TD22

Extrema sous contrainte

Optimisation sous contrainte d'inégalités

Exercice 22.1 (★)

Les parties suivantes sont-elles ouvertes/fermées/bornées :

$$A =]-3,3],\ B =]-\infty,0]\times]0,+\infty[,\ C = \{0\}\cup[1,\pi],\ D = [-1,0[\cap]0,1],$$

$$E = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x+2y>0\},\ F = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x^2+y^2+z^2\leq 1 \text{ et } x\geq 0\},\ G = \mathrm{Vect}((1,1,1))^{\perp}.$$

Exercice 22.2 (★★)

Considérons la fonction f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x,y) = xy(1-x-y).$$

On pose $\mathscr{D} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ x+y\leq 1\}$ et $\mathscr{D}_0 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x>0,\ y>0,\ x+y<1\}$.

1. (a) Représenter $\mathscr{D}$.
   (b) Montrer que $\mathscr{D}$ est un fermé borné, et que $\mathscr{D}_0$ est un ouvert.
2. (a) Montrer que f admet un minimum global m et un maximum global M sur $\mathscr{D}$.
   (b) Déterminer les points critiques de f sur $\mathscr{D}_0$.
   (c) Déterminer les valeurs de m et de M, ainsi que les points où ils sont atteints.
3. Mêmes questions pour $g : (x,y)\mapsto x^2-2y^2-5xy$.

Exercice 22.3 (★★)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ sur $f(x,y) = \cos(x)\sin(2y)$ dont on souhaite étudier les extrema.

1. Montrer qu'il suffit de rechercher des extrema dans l'ensemble $R = [0,\pi]\times[0,\frac{\pi}{2}]$.
2. Montrer que f admet un maximum global et un minimum global sur R. Les déterminer et préciser les points de R en lesquels ils sont atteints.
3. En déduire les extrema locaux et globaux de f sur $\mathbb{R}^2$ en précisant les points en lesquels ils sont atteints.

Exercice 22.4 (★★)

Soit $\mathscr{D} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x^2+y^2\leq 1\}$ et soit f la fonction définie sur $\mathscr{D}$ par $f(x,y) = x^3-3x(1+y^2)$.

1. Justifier que f admet un minimum m et un maximum M sur $\mathscr{D}$.
2. Montrer que sur $\mathscr{B}_o(0,1)$, f n'admet pas de point critique. Que peut-on en déduire quant au maximum et au minimum de f ?
3. En étudiant la fonction $t\mapsto f(\cos(t),\sin(t))$, déterminer les valeurs de m et M.

Exercice 22.5 (★★★)

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. On note $\mathscr{S}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ et $\mathscr{B}$ la boule unité ouverte. On suppose que f est constante sur S. Démontrer l'existence de $a \in \mathscr{B}$ tel que $\nabla f(a) = 0_{\mathbb{R}^n}$

Exercice 22.6 (★★★ - ✍)

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}^n$ telle que $\displaystyle\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Montrer que f admet un minimum global sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 22.7 (★★★ - Quotient de Rayleigh - ✍)

Considérons sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ le produit scalaire usuel $\langle X, Y \rangle = {}^tXY$. Soit S une matrice symétrique réelle de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\mathscr{S} = \{x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\| = 1\}$ la sphère unité, et on pose :

$$\mathscr{R}_S : x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\} \mapsto \mathscr{R}_S(x) = \frac{\langle X, SX \rangle}{\langle X, X \rangle}$$

où X est le vecteur colonne des coordonnées de x dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

1. (a) Justifier que la restriction de $\mathscr{R}_S$ à $\mathscr{S}$ admet un minimum et un maximum.
   (b) En remarquant que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, $\mathscr{R}_S(x) = \mathscr{R}_S(\alpha x)$, montrer que l'application $\mathscr{R}_S$ admet un minimum et un maximum global sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.
2. (a) Montrer que $\mathscr{R}_S$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.
   (b) Soit x_0 un point où le maximum est atteint. Montrer que x_0 est un vecteur propre de S.

On obtient ainsi l'existence d'une valeur propre réelle pour une matrice symétrique réelle S, résultat préalable à la démonstration du théorème spectral.

Optimisation sous contrainte linéaire

Exercice 22.8 (★)

1. Montrer que la fonction $f(x, y, z) = (x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2$ admet un unique point critique a sous la contrainte $x + y + z = 3$.
2. À l'aide de la formule de Taylor à l'ordre 2, déterminer la nature locale de a.
3. a est-il un extremum global ?

Exercice 22.9 (★)

Soit $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2$, et soit $\mathscr{C}$ la contrainte $2x - y + z = 3$.

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$, puis calculer son gradient et sa hessienne en tout point de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que f admet un unique point critique a sous la contrainte $\mathscr{C}$.
3. Déterminer la nature local du point critique a de f sous $\mathscr{C}$.
4. On cherche à montrer que a est en fait un extremum global. Pour cela on considère $x \in \mathscr{C}$, et on note $h = x - a$ et $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(t) = f(a + th)$.

   Étudier les variations de g, puis conclure.

Exercice 22.10 (★★)

Soit f la fonction de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z,t) = x^2+y^2+z^2+t^2$, et soit $\mathscr{C}$ la contrainte définie par les équations $\begin{cases} x+y=2 \\ z+t=0 \end{cases}$.

1. Déterminer l'ensemble des points critiques de f sous la contrainte $\mathscr{C}$.
2. Déterminer la nature de ces points critiques.

Exercice 22.11 (★★ - D'après Edhec 2001)

Soit $n \geq 2$. Soit $f :]0,1[^n \to \mathbb{R}$ définie par $f(x_1,\dots,x_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(1-x_i)^n$.

Déterminer les extrema locaux de f sous la contrainte $\mathscr{C} : x_1+x_2+\cdots+x_n = 1$.

Exercice 22.12 (★★)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x,y,z) = xy+yz+xz$, et soit $\mathscr{C}$ la contrainte définie par $x+y+z=2$. On note $\mathscr{H}$ l'ensemble des solutions de $x+y+z=0$.

Le but de l'exercice est de déterminer les extrema locaux de f sous la contrainte $\mathscr{C}$.

1. Montrer que f admet un unique point critique a_0 sous la contrainte $\mathscr{C}$.
2. Montrer qu'il existe une fonction $\varepsilon : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ vérifiant $\varepsilon(0)=0$ et continue en 0 telle que :
$$\forall h \in \mathscr{H}, \quad f(a_0+h) = f(a_0) + \frac{1}{2}q_{a_0}(h) + \|h\|^2\varepsilon(h).$$
3. Déterminer les valeurs propres de $A = \nabla^2 f(a_0)$. Que dire du le signe de q_{a_0} sur $\mathscr{H}$?
4. Montrer que $E_{-1}(A) = \mathscr{H}$.
5. En déduire que pour tout $h \in \mathscr{H}$ non nul, $q_{a_0}(h) < 0$. Quelle est la nature locale du point critique a_0 ?

Exercice 22.13 (★★ - D'après Ecricome 2008)

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[^3$ par $f(x_1,x_2,x_3) = \dfrac{1}{4x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{9x_3}$.

1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0,+\infty[^3$. Calculer ses dérivées partielles d'ordre 1 et 2.
2. On note $\nabla^2(f)(A) = \left[\partial^2_{i,j}(f)(A)\right]_{1\leq i,j\leq 3}$ la matrice hessienne de f en $A = (a_1,a_2,a_3)$. Justifier que, pour tout $A \in]0,+\infty[^3$ et pour tout $H \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ non nulle :
$${}^tH\nabla^2(f)(A)H > 0.$$
3. f admet-elle des extrema sur $]0,+\infty[^3$?
4. On cherche désormais les extrema de f sous la contrainte $\mathscr{C}$: $x_1+x_2+x_3 = 110$.
   (a) Montrer que f admet un unique point critique a sous cette contrainte, que l'on déterminera.
   (b) On souhaite montrer que a est un extremum global de f sous la contrainte $\mathscr{C}$. Pour cela on considère $x \in \mathscr{C}$ et on note alors $h = x-a$ et $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(t) = f(a+th)$. En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction g, montrer que $f(x) \geq f(a)$. Conclure.

Exercice 22.14 (★★★ - Oral ESCP 2021)

Soit un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour toute variable aléatoire Z définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ qui prend n valeurs réelles distinctes $z_1, \dots, z_n$ (c'est-à-dire $Z(\Omega) = \{z_1, \dots, z_n\}$ et $p_k = P(Z = z_k) \neq 0$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$), on appelle entropie de Z, le nombre réel défini par :

$$H(Z) = -\sum_{k=1}^{n} p_k \ln(p_k).$$

Pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in]0,1[^n$, on note $h_n(x) = h_n(x_1, \dots, x_n) = -\sum_{k=1}^{n} x_k \ln(x_k)$.

1. Calculer l'entropie d'une variable aléatoire U qui suit une loi uniforme sur un ensemble $\{u_1, \dots, u_n\}$.
2. Justifier que la fonction h_n est de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'ouvert $]0,1[^n$ et calculer en tout point $x \in]0,1[^n$, le gradient $\nabla(h_n)(x)$ et la matrice hessienne $\nabla^2(h_n)(x)$ de h_n.
3. Montrer que la condition nécessaire d'ordre 1 pour un extremum de la fonction h_n est vérifiée en un unique point critique x^* que l'on précisera.
4. Fixons $x \in]0,1[^n$ tel que $x_1 + \cdots + x_n = 1$ et notons $u = x - x^*$.
   (a) Vérifier que, pour tout $t \in [0,1]$, on a : $x^* + tu \in]0,1[^n$.
   On note alors ψ la fonction définie sur $[0,1]$ par : $\psi(t) = h_n(x^* + tu)$.
   (b) En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1 pour ψ entre les points 0 et 1, montrer que h_n admet en x^* un maximum global sous la contrainte $x_1 + \cdots + x_n = 1$. Ce maximum est-il atteint en d'autres points que x^* ?
5. Parmi les variables aléatoires prenant n valeurs (chacune avec une probabilité non nulle), quelles sont les lois de celles qui ont la plus grande entropie ?
