Sommets et séries

Calcul de sommes et de produits

Exercice 2.1 (★)

Soit n un entier naturel. Calculer :

a) $\sum_{k=0}^n (2^k + 4k + n - 3)$;	c) $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k$;	e) $\prod_{k=1}^n \frac{2k+3}{2k-1}$;
b) $\sum_{k=0}^n \frac{k}{(k+1)!}$;	d) $\prod_{k=1}^n (2k+1)$;	f) $\sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{k}$, on posera $i = 2n+1-k$.

Sommets doubles

Exercice 2.2 (★)

Soit n un entier naturel non nul. Calculer :

a) $\sum_{0 \leq i, j \leq n} (i+j)^2$;	c) $\sum_{0 \leq i, j \leq n} x^{i+j}$ avec $x \in \mathbb{R}$;	e) $\sum_{1 \leq j < i \leq n} \frac{j}{i}$;
b) $\sum_{0 \leq i < j \leq n} ij$;	d) $\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \frac{3^i 4^j}{5^{i+j}}$;	f) $\sum_{0 \leq i < j \leq n} \frac{i}{j+1}$.

Exercice 2.3 (★)

Soit n un entier naturel. On considère la somme double $S_n = \sum_{k=0}^n \sum_{j=k}^n 2^j$.

1. Calculer de deux manières différentes la somme double S_n . En déduire que $\sum_{k=1}^n k 2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$.

2. Déterminer alors la valeur de la somme double $T_n = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{i+1} k 2^{k-1}$.

Séries

Exercice 2.4 (★)

Justifier la convergence et déterminer la somme des séries suivantes :

a) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$	b) $\sum_{n \geq 2} \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} \right)$	c) $\sum_{n \geq 1} \ln \left(1 + \frac{2}{n(n+3)} \right)$
---------------------------------------	--	--

Exercice 2.5 (★)

Déterminer si les séries suivantes convergent, et le cas échéant, calculer leur somme :

$\sum_{n \geq 0} \frac{3^{2n+1}}{n!}$	$\sum_{n \geq 1} n 2^{n-1}$	$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n!}$	$\sum_{n \geq 1} n \frac{3^n}{4^{n+1}}$	$\sum_{n \geq 2} \frac{n(n-1)}{2^{n+1}}$
---------------------------------------	-----------------------------	-------------------------------------	---	--

Exercice 2.6 (★★)

Déterminer la nature des séries suivantes :

a) $\sum \frac{n^3 + 2n}{n^4 + n^3 + 1}$	d) $\sum n \times \sin \frac{1}{n^2}$	g) $\sum \left(\frac{\ln(n)}{n}\right)^2$	j) $\sum \left(\frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}}\right)$
b) $\sum \frac{1}{n^2 - \ln n}$	e) $\sum \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right)$	h) $\sum \frac{\sqrt{n+1}}{\ln(n)^3 n^2}$	k) $\sum \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) (\ln n)^{1000}$
c) $\sum \left(n - \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$	f) $\sum \frac{n^2 \ln n}{e^n}$	i) $\sum \frac{\arctan n}{n^2}$	l) $\sum_{n \geq 1} \left(\exp\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{n}{n-1}\right)$

Exercice 2.7 (★★)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)^n$.

1. Déterminer suivant la valeur du paramètre α la limite de la suite (u_n) .
2. Déterminer suivant la valeur du paramètre α la nature de la série $\sum (u_n - 1)$.

1. Écrivons $u_n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)\right)$. Si $\alpha \leq 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right) = +\infty$. Supposons $\alpha > 0$. Dans ce cas, $\frac{1}{n^\alpha} \rightarrow 0$ et :

$$n \ln\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right) \sim \frac{n}{n^\alpha} = \frac{1}{n^{\alpha-1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha < 1, \\ 1 & \text{si } \alpha = 1, \\ 0 & \text{si } \alpha > 1. \end{cases}$$

En passant à l'exponentielle qui est continue, on en déduit que :

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha < 1, \\ e & \text{si } \alpha = 1, \\ 1 & \text{si } \alpha > 1. \end{cases}$$

2. Par la question précédente, cette série diverge grossièrement si $\alpha \leq 1$. Supposons $\alpha > 1$, et écrivons :

$$u_n - 1 = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)\right) - 1$$

de la forme $e^{a_n} - 1$ avec $a_n = n \ln\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right) \rightarrow 0$. D'où, par les équivalents usuels :

$$u_n - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \ln\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

Or $\frac{1}{n^{\alpha-1}} \geq 0$ pour tout n , et $\sum \frac{1}{n^{\alpha-1}}$ est une série de Riemann qui converge si, et seulement si, $\alpha - 1 > 1$, soit si, et seulement si, $\alpha > 2$. Par théorème de comparaison, la série $\sum (u_n - 1)$ converge si, et seulement si, $\alpha > 2$.

Exercice 2.8 (★)

Étudier la nature de la série $\sum u_n$ dans les cas suivants :

a) $u_n = \frac{\sin n}{n^2}$	b) $u_n = \frac{(-1)^n(n+2)}{(n^3+1)}$	c) $u_n = \frac{(1+n)\sin n}{n^2\sqrt{n}}$	d) $u_n = \cos(n) \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$
-------------------------------	--	--	--

Exercice 2.9 (★★ - Développement en série entière du cosinus)

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^{(k)}(x) = \cos\left(x + k\frac{\pi}{2}\right)$.

2. En déduire que $\cos^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est impair} \\ (-1)^p & \text{si } k = 2p \text{ est pair} \end{cases}$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$: $\left| \cos(x) - \sum_{k=0}^n \cos^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.
4. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum_k \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$ est convergente et que $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = \cos(x)$.

1. Montrons par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^{(k)}(x) = \cos\left(x + k\frac{\pi}{2}\right)$.

Init. Pour $k = 0$, $\cos^{(0)}(x) = \cos(x) = \cos\left(x + 0\frac{\pi}{2}\right)$, donc la propriété est vraie au rang 0.

Hér. Soit $k \in \mathbb{N}$, et supposons la propriété au rang k . Par hypothèse de récurrence :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos^{(k)}(x) = \cos\left(x + k\frac{\pi}{2}\right).$$

Dérivons (tout est bien dérivable sur $\mathbb{R}$) :

$$\cos^{(k+1)}(x) = -\sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\left(x + k\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + (k+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

car $-\sin(\theta) = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$ (on s'en convaincra si nécessaire en traçant un cercle trigonométrique !).

D'où la propriété au rang $k + 1$.

Concl. Par principe de récurrence, on conclut que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^{(k)}(x) = \cos\left(x + k\frac{\pi}{2}\right)$.

2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on en déduit :

$$\cos^{(k)}(0) = \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est impair,} \\ (-1)^p & \text{si } k = 2p \text{ est pair.} \end{cases}$$

Là aussi, si la dernière égalité n'est pas claire, on pourra s'en convaincre en traçant un cercle trigonométrique et en regardant pour $k = 0, 1, 2, 3$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On applique alors l'inégalité de Taylor Lagrange entre 0 et $x \in \mathbb{R}$ à $\cos$ qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On a $|\cos^{(n+1)}(x)| = \left| \cos\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right) \right| \leq 1$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\left| \cos(x) - \sum_{k=0}^n \cos^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

4. D'après les calculs précédents, il suit que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\left| \cos(x) - \sum_{k=0}^{2n} \cos^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

soit encore :

$$\left| \cos(x) - \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{x^{2i}}{2i!} \right| \leq \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0$, il suit par théorème d'encadrement que la série de

terme général $\sum_k \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$ est convergente et que $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = \cos(x)$.

Exercice 2.10 (★★★ - QSP HEC 2014)

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose : $u_n = \ln n + a \ln(n+1) + b \ln(n+2)$.

- Déterminer les réels a et b pour que la série de terme général u_n soit convergente.
- Calculer alors la somme de cette série.

1. Pour étudier la nature de la série $\sum u_n$, on va chercher un équivalent de u_n lorsque $n \rightarrow +\infty$. Le terme général u_n s'exprimant à l'aide de sommes (incompatibles avec les équivalents), on passe par un développement limité. Rappelons que :

$$\ln(1+u) \underset{u \rightarrow 0}{\equiv} u - \frac{u^2}{2} + o(u^2).$$

Calculons :

$$\begin{aligned} u_n &= \ln(n) + a \ln(n+1) + b \ln(n+2) = \ln(n) + a \ln\left(n\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) + b \ln\left(n\left(1 + \frac{2}{n}\right)\right) \\ &= (1+a+b) \ln(n) + a \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + b \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) \\ &= (1+a+b) \ln(n) + a \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + b \left(\frac{2}{n} - \frac{4}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= (1+a+b) \ln(n) + \frac{a+2b}{n} - \frac{a+4b}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Plusieurs cas sont à considérer.

- Si $1+a+b \neq 0$, alors $u_n \sim (1+a+b) \ln(n)$ et la série diverge grossièrement.
- Si $1+a+b = 0$ et $a+2b \neq 0$, alors :

$$\begin{aligned} \triangleright u_n &\sim \frac{a+2b}{n}; \\ \triangleright \frac{1}{n} &\geq 0 \text{ pour tout } n \geq 1; \\ \triangleright \sum \frac{1}{n} &\text{ diverge (série harmonique)}. \end{aligned}$$

Par théorème de comparaison, la série $\sum u_n$ diverge.

- Si $1+a+b = 0$ et $a+2b = 0$, dans ce cas $a = -2$ et $b = 1$, et :

$$\begin{aligned} \triangleright u_n &= -\frac{2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim -\frac{1}{n^2}; \\ \triangleright \frac{1}{n^2} &\geq 0 \text{ pour tout } n \geq 1; \\ \triangleright \sum \frac{1}{n^2} &\text{ converge (série de Riemann d'exposant } 2 > 1). \end{aligned}$$

Par théorème de comparaison, la série $\sum u_n$ converge.

2. Supposons donc que $a = -2$ et $b = 1$. Pour tout $N \geq 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N u_n &= \sum_{n=1}^N (\ln(n) - 2 \ln(n+1) + \ln(n+2)) \\ &= \sum_{n=1}^N (\ln(n) - \ln(n+1)) + \sum_{n=1}^N (\ln(n+2) - \ln(n+1)) \\ &= \ln(1) - \ln(N+1) + \ln(N+2) - \ln(2) = \ln\left(\frac{N+2}{N+1}\right) - \ln(2) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \ln(1) - \ln(2) = -\ln(2). \end{aligned}$$

Ainsi la série $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $a = -2$ et $b = 1$, et dans ce cas, sa somme vaut $-\ln(2)$.

Exercice 2.11 (★★★★ - QSP HEC 2021)

Soit a un réel strictement positif.

1. Étudier la nature de la série $\sum_{n \geq 0} (\arctan(n+a) - \arctan(n))$.
2. Proposer un programme `Python` permettant de donner une valeur approchée de sa somme à 0.001 près lorsque $a = \frac{1}{2}$. On rappelle pour cela que `atan(x)` renvoie la valeur de $\arctan(x)$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'expression $\arctan(n+a) - \arctan(n)$ peut vous faire penser à l'inégalité (ou l'égalité) des accroissements finis. C'était effectivement la bonne idée à avoir. La fonction $f = \arctan$ est bien continue sur $[n, n+a]$ et dérivable sur $]n, n+a[$, de dérivée donnée par :

$$\forall x \in [n, n+a], \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

En particulier, $|f'(x)| \leq \frac{1}{1+n^2}$ pour tout $x \in [n, n+a]$. Par l'inégalité des accroissements finis, il suit que :

$$0 \leq \arctan(n+a) - \arctan(n) = |\arctan(n+a) - \arctan(n)| \leq \frac{1}{1+n^2} |(n+a) - n| \leq \frac{a}{n^2}$$

Par théorème de comparaison par inégalité avec la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ convergente, $\sum \arctan(n+a) - \arctan(n)$ converge donc.

2. Notons (S_n) la suite des sommes partielles de la série $\sum \arctan\left(n + \frac{1}{2}\right) - \arctan(n)$, (R_n) la suite de ses restes partiels, et S la somme de cette série. On cherche S à 0,001 près. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq S - S_n = R_n.$$

Il s'agit donc de trouver $n \in \mathbb{N}$ tel que $R_n \leq 0,001$, et S_n fournira une valeur approchée de S à 0,001 près. On va pour cela majorer le reste partiel par un terme approprié. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on dispose des inégalités :

$$0 \leq \arctan\left(k + \frac{1}{2}\right) - \arctan(k) \leq \frac{1}{2k^2} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{2t^2}.$$

Fixons $N \in \mathbb{N}^*$, $N \geq n$, et sommons ces inégalités pour $k = n+1, \dots, N$:

$$0 \leq \sum_{k=n+1}^N \arctan\left(k + \frac{1}{2}\right) - \arctan(k) \leq \frac{1}{2} \int_n^N \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2N}.$$

En faisant tendre N vers $+\infty$ dans ces inégalités (tout converge bien), on obtient :

$$0 \leq R_n \leq \frac{1}{2n}.$$

Il suffit donc de calculer S_{500} , ce qu'on peut faire avec le programme `Python` suivant :

```

1 | S = 0
2 | for k in range(501):
3 |     S = S+atan(k+1/2)-atan(k)
4 | print(S)

```

Exercice 2.12 (★★★★ - Oral HEC 2021)

1. Soit x un réel. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{(n!)^2}$ converge. On note $f(x)$ sa somme.

2. Soient x et y deux réels positifs. Notons $z = \max(x, y)$. Montrer que : $|f(x) - f(y)| \leq e^z |x - y|$.
En déduire que f est continue sur $]0, +\infty[$.
3. Montrer que pour tout $x > 0$, on a $f(x) > 1$ et que $f(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$.
4. Posons pour tout $x > 0$, $g(x) = \int_1^x \frac{dt}{t(f(t))^2}$. Montrer que g est bien définie sur $]0, +\infty[$, puis que $g(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \ln(x)$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \geq 0$:

$$0 \leq \left| \frac{x^n}{(n!)^2} \right| \leq \frac{|x|^n}{n!}$$

qui est le terme général d'une série exponentielle, donc convergente. Par théorème de comparaison, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{(n!)^2}$ converge absolument, donc converge. On notera $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}$ sa somme.

2. Soient x et y des réels positifs. Calculons :

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n - y^n}{(n!)^2} \right| = \left| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n - y^n}{(n!)^2} \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x^n - y^n|}{(n!)^2} \quad \text{par inég. triang.} \\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|(x - y) \left(\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-k-1} \right)|}{(n!)^2} = |x - y| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-k-1}}{(n!)^2} \\ &\leq |x - y| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1}}{n!} = |x - y| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nz^{n-1}}{n!} = |x - y| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = |x - y| e^z \end{aligned}$$

Fixons $x \in \mathbb{R}_+$. La fonction $y \mapsto \max(x, y) = \frac{|x - y| + x + y}{2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, de limite x lorsque $y \mapsto x$. Ainsi, $\lim_{y \rightarrow x} |x - y| e^z = 0 \times e^x = 0$, et par théorème des gendarmes, la limite $\lim_{y \rightarrow x} f(y)$ existe et vaut $f(x)$. En d'autres termes, f est continue en x . Ceci étant vrai quelque soit $x \geq 0$, f est bien continue sur $]0, +\infty[$.

3. Pour tout $x > 0$:

$$f(x) = \underbrace{1 + x}_{>1} + \underbrace{\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}}_{\geq 0} > 1.$$

De plus, pour tout $x \neq 0$:

$$\frac{f(x) - 1}{x} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(n!)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n!)^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{((k+1)!)^2} = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{((k+1)!)^2}$$

Or,

$$\left| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{((k+1)!)^2} \right| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|x|^k}{k!} = e^{|x|} - 1$$

Donc par encadrement, $\lim_{x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{((k+1)!)^2} = 0$, et on a bien :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = 1 \implies f(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$$

4. (a) Soit $x > 0$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t(f(t))^2}$ est continue sur $[1, x]$ (ou $[x, 1]$) puisque f est continue et ne s'annule pas sur $[1, x]$ (ou $[x, 1]$). Ainsi, $g(x)$ est bien défini pour tout réel $x > 0$.
- (b) Remarquons alors que :

$$g(x) - \ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t(f(t))^2} dt - \int_1^x \frac{1}{t} dt = \int_1^x \frac{1 - (f(t))^2}{t(f(t))^2} dt = \int_x^1 \frac{f(t) - 1}{t} \frac{f(t) + 1}{(f(t))^2} dt.$$

Or, remarquons que : $\frac{f(t)-1}{t} \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{}$ 1 d'après 4, et $\frac{f(t)+1}{(f(t))^2} \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{}$ $\frac{f(0)+1}{f(0)^2} = 2$.

Ainsi, la fonction $t \mapsto \frac{f(t) - 1}{t} \frac{f(t) + 1}{(f(t))^2}$ est prolongeable par continuité en 0.

L'intégrale $\int_0^1 \frac{f(t) - 1}{t} \frac{f(t) + 1}{(f(t))^2} dt$ est donc convergente car faussement impropre. En notant I sa valeur, on obtient donc :

$$g(x) - \ln(x) = I + o_{x \rightarrow 0}(1) \implies g(x) = \ln(x) + I + o_{x \rightarrow 0}(1) \implies g(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \ln(x).$$

Exercice 2.13 (★★★★ - Oral HEC 2013)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \frac{x^n}{n}$.

1. Déterminer l'ensemble des réels x pour lesquels la série $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$ est absolument convergente.

2. (a) Soit $x \in [-1, 1[$. Calculer pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^x t^{k-1} dt$, et en déduire que si $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=1}^n u_k(x) = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt.$$

- (b) Montrer que si $x \in [-1, 1[$, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt = 0$.

- (c) En déduire que pour tout $x \in [-1, 1[$, $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$ est convergente et donner la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

3. (a) Établir la convergence de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2 - 1}$ et calculer $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$.

- (b) Montrer que pour tout $x \in [-1, 1[$, la série $\sum_{n \geq 2} \frac{x^n}{n^2 - 1}$ est convergente et calculer sa somme $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2 - 1}$.

- (c) L'application f de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2 - 1}$ est-elle continue ?

1. Pour $|x| < 1$, on a $n^2|u_n| = n|x|^n \rightarrow 0$ par croissances comparées. Donc $\sum u_n$ converge absolument par théorème de comparaison.

Pour $|x| = 1$, $|u_n| = \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n}$ diverge en tant que série harmonique.

Pour $|x| > 1$, $\sum |u_n|$ diverge grossièrement, donc diverge.

2. (a) Soit $x \in [-1, 1[$. On a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^x t^{k-1} dt = \left[\frac{t^k}{k} \right]_0^x = \frac{x^k}{k}.$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n u_k(x) &= \sum_{k=1}^n \int_0^x t^{k-1} dt = \int_0^x \sum_{k=1}^n t^{k-1} dt \stackrel{t \neq 1 \text{ car } -1 \leq x < 1}{=} \int_0^x \frac{1-t^n}{1-t} dt \\ &= \int_0^x \frac{1}{1-t} dt - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt. \end{aligned}$$

(b) Posons la fonction $f : t \in]-\infty, 1[\mapsto \frac{1}{1-t}$. Elle est continue et dérivable sur $] -\infty, 1[$, et pour tout $t \in]-\infty, 1[$, $f'(t) = \frac{1}{(1-t)^2} \geq 0$. Donc f est croissante et positive. On obtient alors selon les cas :

- Si $x \geq 0$, $0 \leq \frac{t^n}{1-t} \leq \frac{x^n}{1-x}$ pour tout $0 \leq t \leq x$, et donc :

$$0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \leq \frac{x^{n+1}}{1-x} \rightarrow 0.$$

- Si $x < 0$:

$$\left| \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \right| \leq \int_x^0 \frac{|t|^n}{1-t} dt \leq \int_x^0 \frac{(-1)^n t^n}{1-x} dt \leq \frac{(-1)^n}{1-x} \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_x^0 = \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{n+1} \rightarrow 0$$

car $0 \leq (-x)^{n+1} \leq 1$.

Ainsi, pour tout $x \in [-1, 1[$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt = 0$.

(c) D'après les questions précédentes, il suit que pour tout $x \in [-1, 1[$, la série $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$ est convergente et on obtient en passant à la limite :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = -\ln(1-x).$$

3. (a) On a :

- $\frac{1}{n^2-1} \sim \frac{1}{n^2}$,
 - $\frac{1}{n^2} \geq 0$
- |
- $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (Riemann avec $\alpha = 2 > 1$).

Donc la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2-1}$ converge. De plus, puisque $\frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{(n-1)(n+1)}$, cherchons $a, b \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\frac{1}{(n-1)(n+1)} = \frac{a}{n-1} + \frac{b}{n+1}$$

En mettant tout sur le même dénominateur et en identifiant, on obtient que $a = \frac{1}{2}$ et $b = -\frac{1}{2}$, et donc :

$$\sum_{n=2}^N \frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^N \frac{1}{n-1} - \frac{1}{2} \sum_{n=2}^N \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2(N+1)} - \frac{1}{2N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{3}{4}.$$

Ainsi $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1} = \frac{3}{4}$.

(b) Pour tout $x \in [-1, 1[$:

$$\left. \begin{aligned} &\bullet \left| \frac{x^n}{n^2 - 1} \right| \sim \frac{|x|^n}{n^2}, \\ &\bullet 0 \leq \frac{|x|^n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}, \end{aligned} \right| \bullet \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ converge (série de Riemann avec } \alpha = 2 > 1).$$

Donc la série $\sum_{n \geq 2} \frac{x^n}{n^2 - 1}$ est absolument convergente, donc convergente.

Pour tout $N \geq 2$, pour tout $x \in [-1, 1[$ avec $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^N \frac{x^n}{n^2 - 1} &= \frac{1}{2} \sum_{n=2}^N \frac{x^n}{n-1} - \frac{1}{2} \sum_{n=2}^N \frac{x^n}{n+1} = \frac{x}{2} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{x^n}{n} - \frac{1}{2x} \sum_{n=3}^{N+1} \frac{x^n}{n} \\ &\xrightarrow{N \rightarrow +\infty} -\frac{x}{2} \ln(1-x) - \frac{-\ln(1-x) - x - x^2/2}{2x} \end{aligned}$$

Ainsi, $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2 - 1} = \frac{\ln(1-x) + x + x^2/2 - x^2 \ln(1-x)}{2x}$ pour $x \neq 0$. Enfin cette somme vaut 0 si $x = 0$.

(c) Posons $f : x \in [-1, 1] \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2 - 1}$. On a vu que f est bien définie sur $[-1, 1]$, et on a obtenu une autre expression de f :

$$\forall x \in [-1, 1[, x \neq 0, \quad f(x) = \frac{\ln(1-x) + x + x^2/2 - x^2 \ln(1-x)}{2x}$$

En particulier, f est continue sur $[-1, 0[$ et sur $]0, 1[$ comme somme et quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

Quand $x \rightarrow 0$, on a $\ln(1-x) + x + x^2/2 - x^2 \ln(1-x) = o(x^2)$, et donc $f(x) = o(x)$. En particulier $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ et f est continue en 0

Posons enfin $h = 1 - x$, de sorte que quand $x \rightarrow 1^-$, alors $h \rightarrow 0^+$. Calculons :

$$\begin{aligned} f(x) = f(1-h) &= \frac{\ln(h) + (1-h) + \frac{(1-h)^2}{2} - (1-h)^2 \ln(h)}{2(1+h)} \\ &= \frac{\ln(h) + (1-h) + \frac{(1-h)^2}{2} - (1-2h+h^2) \ln(h)}{2(1+h)} \\ &= \frac{(1-h) + \frac{(1-h)^2}{2} + (2h-h^2) \ln(h)}{2(1+h)} \\ &\xrightarrow{h \rightarrow 0^+} \frac{1 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4} = f(1). \end{aligned}$$

Ainsi f est aussi continue en 1 également. Donc f est bien continue sur $[-1, 1]$.

Autour de la série harmonique

Exercice 2.14 (★★ - Étude de la série harmonique -)

On s'intéresse au problème suivant :

On suppose avoir une infinité de kaplas (petits pavés en bois de 12 cm de long et de 8mm d'épaisseur) à notre disposition. En partant d'une tour bien droite, et en poussant intelligemment les kaplas, jusqu'où peut-on faire pencher cette pile avant qu'elle ne tombe ?

La réponse à ce problème est à découvrir dans cette [vidéo](#). On cherche ici à retrouver les résultats qui y sont exposés. Considérons pour cela la série harmonique $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1. Divergence de la série harmonique.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$. En déduire que la série harmonique diverge.

2. Équivalent de H_n lorsque $n \rightarrow +\infty$ par comparaison série/intégrale.

- (a) Justifier l'inégalité suivante pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}$.
- (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $H_n - 1 \leq \int_1^n \frac{1}{t} dt \leq H_n - \frac{1}{n}$.
- (c) Donner un équivalent de H_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.

3. Recherche d'un développement asymptotique de H_n .

Posons $\gamma_n = H_n - \ln(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- (a) Montrer que $\gamma_{n+1} - \gamma_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$. En déduire que la série de terme général $(\gamma_{n+1} - \gamma_n)$ converge.
- (b) Conclure que (γ_n) converge vers un réel $\gamma \in \mathbb{R}$. Le réel γ est appelé la *constante d'Euler* ($\gamma \simeq 0,577$).
- (c) En déduire que : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$.

4. Programmation.

- (a) Écrire à l'aide de **Python** une fonction d'en-tête `def kaplas(n)` qui à n le nombre de kaplas à disposition, renvoie le réel p égal au maximum de l'inclinaison de la pile de n kaplas.
- (b) Vérifier le résultat pour une tour de kaplas haute comme la tour Eiffel (324 m) ? Et pour une tour de kaplas de votre taille ?

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$H_{2n} - H_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.$$

Or, pour tout $n + 1 \leq k \leq 2n$, on a $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n}$. Donc :

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n}(2n - (n + 1) + 1) = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$.

Par l'absurde, suppose que la série harmonique converge et notons $H \in \mathbb{R}$ sa somme. Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n = H$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} H_{2n} = H$. En passant à la limite dans l'inégalité démontrée précédemment, on obtient alors $0 = H - H \geq \frac{1}{2}$ ce qui est impossible. Donc la série harmonique diverge.

2. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $t \in [k, k + 1]$, $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$.

En intégrant pour t allant de k à $k + 1$ (bornes croissantes), on obtient :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dt.$$

Or $\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1} dt = \frac{1}{k+1} [t]_k^{k+1} = \frac{1}{k+1}$ et de même $\int_k^{k+1} \frac{1}{k} dt = \frac{1}{k}$.

Finalement, on a bien que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}$.

(b) Soit un entier $n \geq 2$. On somme les inégalités précédentes pour k allant de 1 à $n - 1$:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

Or :

- $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{1} = H_n - 1.$
- Par la relation de Chasles, $\sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt = \int_1^n \frac{1}{t} dt.$
- $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = H_{n-1}.$

On a donc, pour tout entier $n \geq 2$, $H_n - 1 \leq \int_1^n \frac{1}{t} dt \leq H_{n-1}.$

(c) Tout d'abord, $\int_1^n \frac{1}{t} dt = [\ln(t)]_1^n = \ln(n).$

Avec la question précédente, on a donc pour tout $n \geq 2$:

- D'une part, $H_n - 1 \leq \ln(n)$ donc $H_n \leq \ln(n) + 1.$
- D'autre part, $\ln(n) \leq H_{n-1}$ donc $\ln(n+1) \leq H_n.$

Finalement, pour tout $n \geq 2$,

$$\ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n) + 1.$$

En divisant par $\ln(n) > 0$ (quitte à prendre $n \geq 3$),

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \leq \frac{H_n}{\ln(n)} \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)}.$$

Or $\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n) + \ln(1 + 1/n)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln(1 + 1/n)}{\ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ et $1 + \frac{1}{\ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$

Par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{H_n}{\ln(n)} = 1$ donc $H_n \sim \ln(n).$

3. (a) Pour tout $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} \gamma_{n+1} - \gamma_n &= (H_{n+1} - \ln(n+1)) - (H_n - \ln(n)) \\ &= \underbrace{H_{n+1} - H_n}_{=1/(n+1)} - \ln(n+1) + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}. \end{aligned}$$

De plus, $\frac{1}{n^2} \geq 0$ pour tout $n \geq 1$, et la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $2 > 1$. Par théorème de comparaison, la série $\sum(\gamma_{n+1} - \gamma_n)$ converge.

(b) Puisque la série télescopique $\sum(\gamma_{n+1} - \gamma_n)$ converge, il résulte du cours que la suite (γ_n) converge vers une limite finie $\gamma \in \mathbb{R}.$

(c) Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n = \gamma$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\gamma_n - \gamma) = 0$ donc $\gamma_n - \gamma = o(1).$

Comme $\gamma_n = H_n - \ln(n)$, on obtient que $H_n - \ln(n) - \gamma = o(1).$

Finalement, on obtient bien $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1).$

4. (a) On peut proposer la fonction suivante :

```

1 def kaplas(n)
2   S=0
3   for k in range(1,n+1):
4     S=S+1/k
5   return 0.06*S

```

(b) Comme un kapla mesure 8 mm d'épaisseur, on a :

- Pour une tour haute comme la tour Eiffel, on superpose $\frac{324}{0.008} = 40500$ kaplas et on obtient une inclinaison de 0.6711771 m soit environ 67 cm (avec la fonction `kaplas` précédente).
- Pour une tour de la hauteur de votre professeur de mathématiques (1.90 m), on superpose $\frac{1.9}{0.008} = 237.5 \simeq 238$ kaplas et on obtient une inclinaison de 0.3630951 m soit environ 36 cm (avec la fonction `kaplas` précédente).

Exercice 2.15 (★★ - Série harmonique alternée - 📖)

Considérons la série harmonique alternée $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$. On note $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de ses sommes partielles.

1. Étude de la convergence.

- (a) La série harmonique alternée est-elle absolument convergente ?
- (b) Montrer que les suites $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes, puis en déduire qu'elles convergent vers une même limite notée S .
- (c) En déduire que la série harmonique alternée converge et que l'on a $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Remarque. La série $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ est un exemple de séries dites *alternées*. L'étude de ces séries est fréquente dans les sujets de concours (EDHEC 2008, EML 2016, ECRICOME 2016), et repose, comme pour la série harmonique alternée, sur l'étude des suites extraites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) . Pour plus de détails :

📖 **Complément de cours 1. Autour des séries alternées.**

2. Calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

- (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{2n} = H_{2n} - H_n$.
- (b) En déduire que $S_{2n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}}$, et déterminer la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.
- (c) Retrouver ce résultat en utilisant le développement asymptotique de la série harmonique.

1. (a) $\left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| = \frac{1}{n}$ et la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge (série de Riemann de paramètre 1 donc divergente, on l'a prouvé dans l'exercice précédent!).

Donc la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ ne converge pas absolument.

(b) Montrons que les suites $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes :

- $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante :

$$\begin{aligned} S_{2(n+1)} - S_{2n} &= S_{2n+2} - S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{(-1)^{2n}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+2} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\ &= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \geq 0. \end{aligned}$$

- $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante :

$$\begin{aligned} S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} &= S_{2n+3} - S_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+3} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+3} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\ &= -\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} = \frac{-1}{(2n+2)(2n+3)} \leq 0. \end{aligned}$$

- Enfin,

$$\begin{aligned} S_{2n+1} - S_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{1}{2n+1} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\ &= \frac{1}{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

Donc (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes. Par le théorème des suites adjacentes, elles convergent donc vers une même limite notée S .

- (c) Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n+1} = S$, la suite (S_n) converge vers S . Autrement dit, la série

harmonique alternée converge et sa somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ vaut S .

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$\begin{aligned} S_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{\substack{1 \leq k \leq 2n \\ k \text{ pair}}} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \sum_{\substack{1 \leq k \leq 2n \\ k \text{ impair}}} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{2k-1}}{2k} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{2k+1-1}}{2k+1} = \sum_{k=1}^n \frac{-1}{2k} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+1} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+1} = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \sum_{\substack{1 \leq k \leq 2n \\ k \text{ impair}}} \frac{1}{k} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \sum_{\substack{1 \leq k \leq 2n \\ k \text{ impair}}} \frac{1}{k} + \sum_{\substack{1 \leq k \leq 2n \\ k \text{ pair}}} \frac{1}{k} - \sum_{\substack{1 \leq k \leq 2n \\ k \text{ pair}}} \frac{1}{k} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{\substack{1 \leq k \leq 2n \\ k \text{ pair}}} \frac{1}{k} = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = -\frac{1}{2} H_n + H_{2n} - \frac{1}{2} H_n = H_{2n} - H_n. \end{aligned}$$

On a bien, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{2n} = H_{2n} - H_n$.

- (b) Avec la question précédente,

$$S_{2n} = H_{2n} - H_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+\frac{k}{n}}.$$

Cette dernière expression devrait vous faire penser à une somme de Riemann. Faisons un rappel à ce sujet :

Rappel. Sommes de Riemann.

On pensera à une somme de Riemann lorsqu'on cherche la limite d'une suite (u_n) qui est une somme finie de n termes et que le terme général de cette somme dépend également de n . On procédera alors ainsi :

- commencer par mettre $\frac{1}{n}$ en facteur, faire apparaître le terme $\frac{k}{n}$ dans l'expression et identifier une fonction f **continue** sur $[0, 1]$ satisfaisant $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ (pour les sommes de Riemann à gauche) ou $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$ (pour les sommes de Riemann à droite).
- Par le théorème des sommes de Riemann, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \int_0^1 f(t) dt$.

On pose $f : x \in [0, 1] \mapsto \frac{1}{1+x}$. f est bien définie et continue sur $[0, 1]$. Donc, par le théorème sur les sommes de Riemann :

$$S_{2n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(x) dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2).$$

Or, on sait que $S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n}$. Par unicité de la limite, il suit que $S = \ln(2)$, ce qui se réécrit

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2).$$

- (c) Toujours avec la question 2.(a) puis en utilisant le développement asymptotique de la série harmonique obtenu dans l'exercice précédent :

$$\begin{aligned} S_{2n} &= H_{2n} - H_n = (\ln(2n) + \gamma + o(1)) - (\ln(n) + \gamma + o(1)) \\ &= \ln(2n) - \ln(n) + o(1) = \ln(2) + o(1). \end{aligned}$$

Donc $S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n} = \ln(2)$. On retrouve que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$.

Séries doubles

Exercice 2.16 (★★)

La famille $(u_{i,j})$ est-elle sommable ? Le cas échéant, préciser sa somme.

a) $(u_{i,j}) = \left(\frac{\lambda^{i+j}}{i!j!}\right)_{i,j \geq 0}$;	c) $(u_{i,j}) = \left(\frac{1}{ij}\right)_{i \geq 2, j \geq 2}$;	e) $(u_{i,j}) = \left(\frac{i+j-1}{2^{i+j-2}}\right)_{i \geq 1, j \geq 0}$;
b) $(u_{i,j}) = \left(\frac{(-1)^i j^i}{i!}\right)_{i,j \geq 0}$;	d) $(u_{i,j}) = \left(\frac{x^i y^j}{(i+j)!}\right)_{i,j \geq 0}$;	f) $(u_{i,j}) = \left(\frac{(-1)^{i+j} 2^j}{i \times j!}\right)_{i \geq 1, j \geq 0}$.

- e) Étant donné la présence du terme $(i+j)$ dans l'expression de $u_{i,j}$, on va sommer suivant les diagonales (en notant bien que $i \geq 1$ ce qui change un peu la composition des diagonales par rapport à d'habitude). Notons donc pour tout $n \geq 1$:

$$J_n = \{(i, j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}, i + j = n\} = \{(i, n - i), 1 \leq i \leq n\}$$

qui est de cardinal n . Alors :

$$- \sum_{(i,j) \in J_n} |u_{i,j}| = \sum_{i=1}^n \frac{n-1}{2^{n-2}} = \frac{n(n-1)}{2^{n-2}}.$$

– $\sum_{n \geq 1} \frac{n(n-1)}{2^{n-2}}$ est une série géométrique dérivée deux fois, de raison $q = 1/2$. On a $|q| < 1$, donc cette série converge.

Par le théorème de sommation suivant les diagonales, on en déduit que $(u_{i,j})$ est une famille sommable, et :

$$\sum_{i \geq 1, j \geq 0} u_{i,j} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{(i,j) \in J_n} u_{i,j} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{2^{n-2}} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{2^{n-2}} = \frac{2}{(1-1/2)^3} = 16.$$

f) On a $|u_{i,j}| = \frac{2^j}{i \times j!}$. On applique ici le théorème de Fubini (ne se prêle pas à une sommation suivant les diagonales...) :

– $\sum_{i \geq 0} \frac{2^j}{i \times j!} = \frac{2^j}{j!} \sum_{i \geq 0} \frac{1}{i}$ diverge en tant que série harmonique. L'étude s'arrête donc ici !

On peut donc conclure que la famille $(u_{i,j})$ n'est pas sommable.

Exercice 2.17 (★★)

Justifier l'existence et déterminer la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=n}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^p$ et de $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)!}$.

Posons $u_{n,p} = \begin{cases} \frac{1}{2^p} & \text{si } p \geq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. On va montrer par Fubini que la famille $(u_{n,p})$ est sommable.

- La série $\sum_{p \geq 0} |u_{n,p}| = \sum_{p \geq n} \frac{1}{2^p}$ est géométrique de raison $q = 1/2$. Puisque $|q| < 1$, elle converge donc, et sa somme vaut :

$$\frac{1}{2^n} \frac{1}{1-1/2} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

- La série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^{n-1}}$ converge encore une fois en tant que série géométrique de raison $q = 1/2$.

Par théorème de Fubini, la famille $(u_{n,p})$ est sommable, et :

$$\sum_{(n,p)} u_{n,p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 2 \times \frac{1}{1-1/2} = 4.$$

Posons de même $u_{n,k} = \begin{cases} \frac{1}{(k+1)!} & \text{si } k \geq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. On va montrer par Fubini que la famille $(u_{n,k})$ est sommable.

- La série $\sum_{n \geq 0} |u_{n,k}| = \sum_{n=0}^k \frac{1}{(k+1)!}$ converge car c'est une somme finie, et elle vaut

$$\frac{k+1}{(k+1)!} = \frac{1}{k!}.$$

- La série $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!}$ converge en tant que série exponentielle avec $x = 1$.

Par théorème de Fubini, la famille $(u_{n,p})$ est sommable, et :

$$\sum_{(n,k)} u_{n,k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} u_{n,k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,k}$$

ce qui donne :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^k \frac{1}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e.$$