TD4

Espaces vectoriels

Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels

Exercice 4.1 (★)

Les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ -x+3y+z=0\}$;

$B = \big\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ 2x-y+z=0 \text{ et } x-y+z-t=0\big\}$;

$C = \left\{f \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R}),\ \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 1\right\}$;

$D = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ monotone}\}$;

$E = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4\\2\\0\\0\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right)$;

$F = \big\{P \in \mathbb{R}[X],\ \exists (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \text{ tq } P = aX(X-1)+bX^2+c(X-1)+d\big\}$;

$G = \{P \in \mathbb{R}_3[X],\ P(X+1) = 2P(X) \text{ et } P(3)=0\}$;

$H = \left\{\begin{pmatrix}2a+b+c & 0 & 0\\ 0 & a+2b+c & a-b\end{pmatrix},\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\}$;

$I = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ suite réelle telle que } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n\}$;

$J = \{\text{suites réelles bornées}\}$;

$K = \{\text{matrices nilpotentes}\}$.

- Montrons que I est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles :
  - la suite nulle u appartient bien à I car pour tout $n \geq 0$:
  $$u_{n+2} - 4u_{n+1} + 4u_n = 0 - 4\times 0 + 4 \times 0 = 0.$$
  - Soient $u = (u_n)$ et $v = (v_n)$ deux suites de I et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Montrons que :
  $$w = \lambda u + \mu v = (\lambda u_n + \mu v_n) \in I.$$
  Pour tout $n \geq 0$, on a :
  $$\begin{aligned} w_{n+2} &= \lambda u_{n+2} + \mu v_{n+2} \quad \text{car } u,v \in I \\ &= \lambda(4u_{n+1} - 4u_n) + \mu(4v_{n+1} - 4v_n) \\ &= 4(\lambda u_{n+1} + \mu v_{n+1}) - 4(\lambda u_n + \mu v_n) \\ &= 4w_{n+1} - 4w_n. \end{aligned}$$
  Ainsi w appartient bien à I.

  On peut donc conclure que I est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

  Pour en déterminer une base, commençons par remarquer que I est l'ensemble des suites satisfaisant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. On sait comment obtenir le terme général d'une suite u satisfaisant une telle relation : on cherche les racines de l'équation caractéristique, qui est $r^2 - 4r + 4 = 0$. On a une racine double $r = 2$. D'où l'existence de deux constantes λ et μ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (\lambda + n\mu)2^n = \lambda 2^n + \mu n 2^n.$$

Posons les suites $a = (2^n)$ et $b = (n2^n)$. Il suit de ce qui précède :

$$I = \{\lambda a + \mu b,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(a, b).$$

La famille (a, b) est génératrice, et libre : les suites a et b ne sont pas colinéaires. Sinon, il existerait $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $a = \lambda b$, ce qui donnerait :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2^n = \lambda n 2^n$$

ce qui est clairement faux. (a, b) est ainsi une base de I, qui est donc de dimension 2.

- Montrons que J est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:
  - La suite nulle est bien bornée, donc appartient à J.
  - Soient $u, v \in J$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Montrons que $w = \lambda u + \mu v$ appartient à J. Pour cela, notons que puisque $u, v \in J$, il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que :

    $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq A \quad \text{et} \quad |v_n| \leq B.$$

    Par inégalité triangulaire, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

    $$|\lambda u_n + \mu v_n| \leq |\lambda||u_n| + |\mu||v_n| \leq |\lambda|A + |\mu|B.$$

    Ainsi w appartient bien à J.

  J est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

  J n'est cependant pas de dimension finie. En effet, posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $u^{(N)} = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{\text{position } N}, 0 \ldots)$. Cette suite est bien bornée. Et on peut montrer (je vous laisse le faire) que toute famille de la forme $(u^{(0)}, \ldots, u^{(N)})$ est libre de cardinal $N + 1$. Il existe donc des familles libres de cardinal aussi grand que l'on veut dans J. Ce qui prouve que J n'est pas de dimension finie.

- Tentons de montrer que K est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
  - La matrice nulle est bien nilpotente (d'indice de nilpotence 1), donc appartient à K.
  - Mais K ne va pas être stable par combinaison linéaire : la somme de deux matrices nilpotentes n'est pas nilpotente en général. Par exemple :

    $$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

    Les matrices de gauches sont bien nilpotentes car triangulaires strictes. Alors que celle de droite ne l'ai pas, par exemple parce qu'elle est inversible.

  Ainsi K n'est pas un sous-espace vectoriel des matrices.

> **Exercice.**
> On vient de montrer que la somme de deux matrices nilpotentes n'est pas une matrice nilpotente en général. Démontrer que c'est cependant bien le cas si on suppose en plus que ces matrices commutent.

Exercice 4.2 (★)
Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $F = \mathrm{Vect}((2, 3, -1), (1, -1, -2))$ et $G = \mathrm{Vect}((3, 7, 0), (5, 0, -7))$. Montrer que $F = G$.

Exercice 4.3 (★★★★ - Inspiré de QSP HEC 2007)
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n.

1. Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E. Montrer que :
$$F \cup G \text{ est un s.e.v. de } E \quad \Leftrightarrow \quad F \subset G \text{ ou } G \subset F.$$
En déduire que E n'est pas réunion de deux sous-espaces vectoriels stricts (c'est-à-dire distincts de E).

2. Plus généralement, montrer que E n'est pas réunion finie de sous-espaces vectoriels stricts

1. L'implication $\Leftarrow$ est évidente. Montrons la réciproque. On raisonne pour cela par l'absurde en supposant que $F \cup G$ est un sev et que $F \not\subseteq G$ et $G \not\subseteq F$. On a :
   - $F \not\subseteq G$ donc il existe $x \in F$ tel que $x \notin G$;
   - $G \not\subseteq F$ donc il existe $y \in G$ tel que $y \notin F$.

   Mais alors $x \in F \subset F \cup G$ et $y \in G \subset F \cup G$, et $F \cup G$ est un sev. Donc $x + y$ appartient à $F \cup G$. On a alors deux cas possibles :
   - soit $x + y \in F$, mais alors $y = \underbrace{(x+y)}_{\in F} - \underbrace{x}_{\in F}$ appartient à F. Ce qui est faux.
   - soit $x + y \in G$, et de même $x = \underbrace{(x+y)}_{\in G} - \underbrace{y}_{\in G}$ appartient à G. Ce qui est faux.

   D'où une contradiction et le résultat.

   Il en résulte en particulier que E ne peut pas être réunion de deux sous-espaces vectoriels stricts : en effet, sinon on aurait $E = F \cup G$ qui serait un sev. Donc d'après le résultat précédent, $E = F$ ou $E = G$ ce qui contredit F et G stricts.

2. Traitons du cas général maintenant (plus difficile, on s'inspire du cas précédent). Supposons qu'il existe $V_1, \dots, V_p$ des sous-espaces vectoriels stricts tels que :
$$E = V_1 \cup \cdots \cup V_p.$$
   Quitte à enlever V_1, on peut supposer que $V_1 \not\subseteq V_2 \cup \cdots \cup V_p$ (sinon $E = V_1 \cup \cdots \cup V_p = V_2 \cup \cdots \cup V_p$ et on travaille avec V_2). Alors :
   - il existe $x \in V_1$ tel que $x \notin V_2 \cup \cdots \cup V_p$.
   - il existe $y \in V_2 \cup \cdots \cup V_p$ tel que $y \notin V_1$.

   Considérer uniquement $z = x + y$ ne suffira pas ici à obtenir une contradiction, étant donné qu'on a maintenant p sous-espaces vectoriels. L'idée est de considérer les vecteurs $z_j = y + jx$ pour tout $j \in [\![1, p]\!]$. On va montrer que :

   (1) pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, z_j n'appartient pas à V_1 ;

   (2) il existe $1 \leq r < s \leq p$ tels que z_r et z_s appartiennent à un même sous-espace V_{i_s}.

   Ceci permet d'aboutir à une contradiction : en effet, si z_r et z_s appartiennent à un même sous-espace V_{i_s}, alors leur différence aussi (puisque V_{i_s} est un sous-espace vectoriel), et donc :
$$z_r - z_s = y + rx - (y + sx) = \underbrace{(r-s)}_{\neq 0} x \in V_{i_s}.$$
   Et ceci est contradictoire avec $x \notin V_2 \cup \cdots \cup V_p$.

   Reste donc à montrer ces deux points :

   (1) Soit $j \in [\![1, p]\!]$. Supposons que $z_j \in V_1$, alors $y = z_j - \lambda x$ appartiendrait à V_1 ce qui est faux. Donc z_j n'appartient pas à V_1 pour tout $j \in [\![1, p]\!]$.

(2) Pour tout $j \in [\![1,p]\!]$, z_j appartient à $E = V_1 \cup \cdots \cup V_p$ (et n'appartient pas à V_1), donc il existe $i_j \in [\![2,p]\!]$ tel que $z_j \in V_{i_j}$. Or $2 \leq i_1, \ldots, i_p \leq p$ (p éléments $i_1, \ldots, i_p$ dans un ensemble à $p-1$ éléments distincts $2, \ldots, p$), donc il existe $1 \leq r < s \leq p$ tels que $i_s = i_r$. Ainsi z_r, z_s appartiennent au même sous-espace V_{i_s}

Ainsi E n'est pas une réunion finie de sous-espaces vectoriels stricts.

Familles de vecteurs

Exercice 4.4 (★)

Les familles suivantes sont-elles libres ou liées?

$\mathscr{F}_1 = ((1,1,0),(0,1,1))$;

$\mathscr{F}_2 = ((1,1,0),(1,0,1),(2,1,2))$;

$\mathscr{F}_3 = ((1,1,-1),(1,-1,1),(-1,1,1),(1,1,1))$;

$\mathscr{F}_4 = f_1 : x \mapsto |x|,\ f_2 : x \mapsto |x-1|,\ f_3 : x \mapsto |x+1|$;

$\mathscr{F}_5 = (3, x^2+1, x^5-3x^2+2)$;

$\mathscr{F}_6 = (x^k(x-1)^{n-k})_{k\in[\![0,n]\!]}$.

Exercice 4.5 (★)

Déterminer une base et la dimension des espaces vectoriels de l'**Exercice 4.1**.

Exercice 4.6 (★)

Montrer que $\mathscr{B} = ((1,1,1),(2,1,1),(2,1,2))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
Calculer les coordonnées de (a,b,c) dans cette base. En déduire $M_{\mathscr{B}}(\mathscr{C})$ où $\mathscr{C}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4.7 (★★)

1. Montrer que $F = \{P \in \mathbb{R}_4[x],\ P(1) = P'(1) = P''(1) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[x]$.
2. Déterminer une base $\mathscr{B}$ et la dimension de F.
3. Soit $P : x \mapsto 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 - 1$. Montrer que P appartient à F, et déterminer les coordonnées de P dans la base $\mathscr{B}$.

1. Prenons $P \in \mathbb{R}_4[x]$. Alors :

$$\begin{aligned} P \in F &\Leftrightarrow P(1) = P'(1) = P''(1) = 0 \\ &\Leftrightarrow 1 \text{ est racine de multi. au moins 3 de } P \\ &\Leftrightarrow \exists Q \in \mathbb{R}[x],\ P(x) = (x-1)^3 Q(x) \\ &\underbrace{\Leftrightarrow}_{\deg(P)\leq 4} \exists a,b \in \mathbb{R},\ P(x) = (x-1)^3(ax+b) \\ &\underbrace{\Leftrightarrow}_{\deg(P)\leq 4} \exists a,b \in \mathbb{R},\ P(x) = ax(x-1)^3 + b(x-1)^3 \end{aligned}$$

   Ainsi :
$$F = \{ax(x-1)^3 + b(x-1)^3,\ a,b \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(x(x-1)^3, (x-1)^3).$$
   F est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[x]$.

   Remarque. On aurait bien-sûr pu utiliser la caractérisation d'un sous-espace vectoriel pour répondre à cette question.

2. On a vu à la question précédente que $\mathscr{F} = (x(x-1)^3, (x-1)^3)$ est une famille génératrice de F. Elle est de plus libre car formée de **2** vecteurs non colinéaires. C'est donc une base de F qui est de dimension 2.
3. On vérifie que $P(1) = P'(1) = P''(1) = 0$. De plus, par l'algorithme de Hörner (ou division

euclidienne, on montre que :

$$P(x) = (x-1)^3(3x+1) = 3x(x-1)^3 + (x-1)^3.$$

Ainsi :

$$M_{\mathscr{B}}(P) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.8 (★★ - Polynômes de Lagrange et matrices de Vandermonde - ✍)

Soient $a_0, \ldots, a_n$ $n+1$ réels distincts deux à deux. Pour $i \in [\![0, n]\!]$, on pose

$$L_i : x \mapsto \prod_{j \neq i} \frac{x - a_j}{a_i - a_j} = \frac{x-a_0}{a_i - a_0} \times \cdots \times \frac{x - a_{i-1}}{a_i - a_{i-1}} \times \frac{x - a_{i+1}}{a_i - a_{i+1}} \times \cdots \times \frac{x - a_n}{a_i - a_n}.$$

1. Pour tout $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$, calculer $L_i(a_j)$ (*on pourra distinguer les cas* $i = j$ *et* $i \neq j$).
2. Montrer que $\mathscr{B} = (L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.
3. Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, exprimer les coordonnées de P dans la base $\mathscr{B}$ en fonction de P.
4. Notons $\mathscr{C} = (1, x, \ldots, x^n)$. Écrire la matrice $M_{\mathscr{B}}(\mathscr{C})$.
5. Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & a_0 & \ldots & a_0^n \\ 1 & a_1 & \ldots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \ldots & a_n^n \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si les a_i sont deux à deux distincts.

Exercice 4.9 (★★★ - QSP ESCP 2021)

Soit A une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On pose $\mathscr{C}(A) = \{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}),\ AM = MA\}$.

1. Vérifier rapidement que $\mathscr{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer $\max\limits_{A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \dim(\mathscr{C}(A))$ et $\min\limits_{A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \dim(\mathscr{C}(A))$.

1. Je vous laisse le vérifier.
2. En tant que sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ de dimension finie égale à 4, $\mathscr{C}(A)$ est également de dimension finie et on a $\dim(\mathscr{C}(A)) \leq 4$.

   Pour $A = I_2$, $\mathscr{C}(I_2) = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ puisque toutes les matrices commutent avec I_2, et donc $\dim(\mathscr{C}(I_2)) = 4$. Ainsi :

   $$\max_{A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \dim(\mathscr{C}(A)) = 4.$$

   C'est plus compliqué pour le minimum. Regardons pour cela le commutant de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$:

   $$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{C}(A) \overset{(\ldots)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \end{cases}.$$

   Ainsi, $\mathscr{C}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, a, d \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}(E_{1,1}, E_{2,2})$. $(E_{1,1}, E_{2,2})$ est donc une famille génératrice de $\mathscr{C}(A)$, et libre car formée de deux vecteurs non colinéaires. C'est donc une base, de sorte que $\dim(\mathscr{C}(A)) = 2$.

   Il en résulte que :

   $$\min_{A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \dim(\mathscr{C}(A)) \leq 2.$$

   Peut-on faire moins ? Cela semble difficile, car on trouve dans le commutant d'une matrice A la matrice I_2, A elle-même, et plus généralement toutes les puissances de A et tous les polynômes en A.

Raisonnons par l'absurde, en supposant qu'il existe une matrice A telle que $\dim(\mathscr{C}(A)) \leq 1$. Mais comme $I_2 \in \mathscr{C}(A)$, on a $\dim(\mathscr{C}(A)) = 1$ et $\mathscr{C}(A)$ contient $\text{Vect}(I_2)$, ce qui donne donc :

$$\mathscr{C}(A) = \text{Vect}(I_2).$$

Mais alors :

$$A \in \mathscr{C}(A) = \text{Vect}(I_2),$$

et il existerait $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A = \lambda I_2$. Seulement, $\mathscr{C}(\lambda I_2)$ est égale à $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ qui n'est pas de dimension 1. D'où une contradiction.

On a donc montré que :

$$\min_{A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \dim(\mathscr{C}(A)) = 2.$$

Rang

Exercice 4.10 (★)
Déterminer le rang des familles suivantes :

1. $x_1 = (1, 0, 2)$, $x_2 = (-1, 2, -1)$, $x_3 = (2, 3, 0)$, $x_4 = (1, 0, -1)$, $x_5 = (2, 1, -1)$;
2. $x_1 = (1, 1, 0, 1)$, $x_2 = (1, -1, 1, 0)$, $x_3 = (2, 0, 1, 1)$, $x_4 = (0, -2, 1, -1)$;
3. $P_1 : x \mapsto x^2 + x - 3$, $P_2 : x \mapsto x^2 - x - 3$, $P_3 : x \mapsto 2x^2 - x - 6$.

Exercice 4.11 (★)
Dans $\mathbb{R}^3$, soient $u = (1, 0, 2)$, $v = (1, 1, 2)$, $w = (1, 2, 2)$, $t = (2, 2, 2)$.
Montrer que (u, v, w, t) est générateur de $\mathbb{R}^3$, et en extraire une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4.12 (★★)
Montrer que la matrice carrée d'ordre n, $A = (\sin(i + j))$ est de rang au plus 2.

Soit $j \in [\![1, n]\!]$, notons $C_j(A)$ la j-ème colonne de A. Par les formules trigonométriques :

$$C_j(A) = \begin{pmatrix} \sin(1+j) \\ \vdots \\ \sin(n+j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(1)\cos(j) + \sin(j)\cos(1) \\ \vdots \\ \sin(n)\cos(j) + \sin(j)\cos(n) \end{pmatrix} = \cos(j)S + \sin(j)S$$

où $C = \begin{pmatrix} \cos(1) \\ \vdots \\ \cos(n) \end{pmatrix}$ et $S = \begin{pmatrix} \sin(1) \\ \vdots \\ \sin(n) \end{pmatrix}$. Ainsi, pour tout $1 \leq j \leq n$:

$$C_j(A) \in \text{Vect}(C, S).$$

On obtient donc $\text{Vect}(C_1(A), \ldots, C_n(A)) \subset \text{Vect}(C, S)$, de sorte que :

$$\text{rg}(A) = \dim(\text{Vect}(C_1(A), \ldots, C_n(A))) \leq \dim(\text{Vect}(C, S)) \leq 2.$$

D'où le résultat voulu.

Exercice 4.13 (★★ - Matrices de rang 1 - ✍)

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1.

1. On souhaite montrer qu'il existe une matrice colonne non nulle $C \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et une matrice ligne non nulle $L \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ telles que $M = CL$.

   (a) *Exemple.* Prenons $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & -6 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Déterminer $C \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $L \in \mathscr{M}_{1,3}(\mathbb{R})$ tels que $M = CL$.

   (b) *Cas général.* Notons $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de M.
   Montrer qu'il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, il existe $\ell_j \in \mathbb{R}$ tel que $C_j = \ell_i C_i$. Conclure.

2. Montrer que $LC = \mathrm{Tr}(M)$, puis en déduire que $M^2 = \mathrm{Tr}(M)M$.

Somme de sous-espaces

Exercice 4.14 (★)

Soient $F = \{P \in \mathbb{R}_2[x],\ P - (x+1)P' = 0\}$ et $G = \{P \in \mathbb{R}_2[x],\ P'(0) = 0\}$.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_2[x]$, et en donner une base et la dimension.

2. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_2[x]$.

Exercice 4.15 (★★)

Montrer, dans chacun des cas suivants, que F et G sont deux-sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E :

1. $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ :\ x - y + 2z + t = 0\}$ et $G = \mathrm{Vect}(1, -1, 1, -1)$;

2. $u_1 = (1, 0, 0, 0)$, $u_2 = (1, 1, 0, 0)$, $u_3 = (1, 1, 1, 0)$, $u_4 = (1, 1, 1, 1)$, et $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$, $G = \mathrm{Vect}(u_3, u_4)$;

3. $E = \mathbb{R}[x]$, $F = \{P \in \mathbb{R}[x]\ ;\ P(1) = P(2) = 0\}$ et $G = \mathbb{R}_1[x]$;

4. $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $F = \{f \in E,\ f \text{ paire}\}$, $G = \{g \in E,\ g \text{ impaire}\}$.

Exercice 4.16 (★★ - ✍)

Soit H un hyperplan d'un espace vectoriel E de dimension finie, et soit $u \notin H$. Montrer que :

$$E = H \oplus \mathrm{Vect}(u).$$

Exercice 4.17 (★★ - Matrices symétriques et antisymétriques de taille 3 - ✍)

Une matrice M de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est dite symétrique lorsque ${}^tM = M$ et antisymétrique lorsque ${}^tM = -M$.
On note $\mathscr{S}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\mathscr{S}_3(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

2. Montrer que $\mathscr{S}_3(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$ sont en somme directe (c'est-à-dire $\mathscr{S}_3(\mathbb{R}) \cap \mathscr{A}_3(\mathbb{R}) = \{0_E\}$).

3. Déterminer une base et la dimension de $\mathscr{S}_3(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$.

4. Conclure que $\mathscr{S}_3(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 4.18 (★★★ - Matrices symétriques et antisymétriques de taille n - ✍)
Montrer que $\dim(\mathscr{S}_n(\mathbb{K})) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et $\dim(\mathscr{A}_n(\mathbb{K})) = \dfrac{n(n-1)}{2}$. En déduire que :

$$\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{K}).$$

Exercice 4.19 (★★)
Soit $n \geq 1$ fixé. Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on pose $F_i = \{P \in \mathbb{R}_n[x] \ : \ \forall j \in [\![0, n]\!] \setminus \{i\}, \ P(j) = 0\}$.

1. Montrer que les F_i sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_n[X]$, et que pour $P \in \mathbb{R}_n[x]$, on a $P \in F_i$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P = \lambda \displaystyle\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (x - j)$.
2. Montrer que la somme $F_0 + F_1 + \cdots + F_n$ est directe.
3. En déduire que $\mathbb{R}_n[x] = \displaystyle\bigoplus_{i=0}^{n} F_i$.

1. Soient $P \in \mathbb{R}_n[x]$ et $i \in [\![0, n]\!]$. Alors :

$$\begin{aligned} P \in F_i &\Leftrightarrow \forall j \neq [\![0, n]\!] \setminus \{i\}, \quad P(j) = 0 \\ &\Leftrightarrow L_i = \prod_{j \neq i} (x - j) = (x - 0) \dots (x - (i-1))(x - (i+1)) \dots (x - n) \text{ divise } P \\ &\Leftrightarrow \exists Q \in \mathbb{R}[x], \ P = Q \times L_i \underset{\deg(P) \leq n \text{ et } \deg(L_i) = n}{\Leftrightarrow} \exists \lambda \in \mathbb{R}, \ P = \lambda L_i \end{aligned}$$

On a ainsi montré que $F_i = \text{Vect}(L_i)$. En particulier, F_i est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[x]$. De plus, (L_i) est une famille génératrice de F_i formée de 1 vecteur non nul. Elle est donc libre, et forme une base de F_i qui est donc de dimension 1.

Déjà vu ?
On reconnait ici la famille des polynômes de Lagrange associés aux entiers $0, 1, \dots, n$, à ceci près qu'ils n'ont pas été normalisé. Ils vérifient donc ici pour tout $i \in [\![0, n]\!]$:

$$L_i(j) = 0 \text{ si } j \neq i \text{ et } L_i(i) \neq 0.$$

2. Le plus simple est de montrer que la famille $(L_0, \dots, L_n)$ est libre : ça sera alors une base de $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} F_i$, ce qui prouvera que cette somme est directe. Soient pour cela $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\alpha_0 L_0 + \cdots + \alpha_n L_n = 0. \qquad (*)$$

Montrons que $\alpha_0 = \cdots = \alpha_n = 0$. Pour cela, prenons $i \in [\![0, n]\!]$ et $x = i$ dans $(*)$. On obtient :

$$\underbrace{\alpha_0 L_0(i) + \cdots + \alpha_{i-1} L_{i-1}(i)}_{=0} + \alpha_i \underbrace{L_i(i)}_{\neq 0} + \underbrace{\alpha_{i+1} L_{i+1}(i) + \cdots + \alpha_n L_n(i)}_{=0} = 0.$$

D'où $\alpha_i = 0$ pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, et le fait que la famille (L_i) est libre. On peut donc conclure que la somme $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} F_i$ est directe.

3. La famille (L_i) est libre d'après la question précédente. Elle est de plus de cardinal $n + 1 = \dim(\mathbb{R}_n[x])$. C'est donc une base de $\mathbb{R}_n[x]$. D'où l'égalité $\mathbb{R}_n[x] = \displaystyle\bigoplus_{i=0}^{n} F_i$.

Exercice 4.20 (★★★ - QSP HEC 2013)

Soit $E = \mathbb{R}_3[x]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égaux à 3. On pose :

$$F = \{P \in E,\ P(0) = P(1) = P(2) = 0\},\ G = \{P \in E,\ P(1) = P(2) = P(3) = 0\}$$
$$\text{et } H = \{P \in E,\ P(x) = P(-x)\}.$$

Montrer que $E = F \oplus G \oplus H$.

> Soit $P \in E$. Alors :
>
> $$\begin{aligned} P \in F &\Leftrightarrow x(x-1)(x-2) \text{ divise } P \\ &\Leftrightarrow \exists Q \in \mathbb{R}[x],\ P = x(x-1)(x-2)Q \end{aligned}$$
>
> Or $\deg(P) \leq 3$, de sorte que $\deg(Q) \leq 0$, et donc :
>
> $$P \in F \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R},\ P = \alpha x(x-1)(x-2)$$
>
> Ainsi $F = \mathrm{Vect}(x(x-1)(x-2))$. Comme $x(x-1)(x-2) \neq 0$, $(x(x-1)(x-2))$ est une famille libre et génératrice de F, et donc une base de F.
>
> De même, on montre que $G = \mathrm{Vect}((x-1)(x-2)(x-3))$, et que $((x-1)(x-2)(x-3))$ est une base de G.
>
> Soit enfin $P = ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{R}_3[x]$. Alors :
>
> $$P \in H \Leftrightarrow ax^3 + bx^2 + cx + d = -ax^3 + bx^2 - cx + d \Leftrightarrow a = c = 0$$
>
> Ainsi $H = \{bx^2 + d,\ b, d \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(x^2, 1)$. La famille $(X^2, 1)$ est génératrice de H, et libre car **deux** vecteurs non colinéaires. C'est donc une base de H.
>
> Pour montrer que $E = F \oplus G \oplus H$, on va montrer que $\mathscr{B} = (x(x-1)(x-2), (x-1)(x-2)(x-3), x^2, 1)$ est une base de E. On a déjà que $Card(\mathscr{B}) = 4 = \dim \mathbb{R}_3[x]$. Il nous reste donc à montrer que cette famille est libre. Soit pour cela $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que :
>
> $$ax(x-1)(x-2) + b(x-1)(x-2)(x-3) + cx^2 + d = 0.$$
>
> Une méthode consisterait à tout développer et à identifier les coefficients en x^k. Ici on peut plus simplement évaluer en $x = 0, 1, 2, 3$. On obtient :
>
> $$\begin{cases} -6b + d = 0 \\ c + d = 0 \\ 4c + d = 0 \\ 6a + 9c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6b + d = 0 & \\ c = 0 & (3) - (2) \\ d = 0 & 4(2) - (3) \\ 6a + 9c + d = 0 & \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \\ a = 0 \end{cases}$$
>
> Ainsi $\mathscr{B}$ est libre. C'est donc une base de E, et on peut conclure que $E = F \oplus G \oplus H$.

Exercice 4.21 (★★★★ - Formule de Grassmann - ✍)

Montrer que si F et G sont de dimension finie, alors $F + G$ est aussi de dimension finie, et qu'on a :

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

> Montrons la formule de Grassmann : si F et G sont de dimension finie, alors $F+G$ est aussi de dimension finie, et :
>
> $$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$
>
> $F \cap G$ est un espace vectoriel de dimension finie, car sous-espace vectoriel de F par exemple. On considère $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de $F \cap G$.

- C'est en particulier une famille libre de vecteurs de F, qu'on complète en une base $(e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_r)$ de F.
- C'est aussi une famille libre de vecteurs de G, qu'on complète en une base $(e_1, \dots, e_p, g_1, \dots, g_s)$ de G.

Montrons que $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_r, g_1, \dots, g_s)$ est une base de $F + G$:

- $\mathscr{B}$ est génératrice : soit $z \in F + G$, alors il existe $x \in F$ et $y \in G$ tels que :
$$z = x + y.$$
Comme $x \in F$, il existe $a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_r$ tels que
$$x = a_1 e_1 + \dots + a_p e_p + b_1 f_1 + \dots b_r f_r.$$
De même, $y \in G$, donc il existe $c_1, \dots, c_p, d_1, \dots, d_s$ tels que
$$y = c_1 e_1 + \dots + c_p e_p + d_1 g_1 + \dots d_s g_s.$$
Et donc :
$$z = (a_1 + c_1)e_1 + \dots + (a_p + c_p)e_p + b_1 f_1 + \dots + b_r f_r + d_1 g_1 + \dots + d_s g_s.$$
Donc la famille $\mathscr{B}$ est génératrice, et $F + G$ est bien de dimension finie.
- Montrons que $\mathscr{B}$ est libre : soient $a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_r, c_1, \dots, c_s$ des scalaires. Supposons que :
$$0 = a_1 e_1 + \dots + a_p e_p + b_1 f_1 + \dots + b_r f_r + c_1 g_1 + \dots + c_s g_s. \qquad (*)$$
Alors :
$$\underbrace{a_1 e_1 + \dots + a_p e_p + b_1 f_1 + \dots + b_r f_r}_{\in F} = -\underbrace{(c_1 g_1 + \dots + c_s g_s)}_{=: g \in G}.$$
Donc $g \in F \cap G$ et il existe donc $d_1, \dots, d_p$ tels que :
$$d_1 e_1 + \dots + d_p e_p = g = c_1 g_1 + \dots + c_s g_s$$
Ainsi :
$$d_1 e_1 + \dots + d_p e_p - c_1 g_1 - \dots - c_s g_s = 0_E$$
Mais la famille $(e_1, \dots, e_p, g_1, \dots, g_s)$ est une base de G, donc en particulier une famille libre. Il en résulte que $d_1 = \dots = d_p = c_1 = \dots = c_s = 0$, et donc que $g = 0$. En reprenant l'égalité $(*)$, on en déduit que :
$$0 = a_1 e_1 + \dots + a_p e_p + b_1 f_1 + \dots + b_r f_r$$
Or $(e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_r)$ est une base de F, donc en particulier une famille libre. Ainsi $a_1 = \dots = a_p = b_1 = \dots = b_s = 0$. D'où finalement le résultat.

On peut donc conclure que $\mathscr{B}$ est une base de $F + G$ et que :
$$\dim(F + G) = p + r + s = \underbrace{(p + r)}_{=\dim(F)} + \underbrace{(p + s)}_{=\dim(G)} - \underbrace{p}_{=\dim(F \cap G)}.$$