = e_1.$$
Ainsi $e_1$ appartient à $\mathrm{Im}(f)$ d'après cette dernière égalité, $e_3$ est un antécédent de $e_1$ par $f$. De plus, $e_1$ et $e_2$ appartiennent à $\mathrm{Ker}(f)$. Puisque $(e_1, e_2)$ est libre (car famille extraite d'une famille libre) de cardinal 2 égal à la dimension, c'est une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

- **Synthèse.** Tentons de construire une telle famille de vecteurs.
  - Puisque $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension 1, considérons $e_1$ une base de $\mathrm{Im}(f)$.
  - Comme $e_1 \in \mathrm{Im}(f)$, il existe $e_3 \in E$ tel que $f(e_3) = e_1$.
  - Puisque $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$, $e_1$ appartient aussi à $\mathrm{Ker}(f)$. Plus précisément, $(e_1)$ est une famille libre de $\mathrm{Ker}(f)$ qui est de dimension 2. On peut donc compléter cette famille en une base $(e_1, e_2)$ de $E$.

  Montrons que la famille $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ ainsi construite répond au problème posé :

  - Montrons que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Elle est de cardinal égal à la dimension de l'espace. Montrons qu'elle est de plus libre. Pour cela, prenons $\alpha, \beta, \gamma$ des réels tels que :
  $$\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = 0_{\mathbb{R}^3}. \qquad (*)$$
  Montrons que $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Composons pour cela $(*)$ par $f$. On obtient (par linéarité de $f$) :
  $$\alpha f(e_1) + \beta f(e_2) + \gamma f(e_3) = 0_{\mathbb{R}^3},$$
  ce qui donne :
  $$\gamma e_1 = 0_{\mathbb{R}^3}.$$
  Puisque $e_1$ est par définition un vecteur non nul, il suit $\gamma = 0$. Reprenons alors $(*)$ :
  $$\alpha e_1 + \beta e_2 = 0_{\mathbb{R}^3}.$$
  Puisque $(e_1, e_2)$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$, c'est en particulier une famille libre de $\mathbb{R}^3$, et donc $\alpha = \beta = 0$.

    Ainsi, $\mathscr{B}$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$.

– Par construction de la famille $\mathscr{B}$, elle satisfait $f(e_1) = f(e_2) = 0_{\mathbb{R}^3}$ et $f(e_3) = e_1$. Il suit que $M_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On peut à présent conclure : les matrices $A$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ représentent le même endomorphisme $f$ dans des bases distinctes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{B}$ respectivement. Elles sont donc semblables.

---

# Rang

**Exercice 6.7 (★★)**

Soit $E, F, G$ trois espaces vectoriels de dimension finie, et soient $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$.

1. Montrer que $\mathrm{rg}(g \circ f) \leq \mathrm{rg}(g)$.
2. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de $\mathrm{Im}(f)$. Montrer que $(g(e_1), \dots, g(e_p))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(g \circ f)$. En déduire que $\mathrm{rg}(g \circ f) \leq \mathrm{rg}(f)$.
3. Montrer que $\mathrm{rg}(g \circ f) \leq \min(\mathrm{rg}(g), \mathrm{rg}(f))$.

1. On a $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$, donc $\dim(\mathrm{Im}(g \circ f)) \leq \dim(\mathrm{Im}(g))$. D'où le résultat.
2. Prenons $y \in \mathrm{Im}(g \circ f)$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = g \circ f(x) = g(f(x))$. Or $f(x) \in \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$, donc il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que :
$$f(x) = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p.$$
On en déduit que :
$$y = g(f(x)) = \lambda g(e_1) + \cdots + \lambda_p g(e_p).$$
Ainsi on a $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Vect}(g(e_1), \dots, g(e_p))$. Montrons l'inclusion réciproque. Pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $e_i$ appartient à $\mathrm{Im}(f)$, donc il existe $x_i \in E$ tel que $e_i = f(x_i)$. On en déduit que :
$$g(e_i) = g(f(x_i)) = g \circ f(x_i) \in \mathrm{Im}(g \circ f).$$
Ceci étant vrai pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, on en déduit que $\mathrm{Vect}(g(e_1), \dots, g(e_p)) \subset \mathrm{Im}(g \circ f)$. D'où l'égalité $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Vect}(g(e_1), \dots, g(e_p))$ et le fait que $(g(e_1), \dots, g(e_p))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(g \circ f)$.

   Enfin, comme $(g(e_1), \dots, g(e_p))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(g \circ f)$, on a :
$$\dim(\mathrm{Im}(g \circ f)) \leq \mathrm{Card}((g(e_1), \dots, g(e_p))) = p = \mathrm{rg}(f).$$
D'où le résultat.
3. À l'aide des questions précédentes, on a donc obtenu que $\mathrm{rg}(g \circ f) \leq \min(\mathrm{rg}(g), \mathrm{rg}(f))$.

---

**Exercice 6.8 (★★ - ✍)**

Soit $E$ de dimension finie $n$. On dit qu'un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ est *nilpotent* s'il existe $p \geq 1$ tel que :
$$f^p = 0_{\mathscr{L}(E)} \quad \text{et} \quad f^{p-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}.$$
L'entier $p$ s'appelle alors *l'indice de nilpotence de $f$*.

On suppose dans la suite que $f$ est un endomorphisme nilpotent d'indice $p$.

1. (a) $f$ peut-il être bijectif ?
   (b) Justifier qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $f^{p-1}(x_0) \neq 0_E$. Montrer que la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ est libre.

(c) En déduire que $f^n = 0$.

2. On suppose dans cette question que $p = n$. Déterminer le rang de $f$.

3. Montrer que $Id_E - f$ est inversible, et déterminer son inverse.

1. (a) Supposons $f$ bijective. Par composition d'applications bijectives, on aurait alors $0_{\mathscr{L}(E)} = f^p$ qui serait bijective. Or ce n'est pas le cas, l'application nulle n'étant pas bijective lorsque $\dim(E) = n > 0$ (ce qu'on supposera dans la suite). Ainsi $\boxed{f \text{ n'est pas bijective}}$.

   (b) Puisque $f^{p-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$, $\boxed{\text{il existe } x_0 \in E \text{ tel que } f^{p-1}(x_0) \neq 0_E}$ (puisque $f^{p-1}$ n'est pas l'application nulle).

   Montrons que la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ est libre. Soit pour cela $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}$ des scalaires tels que :
   $$\lambda_0 x_0 + \lambda_1 f(x_0) + \cdots + \lambda_{p-1} f^{p-1}(x_0) = 0_E.$$
   Montrons que $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_{p-1} = 0$. Composons pour cela cette égalité par $f^{p-1}$, on obtient (par linéarité de $f^{p-1}$) :
   $$\lambda_0 f^{p-1}(x_0) + \underbrace{\lambda_1 f^p(x_0) + \cdots + \lambda_{p-1} f^{2p-2}(x_0)}_{=0_E \text{ car } f^p = 0_{\mathscr{L}(E)}} = 0_E,$$
   ce qu'on peut réécrire simplement donc $\lambda_0 f^{p-1}(x_0) = 0_E$. Puisque $f^{p-1}(x_0) \neq 0_E$, on obtient donc $\lambda_0 = 0$.

   En tenant compte de $\lambda_0 = 0$, on a maintenant :
   $$\lambda_1 f(x_0) + \cdots + \lambda_{p-1} f^{p-1}(x_0) = 0_E.$$
   On procède alors de même que précédemment : on compose cette égalité par $f^{p-2}$ à présent. On obtient l'égalité :
   $$\lambda_1 f^{p-1}(x_0) + 0_E = 0_E.$$
   Puisque $f^{p-1}(x_0) \neq 0_E$, on obtient donc $\lambda_1 = 0$.

   En itérant ce procédé, on obtient de même $\lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_n = 0$. On peut donc conclure que $\boxed{\text{la famille } (x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0)) \text{ est libre}}$.

   (c) La famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ étant libre, son cardinal est inférieur ou égal à la dimension de l'espace, soit $p \leq \dim(E) = n$. On en déduit que l'indice de nilpotence est inférieur à la dimension, et donc que $\boxed{f^n = 0_{\mathscr{L}(E)}}$.

2. On suppose dans cette question que $p = n$. On propose deux méthodes pour obtenir le rang de $f$.

   - **Méthode 1.** On a $f^i(x_0) \in \mathrm{Im}(f)$ pour tout $1 \leq i \leq n-1$. Donc $(f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une famille de $n-1$ vecteurs de $\mathrm{Im}(f)$, libre d'après la question 1.(b). Donc on a $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)) \geq n-1$.

     D'autre part, $f$ n'est pas bijective d'après la question 1.(a), donc $\mathrm{rg}(f) \leq n-1$.

     On peut donc conclure avec ces deux inégalités que $\boxed{\mathrm{rg}(f) = n-1}$.

   - **Méthode 2.** La famille $\mathscr{B} = (x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est libre d'après la question 1.(b), de cardinal $n = \dim(E)$. C'est donc une base de $E$. Écrivons la matrice de $f$ dans cette base, on a :
   $$M_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

En effet pour $0 \leq i \leq n-2$, on a dans la $i$-ème colonne à calculer $f(f^{i-1}(x_0)) = f^i(x_0)$ qui est le $(i+1)$-ème vecteur de la base $\mathscr{B}$. Et pour $i = n-1$, on a $f(f^{n-1}(x_0)) = f^n(x_0) = 0_E$. D'où la matrice donnée ci-dessus. Le calcul de son rang ne pose alors pas de problème, puisque ses $n-1$ premiers vecteurs colonnes sont échelonnés, et le dernier est nul. Ainsi on a $\boxed{\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(M_{\mathscr{B}}(f)) = n-1}$.

3. Rappelons l'identité suivante, valable lorsque deux endomorphismes $f$ et $g$ **commutent** (on avait énoncé une propriété analogue pour des matrices qui commutent) :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad g^p - f^p = (g-f)\left(g^{p-1} + g^{p-2} \circ f + \cdots + g \circ f^{p-2} + f^{p-1}\right).$$

On peut la démontrer en développant le membre de droite (les termes se téléscopent). Ici on obtient pour $p = n$ :

$$\mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_E^n - f^n = (\mathrm{Id}_E - f)\left(\mathrm{Id}_E + f + \cdots + f^{n-1}\right)$$

Ainsi $\boxed{(\mathrm{Id}_E - f) \text{ est bien un inversible et : } \quad (\mathrm{Id}_E - f)^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} f^k}$.

---

## Exercice 6.9 (★★★)

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie, et soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer l'équivalence :

$$E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f^2).$$

Avant de faire cet exercice, rappelons des inclusions qui devraient être connues (suite des noyaux et images itérées) :

$$\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f).$$

Prouvons ces inclusions :

- Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$. Alors $f(x) = 0_E$. D'où en composant par $f$, on obtient $f^2(x) = f(f(x)) = f(0_E) = 0_E$. Donc $x \in \mathrm{Ker}(f^2)$. Ainsi $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$.
- Soit $z \in \mathrm{Im}(f^2)$. Il existe $x \in E$ tel que $z = f^2(x) = f(\underbrace{f(x)}_{\in E}) \in \mathrm{Im}(f)$. Ainsi $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$.

On montre cette équivalence par double implication.

$\Leftarrow$ Supposons que $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f^2)$. Puisque $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$, on en déduit que :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2).$$

Par le théorème du rang :

$$\dim \mathrm{Ker}(f) = \dim(E) - \mathrm{rg}(f) = \dim(E) - \mathrm{rg}(f^2) = \dim \mathrm{Ker}(f^2).$$

Puisque $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$, on en déduit donc $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$.

Montrons à présent la somme direct. On dispose déjà l'égalité des dimensions par le théorème du rang :

$$\dim E = \dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f).$$

Montrons que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_E\}$. Soit $y \in \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f)$. Il existe donc $x \in E$ tel que $y = f(x)$. De plus $y \in \mathrm{Ker}(f)$, donc on a $0_E = f(y) = f(f(x)) = f^2(x)$. Ainsi $x$ appartient à $\mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Ker}(f)$. Donc $y = f(x) = 0_E$.

On peut donc conclure que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

**Remarque.** En utilisant le résultat de l'exercice 6.5, remarquons que la suite des images itérées stationne ici pour $p = 1$. D'après la question 3 de ce même exercice, on peut donc directement conclure que :

$$E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f).$$

$\Rightarrow$ Supposons que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$. Montrons que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$, ce qui impliquera en particulier l'égalité des dimensions. On a déjà une inclusion (qui est toujours vraie) :

$$\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f).$$

Montrons l'inclusion réciproque : soit $z \in \mathrm{Im}(f)$. Il existe $x \in E$ tel que $z = f(x)$. Par hypothèse, il existe $x_1 \in \mathrm{Ker}(f)$ et $x_2 \in \mathrm{Im}(f)$ tel que :

$$x = x_1 + x_2.$$

De plus $x_2 \in \mathrm{Im}(f)$, donc il existe $t \in E$ tel que $x_2 = f(t)$. On obtient finalement :

$$z = f(x) = f(x_1) + f(x_2) = 0_E + f(f(t)) = f^2(t).$$

Ainsi $z \in \mathrm{Im}(f^2)$, et on a bien que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$, et donc que $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f^2)$.

---

# Projecteurs

### Exercice 6.10 (★)

Soit $p$ l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $p(x, y) = (9x - 12y, 6x - 8y)$.

1. Montrer que $p$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(p)$ et de $\mathrm{Im}(p)$. $p$ est-elle injective ? bijective ?
3. Montrer que $p$ est un projecteur.
4. Les sous-espaces $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$ ?

---

### Exercice 6.11 (★★ - ✍)

1. À l'aide d'un raisonnement par Analyse-Synthèse, montrer que $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $p$ le projecteur sur $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$, $q$ le projecteur associé. Déterminer $p(M)$ et $q(M)$ en fonction de $M$ et ${}^tM$.

1. On procède par analyse-synthèse.

**Analyse.** Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Supposons qu'il existe $S$ et $A$ des matrices symétriques et antisymétriques respectivement telles que :

$$M = S + A. \qquad (1)$$

En prenant la transposée dans cette égalité, on obtient :

$${}^tM = {}^tS + {}^tA = S - A. \qquad (2)$$

En faisant $(1) + (2)$ et $(1) - (2)$, on obtient alors :

$$S = \frac{M + {}^tM}{2} \quad \text{et} \quad A = \frac{M - {}^tM}{2}.$$

**Synthèse.** Pour $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on pose alors :

$$S = \frac{M + {}^tM}{2} \quad \text{et} \quad A = \frac{M - {}^tM}{2}.$$

Vérifions les points suivants :

- $M = S + A$ :
$$S + A = \frac{M + {}^tM}{2} + \frac{M - {}^tM}{2} = M.$$
- $S$ est symétrique :
$${}^tS = \frac{{}^tM + ({}^t({}^tM))}{2} = \frac{{}^tM + M}{2} = S.$$

– $A$ est antisymétrique : on procède de même.

Ainsi, on a donc montré que pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, il existe un unique couple $(S, A) \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ tel que :

$$M = S + A,$$

soit en d'autres termes que $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.

2. En reprenant la question précédente, on a donc montré que pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, il existe un unique couple $(S, A) \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ tel que :

$$M = S + A.$$

De plus on a :

$$S = \frac{M + {}^tM}{2} \quad \text{et} \quad A = \frac{M - {}^tM}{2}.$$

Par définition de $p$ et de $q$, on a :

$$p(M) = S = \frac{M + {}^tM}{2} \quad \text{et} \quad q(M) = A = \frac{M - {}^tM}{2}.$$

---

**Exercice 6.12 (★★ - ✍)**

Soit $A \in \mathbb{R}[x]$ de degré $n \geq 0$. On considère l'application $f : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ qui à $P$ associe $R$, reste de la division euclidienne de $P$ par $A$.

1. Rappeler le théorème de division euclidienne dans $\mathbb{K}[x]$.
2. Montrer que $f$ est une application linéaire, et qu'on a :

$$\mathrm{Ker}(f) = \{A \times Q,\ Q \in \mathbb{R}[x]\} \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_{n-1}[x].$$

3. Montrer que $f$ est un projecteur.

Commençons par rappeler le théorème de division euclidienne des polynômes, essentiel ici :

**Rappel. Division euclidienne des polynômes.**

Soient $P, A$ deux polynômes tels que $A \neq 0$. Alors il existe un unique couple $(Q, R)$ de polynômes tel que :

$$\begin{cases} P = AQ + R \\ \deg(R) < \deg(A) \end{cases}$$

$Q$ et $R$ sont appelés le *quotient* et le *reste* de la *division euclidienne* de $A$ par $B$.

Montrons que $f$ est linéaire : soient $P_1, P_2 \in \mathbb{R}[x]$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Par le théorème de division euclidienne, il existe un unique couple $(Q_1, R_1)$ et un unique couple $(Q_2, R_2)$ tels que :

$$P_1 = AQ_1 + R_1 \quad \text{et} \quad P_2 = AQ_2 + R_2$$

avec $\deg(R_1), \deg(R_2) < \deg(A)$. On obtient donc que :

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = A(\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2) + (\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2)$$

avec de plus $\deg(\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2) \leq \max(\deg(R_1), \deg(R_2)) < \deg(A)$. Par unicité du reste dans le théorème de division euclidienne, on en déduit donc que $(\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2)$ est le reste de la division euclidienne de $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2$ par $A$. Ainsi on a :

$$f(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) = \lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2 = \lambda_1 f(P_1) + \lambda_2 f(P_2).$$

Ainsi on a bien montré que $f$ est linéaire. Montrons à présent que $f$ est un projecteur. Soit $P \in \mathbb{R}[x]$. Par le théorème de division euclidienne, il existe un unique couple $(Q, R)$ tel que :

$$P = AQ + R \quad \text{avec} \quad \deg(R) < \deg(A).$$

Faisons à présent la division euclidienne de $R$ par $A$. On a :

$$R = A \times 0 + R \quad \text{avec} \quad \deg(R) < \deg(A)$$

Donc le quotient est 0 et le reste est $R$ pour la division euclidienne de $R$ par $A$. On peut donc conclure que :

$$f \circ f(P) = f(f(P)) = f(R) = R = f(P).$$

Ceci étant vrai quelque soit $P$, on en déduit que $f \circ f = f$, et donc que $f$ est un projecteur, sur $\text{Im}(f)$ parallèlement par $\text{Ker}(f)$.

Déterminons $\text{Ker}(f)$ : soit $P \in \mathbb{R}[x]$. On a :

$$P \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow f(P) = 0 \Leftrightarrow \exists Q \in \mathbb{R}[x], P = AQ \Leftrightarrow A \text{ divise } P$$

Ainsi $\text{Ker}(f) = \{P \in \mathbb{R}[x] \mid A \text{ divise } P\}$.

Déterminons $\text{Im}(f)$ : pour tout $P \in \mathbb{R}[x]$, $f(P)$ est le reste de la division euclidienne de $P$ par $A$, et est donc de degré $< \deg(A) =: a$. Réciproquement si $\deg(P) < a$, alors on a :

$$P = A \times 0 + P \quad \text{avec} \quad \deg(P) < \deg(A).$$

Ainsi $P = f(P) \in \text{Im}(f)$. On a donc montré que $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_{a-1}[x]$.

Une conséquence de cet exercice est qu'on a la somme directe :

$$\mathbb{R}[x] = \mathbb{R}_{a-1}[x] \oplus \{P \in \mathbb{R}[x] \mid A \text{ divise } P\}.$$

---

**Exercice 6.13 (★★★ - Oral ESCP 2019)**
Soient deux entiers $n \geq 1$ et $k \geq 2$. Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n$.
Soient $p_1, p_2, \ldots, p_k$ des endomorphismes de $E$ tous non nuls et tels que :

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_k = \text{Id}_E \quad \text{et} \quad \text{rg}(p_1) + \text{rg}(p_2) + \cdots + \text{rg}(p_k) \leq n.$$

1. Montrer que $E = \text{Im}(p_1) \oplus \text{Im}(p_2) \oplus \cdots \oplus \text{Im}(p_k)$.
2. Montrer que pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, l'endomorphisme $p_i$ est un projecteur de $E$, et que pour tout couple $(i, j) \in [\![1, k]\!]^2$ vérifiant $i \neq j$, on a : $\quad p_i \circ p_j = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
3. Montrer que pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, $p_i$ est le projecteur sur $\text{Im}(p_i)$ parallèlement à $K_i = \displaystyle\bigoplus_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} \text{Im}(p_j)$.

---

## Changement de bases

**Exercice 6.14 (★)**
Considérons la matice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et $u$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $M$.
On considère les vecteurs $f_1 = (1, -1, 0)$, $f_2 = (1, 1, 0)$ et $f_3 = (0, 0, 1)$.

1. Montrer que $\mathscr{B} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathscr{B}$ et déterminer son inverse.
3. Soit $x = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer les coordonnées de $x$ dans la base $\mathscr{B}$ en fonction de $a$, $b$ et $c$.
4. Déterminer la matrice $T$ de $u$ dans la base $\mathscr{B}$.
5. En déduire $T^n$ puis $M^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. On montre que la famille $\mathscr{B}$ est libre (...). Comme elle est de plus de cardinal $3 = \dim(\mathbb{R}^3)$, c'est bien une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Notons $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et $P$ la matrice de passage de la base $\mathscr{C}$ à la base $\mathscr{B}$. On a (par définition de la matrice de passage entre deux bases) :
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
On calcule son inverse par la méthode de Gauss (...). On obtient :
$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Soit $x = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On a donc par définition que $X = M_{\mathscr{C}}(x) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Notons $X' = M_{\mathscr{B}}(x)$.
Par le cours, on a la formule de changement de bases :
$$X = PX' \quad \Rightarrow \quad X' = P^{-1}X.$$
On obtient donc $X' = \begin{pmatrix} (a-b)/2 \\ (a+b)/2 \\ c \end{pmatrix}$. Ce résultat ne sera pas utile pour la suite.

4. Par la formule de changement de bases, on a :
$$T = P^{-1}MP.$$
On obtient après calculs (...) que $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. On a $T = D + N$ où $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On vérifie que $D$ et $N$ **commutent** (ce qui permet d'appliquer le binôme de Newton). On obtient que $T^0 = I_3$, $T^1 = T$ et pour tout $n \geq 2$ :
$$T^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Il reste alors à calculer (...) :
$$M^n = (PTP^{-1})^n = PT^nP^{-1}.$$

---

### Exercice 6.15 (★★)

Soit $\varphi$ l'application définie sur $\mathbb{R}_2[x]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}[x]$, qui à un polynôme $P$ associe $\varphi(P) = (x^2-1)P' - 2xP$.

1. Montrer que $\varphi$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$.
2. Déterminer la matrice $A$ de $\varphi$ dans la base canonique, notée $\mathscr{B}_{can}$.
3. On pose $P_1 = (x+1)^2$, $P_2 = x^2 - 1$, $P_3 = (x-1)^2$. Montrer que $\mathscr{B} = (P_1, P_2, P_3)$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$, puis donner la matrice de passage de la base canonique à $\mathscr{B}$.
4. En déduire la matrice de $\varphi$ dans la base $\mathscr{B}$.
5. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer la matrice de $\varphi^n$ dans la base $\mathscr{B}$. En déduire la matrice de $\varphi^n$ dans la base canonique.

1. On vérifie que $\varphi$ est linéaire (...) et que pour tout $P \in \mathbb{R}_2[x]$, $\varphi(P)$ appartient à $\mathbb{R}_2[x]$.
2. On calcule $\varphi(x^k)$ pour $k = 0, 1, 2$, afin d'obtenir $A$ :
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$
3. On montre que la famille $\mathscr{B}$ est libre "à la main" (...). Comme elle est de plus de cardinal $3 = \dim(\mathbb{R}_2[x]$, c'est bien une base de $\mathbb{R}_2[x]$. Notons $P$ la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathscr{B}$. On a :
$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
4. Notons $A'$ la matrice de $\varphi$ dans la base $\mathscr{B}$. On peut pour déterminer $A'$ utiliser deux méthodes.
   - **Méthode 1. Par formule de changement de bases.** On a :
   $$A' = P^{-1}AP.$$
   Il faut alors inverser $P$ par la méthode de Gauss, puis faire le produit matriciel. On trouve après calculs :
   $$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & -1/4 & 1/4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
   - **Méthode 2. Calcul direct.** On vérifie par le calcul que $\varphi(P_1) = -2P_1$, $\varphi(P_2) = 0$ et $\varphi(P_3) = 2P_3$. On obtient alors, par définition de la matrice de $\varphi$ dans la base $\mathscr{B}$, que :
   $$A' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
   Cette méthode a le mérite d'être moins calculatoire.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$M_{\mathscr{B}}(\varphi^n) = (A')^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$
Par formule de changement de bases, on a :
$$M_{\mathscr{B}_{can}}(\varphi^n) = A^n = (PA'P^{-1})^n = P(A')^nP^{-1}.$$
Il reste alors à calculer $P^{-1}$ par la méthode de Gauss (si on ne l'a pas encore fait), puis à faire le produit matriciel...

---

**Exercice 6.16 (★★)**
On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.
On note $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Montrer que la famille $\mathscr{B}' = (A, B, C, D)$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Pour tout $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on pose $\varphi(M) = AM - MA$.
   (a) Montrer que $\varphi$ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Déterminer la matrice de $\varphi$ dans la base $\mathscr{B}$ puis dans la base $\mathscr{B}'$.

1. Notons $\mathscr{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, et écrivons la matrice $M_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$.

$$M_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est triangulaire supérieure, et ses coefficients sur la diagonale sont tous non nuls. Donc $M_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$ est inversible, et $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

2. (a) Pour tout $M, N \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda M + \mu N) &= A(\lambda M + \mu N) - (\lambda M + \mu N)A = \lambda AM + \mu AN - \lambda MA - \mu NA \\ &= \lambda(AM - MA) + \mu(AN - NA) = \lambda\varphi(M) + \mu\varphi(N). \end{aligned}$$

Donc $\varphi$ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

(b) Calculons :

$$\varphi(E_{1,1}) = 0_2, \quad \varphi(E_{1,2}) = E_{1,2}, \quad \varphi(E_{2,1}) = -E_{2,1}, \quad \varphi(E_{2,2}) = 0_2.$$

On a donc :

$$M_{\mathscr{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour la matrice $M_{\mathscr{B}'}(\varphi)$, on peut procéder de deux manières différentes.

**Méthode 1. Formule de changement de bases.**
On a :

$$P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = M_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Par formule de changement de bases, on a :

$$M_{\mathscr{B}'}(\varphi) = P^{-1} M_{\mathscr{B}}(\varphi) P.$$

Il faudrait alors faire la méthode du miroir pour calculer $P^{-1}$, puis faire ce produit matriciel. On trouve après calcul :

$$M_{\mathscr{B}'}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Méthode 2. Méthode directe.**
On a après calcul :

$$\varphi(A) = 0_2, \quad \varphi(B) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = B - A, \quad \varphi(C) = \varphi(D) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = -C + 2B - A.$$

On en déduit que :

$$M_{\mathscr{B}'}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

---

**Exercice 6.17 (★★)**
On considère $F = \{(x, y, z) | x + y - z = 0\}$ et $G = Vect(1, 1, 1)$.

1. (a) Déterminer une base $(e_1, e_2)$ de $F$ et une base $(e_3)$ de $G$.
   (b) Montrer que $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. En déduire que $F$ et $G$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
2. On considère $p$ le projecteur sur $F$ parallèlement à $G$.
   (a) Déterminer la matrice de $p$ dans la base $\mathscr{B}$.
   (b) En déduire la matrice de $p$ dans la base canonique. On pourra pour cela s'aider du logiciel `Python` pour les calculs matriciels.
   (c) Donner $p(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
3. Soit $q$ le projecteur sur $G$ parallèlement à $F$. Déterminer $q(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

1. (a) Je vous laisse vérifier que les vecteurs $e_1 = (1, 0, 1)$ et $e_2 = (0, 1, 1)$ forment une base de $F$, et que le vecteur $e_3 = (1, 1, 1)$ forme une base de $G$.
   (b) On vérifie que la famille $\mathscr{B}$ est libre en revenant à la définition. Elle est de plus de cardinal $3 = \dim(\mathbb{R}^3)$. C'est donc une base de $\mathbb{R}^3$. Par théorème de concaténation des bases, on peut affirmer que $F$ et $G$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
2. (a) Soit $p$ le projecteur sur $F$ parallèlement à $G$. Puisque $G = \mathrm{Ker}(p)$ et $F = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id})$, on a :

$$p(e_1) = e_1, \quad p(e_2) = e_2, \quad p(e_3) = e_3.$$

   En particulier, on a :

$$M_{\mathscr{B}}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (b) Notons $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et $P$ la matrice de passage de $\mathscr{C}$ à $\mathscr{B}$. Par formule de changement de bases, on a :

$$M_{\mathscr{B}}(p) = P^{-1} M_{\mathscr{C}}(p) P \quad \Rightarrow \quad M_{\mathscr{C}}(p) = P M_{\mathscr{B}}(p) P^{-1}.$$

   On a :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Utilisons `Python` pour éviter les calculs :

```
>>> import numpy as np
>>> import numpy.linalg as al
>>> P = np.array([[1,0,1],[0,1,1],[1,1,1]])
>>> Q = al.inv(P); Q
array([[ 0., -1.,  1.],
       [-1.,  0.,  1.],
       [ 1.,  1., -1.]])
>>> B = np.array([[1,0,0],[0,1,0],[0,0,0]])
>>> A = np.dot(np.dot(P,B),Q); A
array([[ 0., -1.,  1.],
       [-1.,  0.,  1.],
       [-1., -1.,  2.]])
```

   Ainsi, on a $M_{\mathscr{C}}(p) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

   (c) Si on note $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on a par lecture matricielle :

$$p(\varepsilon_1) = 0\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 = (0, -1, -1),$$

$$p(\varepsilon_2) = -1\varepsilon_1 + 0\varepsilon_2 - \varepsilon_3 = (-1, 0, -1),$$

$$p(\varepsilon_3) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 2\varepsilon_3 = (1, 1, 2).$$

Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$\begin{aligned} p(x, y, z) &= p(x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2 + z\varepsilon_3) = xp(\varepsilon_1) + yp(\varepsilon_2) + zp(\varepsilon_3) \\ &= x(-1, 0, -1) + y(0, -1, -1) + z(1, 1, 2) = (-x + z, -y + z, -x - y + 2z). \end{aligned}$$

3. Notons $q$ le projecteur sur $G$ parallèlement à $F$. Commençons par un rappel.

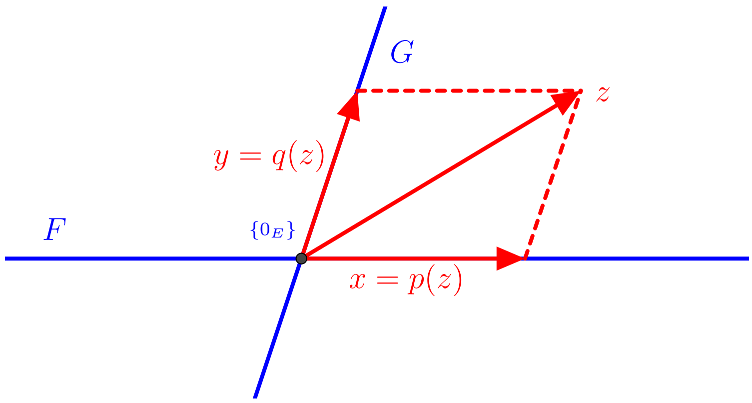
**Rappel. Projecteurs associés.**
Si $p$ est le projecteur sur $F$ parallèlement à $G$, alors $q = \mathrm{Id}_E - p$ est le projecteur sur $G$ parallèlement à $F$. En effet, pour tout $z \in E$, il existe un unique couple $(x, y) \in F \times G$ tel que $z = x + y$, et on a :

$$q(z) = z - p(z) = x + y - x = y.$$

On a ainsi les relations :

$$p + q = \mathrm{Id}_E \quad \text{et} \quad p \circ q = q \circ p = 0_{\mathscr{L}(E)}.$$

On dit que $p$ et $q$ sont les *projecteurs associés à la décomposition* $E = F \oplus G$.




*Projecteurs associés à la décomposition* $E = F \oplus G$.

Ici, on a donc que $q = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} - p$, de sorte que pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$q(x, y, z) = (x, y, z) - (-x + z, -y + z, -x - y + 2z) = (2x - z, 2y - z, x + y - z).$$

---

**Exercice 6.18 (★★★)**
Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Soit $\varphi : X \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \mapsto AX \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ l'endomorphisme canoniquement associé à $A$. Rappelons que si $\mathscr{C} = (e_1, e_2)$ désigne la base canonique de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, on a (c'est du cours) :

$$M_{\mathscr{C}}(\varphi) = A.$$

On va montrer que $B$ est la matrice de $\varphi$ dans une autre base. Pour cela, on va commencer par analyser le problème pour savoir comment trouver cette base.

**Analyse du problème.** On cherche donc une base $\mathscr{B} = (f_1, f_2)$ telle que :

$$M_{\mathscr{B}}(\varphi) = B,$$

ce qui correspond à chercher des vecteurs $f_1$ et $f_2$ formant une famille libre et satisfaisant :

$$\varphi(f_1) = f_1 \quad \text{et} \quad \varphi(f_2) = 3f_2.$$

**Recherche de la famille** $(f_1, f_2)$**.** Soit donc $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. On a :

$$AX = X \Leftrightarrow x + y = 0$$

Ainsi $\mathrm{Ker}(A - I_2) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ et on prendra par exemple $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. De même, on a :

$$AX = 3X \Leftrightarrow x - y = 0$$

Ainsi $\mathrm{Ker}(A - 3I_2) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et on prendra par exemple $f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

**Vérifications.** Reste à montrer que la famille $\mathscr{B} = (f_1, f_2)$ est une base de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Elle est de cardinal $2 = \dim(\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}))$ et libre car formée de deux vecteurs non colinéaires. C'est donc bien une base. Et on a en remontant les calculs précédents que $\varphi(f_1) = f_1$ et $\varphi(f_2) = 3f_2$. Ainsi on a bien établi que :

$$M_{\mathscr{B}}(\varphi) = B.$$

Les matrices $A$ et $B$ sont donc bien semblables puisqu'elles représentent le même endomorphisme dans des bases distinctes.

---

# Trace

### Exercice 6.19 (★★ - Trace d'un endomorphisme - )

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie.

1. Soit $f$ un endomorphisme de $E$ et soit $\mathscr{B}$ une base de $E$. Montrer que le scalaire $\mathrm{Tr}(M_{\mathscr{B}}(f))$ est indépendant de la base $\mathscr{B}$ choisie.

   Ce scalaire est appelée la *trace de* $f$ et notée $\mathrm{Tr}(f)$.

2. Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, et considérons l'application $u_A : \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $u_A(M) = AM$.
   (a) Montrer que $u_A$ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Calculer $\mathrm{Tr}(u_A)$.

3. Soit $p$ un projecteur de $E$. Montrer que $\mathrm{Tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$.

---

### Exercice 6.20 (★★)

Soit $f$ un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension $n$. On suppose que $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{Tr}(f) = 1$.

1. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de $E$ telle que :

$$M_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

2. En déduire que $f$ est un projecteur.

1. **Analyse du problème.** On cherche une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ telle que :

$$f(e_1) = a_1 e_1, \dots, f(e_n) = a_n e_1.$$

   Puisque $f$ est de rang 1, l'un des $a_i$ est non nul et donc $e_1$ appartiendrait à $Im(f)$ qui est de dimension 1. Ainsi il faudra prendre $e_1$ une base de $Im(f)$, et on n'a pas de contrainte pour $e_2, \dots, e_n$.

   **Construction de la base.** Prenons donc $e_1$ une base de $\mathrm{Im}(f)$. On la complète en une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de $E$. Pour tout $1 \leq i \leq n$, $f(e_i)$ appartient à $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(e_1)$, donc il existe

$a_i \in \mathbb{R}$ tel que :

$$f(e_i) = a_i e_1.$$

On peut donc écrire la matrice de $f$ dans la base $\mathscr{B}$ :

$$M = M_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

2. On a :

$$M^2 = \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & \dots & a_1a_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

De plus on sait que $1 = \mathrm{Tr}(f) = \mathrm{Tr}(M) = a_1$. Donc on obtient :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & a_2 & \dots & a_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = M.$$

Ainsi $f$ est bien un projecteur.

---

### Exercice 6.21 (★★★ - Formes linéaires sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\varphi_A(M) = \mathrm{Tr}(AM)$.
   Montrer que $\varphi_A$ définit une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. On considère l'application $\Phi : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ définie par $\Phi(A) = \varphi_A$.
   (a) Montrer que $\Phi$ est linéaire.
   (b) Montrer que $\Phi$ est un isomorphisme.
   *Indication. On pourra calculer $\varphi_A(E_{i,j})$ où $E_{i,j}$ est la matrice élémentaire d'indice $(i,j)$.*
   (c) En déduire que pour toute forme linéaire $\varphi$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une unique matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\varphi(M) = \mathrm{Tr}(AM)$ pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Déterminer toutes les formes linéaires $\varphi$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ satisfaisant :

$$\forall M, N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \quad \varphi(MN) = \varphi(NM).$$

1. $\varphi_A$ est clairement à valeurs dans $\mathbb{R}$. De plus on a pour tout $M, N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ :

$$\varphi_A(\lambda M + \mu N) = \mathrm{Tr}(A(\lambda M + \mu N) = \mathrm{Tr}(\lambda AM + \mu AN) = \lambda \mathrm{Tr}(AM) + \mu \mathrm{Tr}(AN) = \lambda\varphi_A(M) + \mu\varphi_A(N).$$

   Donc $\varphi_A$ est bien une forme linéaire.

2. (a) Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, montrons que :

$$\Phi(\lambda A + \mu B) = \lambda\Phi(A) + \mu\Phi(B)$$

   soit en d'autres termes :

$$\varphi_{\lambda A + \mu B} = \lambda\varphi_A + \mu\varphi_B.$$

   Soit pour cela $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned} \varphi_{\lambda A+\mu B}(M) &= \mathrm{Tr}((\lambda A + \mu B)(M)) = \mathrm{Tr}(\lambda AM + \mu BM) \\ &= \lambda \mathrm{Tr}(AM) + \mu \mathrm{Tr}(BM) = \lambda\varphi_A(M) + \mu\varphi_B(M) \end{aligned}$$

   D'où l'égalité. Donc $\Phi$ est bien linéaire.

(b) Montrons que $\Phi$ est injective. Soit pour cela $A \in \text{Ker}(\Phi)$, on a :

$$\Phi(A) = \varphi_A = 0_{\mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\mathbb{R})}.$$

Ainsi pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\varphi_A(M) = 0, \text{ soit encore } \text{Tr}(AM) = 0.$$

Prenons alors $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ et calculons $\text{Tr}(AE_{i,j})$. Si on note $C_k$ la $k$-ème colonne de $A$, on a :

$$AE_{i,j} = (0 \dots 0 \underbrace{C_i}_{\text{colonne } j} 0 \dots 0)$$

Il y a un seul coefficient non nul sur la diagonale de $AE_{i,j}$ qui est celui de la $j$-ème ligne de $C_i$, soit $a_{j,i}$. Ainsi on a $\text{Tr}(AE_{i,j}) = a_{j,i}$. On peut donc conclure que si $A \in \text{Ker}(\Phi)$, alors $a_{j,i} = 0$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. D'où $A = 0$, et $\Phi$ injective. Comme de plus $\dim(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})) = \dim(\mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\mathbb{R}))$, on en déduit que $\Phi$ est un isomorphisme.

(c) Ainsi tout forme linéaire $\varphi$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ admet un unique antécédent par $\Phi$ : il existe donc une unique matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\Phi(A) = \varphi$, soit encore $\varphi(M) = \text{Tr}(AM)$ pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

3. Soit $\varphi$ une telle forme linéaire. D'après les question précédentes, on sait qu'il existe une unique matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \quad \varphi(M) = \text{Tr}(AM).$$

On suppose de plus que pour tout $X, Y \in \mathscr{M}(\mathbb{K})$, $\varphi(XY) = \varphi(YX)$, ce qui donne :

$$\text{Tr}(AMN) = \text{Tr}(ANM).$$

Prenons en particulier $M = E_{i,j}$ et $N = E_{k,l}$. Rappelons que :

$$E_{i,j} \times E_{k,l} = \delta_{j,k} E_{i,l} \text{ où } \delta_{j,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a :

$$\text{Tr}(AE_{i,j}E_{k,l}) = \delta_{j,k}\text{Tr}(AE_{i,l}) = \delta_{j,k} a_{l,i}$$

selon un calcul déjà effectué dans les questions précédentes. De même,

$$\text{Tr}(AE_{k,l}E_{i,j}) = \delta_{l,i} a_{j,k}$$

Ainsi pour tout $1 \leq i,j,k,l \leq n$ :

$$\delta_{j,k} a_{l,i} = \delta_{l,i} a_{j,k}.$$

En particulier :

- pour tout $l \neq i$ et en prenant $j = k$, on obtient $a_{l,i} = 0$. Donc $A$ est une matrice diagonale.
- pour $i = l$ et $k = j$, on obtient $a_{i,i} = a_{j,j}$. Donc tous les coefficients diagonaux sont égaux.

Ainsi $A$ est une matrice scalaire, et il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A = \lambda I_n$. On peut donc conclure que pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ :

$$\varphi(M) = \text{Tr}(AM) = \lambda \text{Tr}(M).$$

---

# Polynômes d'endomorphismes

**Exercice 6.22 (★)**

Déterminer un polynôme annulateur et l'inverse s'il existe des endomorphismes :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & {}^tA + 2A \end{array}.$$

$$g: \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & \varphi(x)u + x \end{array}$$ où $E$ est un espace vectoriel, $u \in E$ et $\varphi$ est une forme linéaire telle que $\varphi(u) = 1$.

---

### Exercice 6.23 (★★)

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $2f^2 - 3f - 9\mathrm{Id}_E = 0$.
On pose alors $u = 2f + 3\mathrm{Id}_E$ et $v = f - 3\mathrm{Id}_E$.

1. Calculer $u - 2v$. En déduire que $E = \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$.
2. Calculer $u \circ v$ et $v \circ u$. En déduire que $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(v)$ et $\mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Ker}(u)$.
3. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Ker}(v)$.
4. (Cubes) En déduire que $f$ est diagonalisable.

1. On a :
$$u - 2v = 2f + 3\mathrm{Id}_E - 2(f - 3\mathrm{Id}_E) = 9\mathrm{Id}_E.$$
Ainsi pour tout $x \in E$, on a :
$$u(x) - 2v(x) = 9x, \text{ soit } x = \underbrace{\frac{1}{9}u(x)}_{\in \mathrm{Im}(u)} + \underbrace{\frac{-2}{9}v(x)}_{\in \mathrm{Im}(v)}.$$
Ainsi on a $E = \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$.
2. On a :
$$u \circ v = (2f + 3\mathrm{Id}_E) \circ (f - 3\mathrm{Id}_E) = 2f^2 - 3f - 9\mathrm{Id}_E = 0_{\mathscr{L}(E)}.$$
Par l'exercice 2, on en déduit que $\mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Ker}(u)$. De même, on a puisque $u$ et $v$ commutent (ce sont tous les deux des polynômes en $f$) :
$$v \circ u = u \circ v = 0_{\mathscr{L}(E)}.$$
Ainsi on a également $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(v)$.
3. Puisque $\mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(v)$, on a $E = \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Ker}(v) \subset E$. Ainsi on a $E = \mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Ker}(v)$. Reste à montrer que cette somme est directe : soit pour cela $x \in \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(v)$, on a :
$$u(x) = 0_E \quad \Rightarrow \quad 2f(x) + 3x = 0_E \quad (1)$$
et
$$v(x) = 0_E \quad \Rightarrow \quad f(x) - 3x = 0_E \quad (2)$$
En faisant $(1) - 2(2)$, on obtient $9x = 0_E$, soit $x = 0_E$. Ainsi on a bien que $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Ker}(v)$.
4. On a $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(f + \frac{3}{2}\mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(v) = \mathrm{Ker}(f - 3\mathrm{Id}_E)$ qui sont respectivement les sous-esapces propres de $f$ associés aux valeurs propres $-\dfrac{3}{2}$ et 3. Comme on a $E = E_{-3/2}(f) \oplus E_3(f)$ est somme directe de sous-espaces propres de $f$, on en déduit que $f$ est diagonalisable.

---

## Sous-espaces stables

### Exercice 6.24 (★)

Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $f \circ f = -\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4}$.
2. Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}^4$, le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(u, f(u))$ est stable par $f$.

3. On pose $e_1 = (1,0,0,0)$, $e_2 = f(e_1)$, $e_3 = (0,1,0,0)$ et $e_4 = f(e_3)$.
   Montrer que $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

4. Déterminer la matrice $M'$ de l'endomorphisme $f$ dans la base $\mathscr{B}$.

---

**Exercice 6.25 (★★★ - QSP HEC 2017)**
Soit $E$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, $p$ un projecteur de $E$ et $u$ un endomorphisme de $E$.
Montrer que $p$ et $u$ commutent si et seulement si $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont stables par $u$.

$\Rightarrow$ C'est du cours : si deux endomorphismes commutent, le noyau et l'image de l'un sont stables par l'autre.

$\Leftarrow$ Supposons donc que $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont stables par $u$. Rappelons que puisque $p$ est un projecteur, on a :

$$E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$$

et que :

$$\forall x \in \mathrm{Im}(p),\ p(x) = x \quad \text{et} \quad \forall y \in \mathrm{Ker}(p),\ p(y) = 0_E.$$

On va montrer que $u$ et $p$ commutent sur $\mathrm{Im}(p)$, sur $\mathrm{Ker}(p)$, puis sur $E$ tout entier.

- Sur $\mathrm{Ker}(p)$ : pour tout $x \in \mathrm{Ker}(p)$, on a :

$$u \circ p(x) = u(0_E) = 0_E \quad \text{et} \quad p \circ u(x) = p(\underbrace{u(x)}_{\in \mathrm{Ker}(u)}) = 0_E$$

  car $\mathrm{Ker}(p)$ est stable par $u$.
- Sur $\mathrm{Im}(p)$ : pour tout $y \in \mathrm{Im}(p)$, on a :

$$u \circ p(y) = u(y) \quad \text{et} \quad p \circ u(y) = p(\underbrace{u(y)}_{\in \mathrm{Im}(u)}) = u(y)$$

  car $\mathrm{Im}(p)$ est stable par $u$.
- Sur $E$ : pour tout $z \in E$, il existe $(x, y) \in \mathrm{Ker}(u) \times \mathrm{Im}(u)$ tel que $z = x + y$. On obtient :

$$p \circ u(z) = p \circ u(x) + p \circ u(y) = u \circ p(x) + u \circ p(y) = u \circ p(x+y) = u \circ p(z)$$

  en utilisant que $u$ et $p$ commutent sur $\mathrm{Im}(p)$ et sur $\mathrm{Ker}(p)$. D'où le résultat.

---

**Exercice 6.26 (★★★ - Caractérisation des homothéties - ✍)**
Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et soit $f \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que $f$ laisse stable toutes les droites vectorielles.

1. Montrer que $\forall x \neq 0_E,\ \exists! \lambda_x \in \mathbb{K} :\ f(x) = \lambda_x x$.
2. Soient $x$ et $y$ deux vecteurs non nuls de $E$.
   (a) Montrer que si $x$ et $y$ sont liés, alors $\lambda_x = \lambda_y$.
   (b) Montrer que si $(x, y)$ est une famille libre, alors $\lambda_{x+y} = \lambda_x$. En déduire que $\lambda_x = \lambda_y$.
3. Déduire de ce qui précède que $f$ est une homothétie.

1. Pour tout $x \in E$, $x \neq 0_E$, la droite $\mathrm{Vect}(x)$ est stable par $f$, donc en particulier $f(x) \in \mathrm{Vect}(x)$. Il existe donc un unique scalaire $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda_x x$.
2. Soient $x$ et $y$ deux vecteurs non nuls de $E$.
   (a) Supposons $x$ et $y$ liés. Puisqu'ils sont non nuls, il existe $\mu \in \mathbb{K}$ tel que $y = \mu x$. On a alors :

$$\lambda_y y = f(y) = \mu f(x) = \mu \lambda_x x = \lambda_x y.$$

Puisque $y \neq 0_E$, on obtient $\lambda_y = \lambda_x$.

(b) Supposons que $(x, y)$ est une famille libre, alors :

$$\lambda_{x+y}(x+y) = f(x+y) = f(x) + f(y) = \lambda_x x + \lambda_y y.$$

Par liberté de la famille, on en déduit que $\lambda_{x+y} = \lambda_x$ et $\lambda_{x+y} = \lambda_y$. Ainsi on a bien que $\lambda_x = \lambda_y$.

3. On a donc montré que pour tout $x, y$ non nuls, $\lambda_x = \lambda_y$. Notons $\lambda \in \mathbb{K}$ ce réel. On a donc pour tout $x \neq 0_E$, $f(x) = \lambda x$. Puisque cette égalité est encore vraie pour $x = 0_E$, on obtient donc que $f = \lambda Id_E$. $f$ est donc bien une homothétie.

---

**Exercice 6.27 (★★★★)**

Montrer que $F = \{f \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})) \ : \ \forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ f({}^tA) = {}^tf(A)\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))$ et en déterminer la dimension.

Montrons que $F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))$ :

- Si $f = 0_{\mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))}$, alors pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ :

$$f({}^tA) = 0_n = {}^t f(A).$$

  Donc $f$ appartient bien à $F$.

- Soient $f, g \in F$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Montrons que $\lambda f + \mu g$ appartient à $F$. Pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ :

$$\begin{aligned}(\lambda f + \mu g)({}^tA) &= \lambda f({}^tA) + \mu g({}^tA) = \lambda {}^tf(A) + \mu {}^tg(A) \quad \text{car } f, g \in F \\ &= {}^t(\lambda f(A) + \mu g(A)) = {}^t(\lambda f + \mu g)(A).\end{aligned}$$

  Donc $\lambda f + \mu g$ appartient bien à $F$

$F$ est bien un sous-espace de $\mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))$.

Remarquons, en notant $g$ l'application linéaire transposée, que :

$$F = \{f \in \mathscr{L}(E) : \forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ f \circ g(A) = g \circ f(A)\} = \{f \in \mathscr{L}(E) : \ f \circ g = g \circ f\} = \mathscr{C}(g)$$

où $\mathscr{C}(g)$ est le commutant de $g$.

Or l'endomorphisme $g$ est lié aux sous-espaces $\mathscr{S}_n$ et $\mathscr{A}_n$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Plus précisément :

$$\mathscr{S}_n = \mathrm{Ker}(g - \mathrm{Id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}) \quad \text{et } \mathscr{A}_n = \mathrm{Ker}(g + \mathrm{Id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}).$$

Puisque $f$ commute avec $g$, il commute avec $g - \mathrm{Id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$ et $g + \mathrm{Id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$, et laisse donc stable les sous-espaces $\mathscr{S}_n$ et $\mathscr{A}_n$.

Réciproquement, soit un endomorphisme $f$ laissant stable $\mathscr{S}_n$ et $\mathscr{A}_n$. Puisque $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{S}_n \oplus \mathscr{A}_n$, pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, il existe $(S, A) \in \mathscr{S}_n \times \mathscr{A}_n$ tels que :

$$M = S + A.$$

On a alors :

$$f({}^tM) = f({}^t(A+S)) = f(S - A) = f(S) - f(A) = {}^tf(S) + {}^tf(A) = {}^t(f(S) + f(A)) = {}^tf(M)$$

car $f(S) \in \mathscr{S}_n$ et $f(A) \in \mathscr{A}_n$.

On a donc montré qu'un endomorphisme $f$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ appartient à $F$ si, et seulement si, $f$ laisse stable $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.

Allons un peu plus loin en considérant $\mathscr{B}$ une base de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ adaptée à la somme directe $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{S}_n \oplus \mathscr{A}_n$. Un endomorphisme $f$ laisse stable $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ si, et seulement si, sa matrice $M_{\mathscr{B}}(f)$ dans la base $\mathscr{B}$ est diagonale par blocs :

$$M_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

où $C \in \mathscr{M}_s(\mathbb{R})$ et $D \in \mathscr{M}_a(\mathbb{R})$ avec $s = \dim \mathscr{S}_n$ et $a = \dim \mathscr{A}_n$.

Finalement, pour $f \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))$, $f$ appartient à $F$ si, et seulement si, sa matrice dans la base $\mathscr{B}$ est de la forme $\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$ où $C \in \mathscr{M}_s(\mathbb{R})$ et $D \in \mathscr{M}_a(\mathbb{R})$.

Notons $\Phi_{\mathscr{B}} : f \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})) \mapsto M_{\mathscr{B}}(f) \in \mathscr{M}_{n^2}(\mathbb{R})$. Par le cours, $\Phi_{\mathscr{B}}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Par ce qu'on vient d'établir, il induit un isomorphisme de $F$ sur le sous-espace $G$ de $\mathscr{M}_{n^2}(\mathbb{R})$ des matrices diagonales par blocs :

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix},\ C \in \mathscr{M}_s(\mathbb{R}),\ D \in \mathscr{M}_a(\mathbb{R}) \right\}.$$

Par conséquent, les dimensions de $F$ et $G$ sont égales. Or, il est facile de calculer la dimension de $G$ (il suffit de compter le nombre de coefficients, à savoir $s^2 + a^2$, dans de telles matrices par blocs). Ainsi :

$$\dim(F) = s^2 + a^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2 = \frac{n^4+1}{2}.$$