TD18

Endomorphismes symétriques

Endomorphismes symétriques

Exercice 18.1 (★)

On munit l'espace $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire canonique et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini, pour tout vecteur $x = (x_1, x_2, x_3)$ de $\mathbb{R}^3$ par :

$$f(x) = (3x_1 + x_2 + x_3, x_1 + 3x_2 + x_3, x_1 + x_2 + 3x_3).$$

Montrer que l'endomorphisme f est symétrique.

Exercice 18.2 (★)

Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, on considère l'endomorphisme f dont la matrice relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Montrer que f est la projection orthogonale sur un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ que l'on déterminera.

Exercice 18.3 (★★ - Structure des endomorphismes symétriques - ✍)

On note $\mathscr{S}$ l'ensemble des endomorphismes symétriques de E.

1. Montrer que $\mathscr{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$.
2. Soit (f, g) un couple d'éléments de $\mathscr{S}$.

   Montrer que $f \circ g \in \mathscr{S}$ si, et seulement si, f et g commutent.
3. Soit $f \in \mathscr{S}$. Montrer que $f^n \in \mathscr{S}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis que pour tout $P \in \mathbb{R}[x]$, $P(f) \in \mathscr{S}$.

> 1. On a bien que l'endomorphisme nulle $f = 0_{\mathscr{L}(E)}$ est symétrique puisque pour tout $x, y \in E$, on a :
>
> $$\langle f(x), y\rangle = \langle 0_E, y\rangle = 0$$
>
> et
>
> $$\langle x, f(y)\rangle = \langle x, 0_E\rangle = 0.$$
>
> Soit à présent $f, g \in \mathscr{S}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On sait déjà que $\lambda f + \mu g \in \mathscr{L}(E)$ car $\mathscr{L}(E)$ est un espace vectoriel. Pour tout $x, y \in E$, on a :
>
> $$\begin{aligned} \langle(\lambda f + \mu g)(x), y\rangle &= \langle \lambda f(x) + \mu g(x), y\rangle \\ &= \lambda\langle f(x), y\rangle + \mu\langle g(x), y\rangle \text{ par bil. du prod. scal.} \\ &= \lambda\langle x, f(y)\rangle + \mu\langle x, g(y)\rangle \text{ car } f \text{ et } g \text{ sont sym.} \\ &= \langle x, \lambda f(y) + \mu g(y)\rangle \text{ par bil. du prod. scal.} \\ &= \langle x, (\lambda f + \mu g)(y)\rangle \end{aligned}$$
>
> Ainsi $\lambda f + \mu g$ appartient bien à $\mathscr{S}$. Donc $\mathscr{S}$ est un sous-espace vectoriel de E.

2. Soit $f, g \in \mathscr{S}$. Alors on a :

$$\begin{aligned} f\circ g \in \mathscr{S} &\Leftrightarrow \forall x,y\in E,\ \langle f\circ g(x), y\rangle = \langle x, f\circ g(y)\rangle \\ &\Leftrightarrow \forall x,y\in E,\ \langle f(g(x)), y\rangle = \langle x, f\circ g(y)\rangle \\ &\Leftrightarrow \forall x,y\in E,\ \langle g(x), f(y)\rangle = \langle x, f\circ g(y)\rangle \text{ car } f \text{ sym.} \\ &\Leftrightarrow \forall x,y\in E,\ \langle x, g\circ f(y)\rangle = \langle x, f\circ g(y)\rangle \text{ car } g \text{ sym.} \\ &\Leftrightarrow \forall x,y\in E,\ \langle x, g\circ f(y) - f\circ g(y)\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall y\in E,\ g\circ f(y) - f\circ g(y) \in E^\perp = \{0_E\} \\ &\Leftrightarrow \forall y\in E,\ g\circ f(y) = f\circ g(y) \end{aligned}$$

Ainsi $f\circ g\in\mathscr{S}$ si et seulement si f et g commutent.

3. Montrons par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f^n\in\mathscr{S}$.

Init. $f^0 = Id_E$ qui est bien un endomorphisme symétrique. D'où le résultat à $n=0$.

Hér. Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons que $f^n\in\mathscr{S}$. Puisque f et f^n commutent, on a par la question précédente que $f\circ f^n = f^{n+1}\in\mathscr{S}$. D'où la propriété au rang $n+1$.

On conclut par principe de récurrence.

Puisque $f^n\in\mathscr{S}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, et puisque $\mathscr{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{S}$, on en déduit que toute combinaison linéaire de puissances de f appartient encore à $\mathscr{S}$. Ainsi pour tout $P\in\mathbb{R}[X]$, on a bien $P(f)\in\mathscr{S}$.

Remarque. On aurait pu montrer de tels résultats pour l'ensemble des matrices symétriques $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et le déduire pour les endomorphismes symétriques à l'aide de l'application :

$$\Phi_{\mathscr{B}} : f\in\mathscr{L}(\mathrm{E}) \mapsto M_{\mathscr{B}}(f)\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$$

où $\mathscr{B}$ est une **base orthonormée** de E. Rappelons que $\Phi_{\mathscr{B}}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels et est compatible avec la composée d'applications et le produit matriciel.

Exercice 18.4 (★★)

Soit $f\in\mathscr{L}(E)$. On suppose que f est symétrique. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires orthogonaux dans E.

Soit $x\in\mathrm{Ker}(f)$ et $y\in\mathrm{Im}(f)$. Il existe donc $z\in E$ tel que $y=f(z)$. On a :

$$\langle x,y\rangle = \langle x, f(z)\rangle \underset{f \text{ sym.}}{=} \langle f(x), z\rangle \underset{x\in\mathrm{Ker}(f)}{=} \langle 0_E, z\rangle = 0.$$

Ainsi on a $\mathrm{Ker}(f)\perp\mathrm{Im}(f)$. En particulier ses sous-espaces sont en somme directe (propriété du cours). Comme de plus par le théorème du rang on a :

$$\dim(E) = \dim\mathrm{Ker}(f) + \dim\mathrm{Im}(f),$$

on peut donc conclure que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires orthogonaux dans E.

Réduction des endomorphismes symétriques

Exercice 18.5 (★)
Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que A est diagonalisable.
2. Déterminer le rang de $A - I_3$. En déduire que 1 est valeur propre de A et déterminer $\dim(E_1(A))$. En déduire les autres valeurs propres de A.
3. Déterminer une base des sous-espaces propres de A.
4. Déterminer une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que $A = PD\,{}^tP$.

Exercice 18.6 (★)
Pour chacune des matrices symétriques suivantes, déterminer D diagonale et P orthogonale telles que $A = PD\,{}^tP$:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \quad ; \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 18.7 (★★)

1. Montrer qu'on définit un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur $E = \mathbb{R}_3[x]$ en posant :
$$\forall (P,Q) \in E^2, \quad \langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$
2. On définit $f : P \in E \mapsto 2xP'(x) + (x^2-1)P''(x)$. Montrer que $f \in \mathscr{L}(E)$.
3. Montrer que : $\quad \forall P, Q \in \mathbb{R}_3[x],\ \langle f(P), Q \rangle = -\displaystyle\int_{-1}^{1} P'(t)Q'(t)(t^2-1)\,\mathrm{d}t.$

   En déduire que f est symétrique. f est-il diagonalisable ?
4. Déterminer le spectre de f. f est-il un automorphisme ?
5. Déterminer une base orthonormée de vecteurs propres de f.

Exercice 18.8 (★★ - D'après EM Lyon 2013)
Soient $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ avec $\|X\| = 1$, et $S = X\,{}^tX$. On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire $\langle M, N \rangle = \mathrm{Tr}({}^tMN)$.

1. Montrer que S est symétrique et vérifie $S^2 = S$.
2. Soit $\Phi : M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto SM$. Montrer que Φ est un endomorphisme symétrique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Montrer que $\Phi^2 = \Phi$. Que dire des valeurs propres de Φ ?
4. Montrer que $\mathrm{Ker}(\Phi)$ et $\mathrm{Ker}(\Phi - \mathrm{Id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})})$ sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 18.9 (★★ - QSP HEC 2013)
Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = I_n$. Montrer que $A^2 = I_n$.

Exercice 18.10 (★★)
Soient $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, et $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de A. Montrer que :
$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^2 \dim(E_{\lambda_i}(A)).$$

Commençons par noter qu'à gauche de l'identité, on a :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2 = \mathrm{Tr}(\,{}^tAA),$$

calcul déjà effectué dans l'exercice 11.5. Notons aussi que comme A est symétrique, on a $\mathrm{Tr}(\,{}^tAA) = \mathrm{Tr}(A^2)$. Pour faire le lien avec les valeurs propres de A, diagonalisons A en base orthonormée (possible car A symétrique réelle). Il existe donc P (qu'on peut prendre orthogonale) telle que :

$$P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\underbrace{\lambda_1,\dots,\lambda_1}_{\dim(E_{\lambda_1}(A))\text{ fois}},\dots,\underbrace{\lambda_p,\dots,\lambda_p}_{\dim(E_{\lambda_p}(A))\text{ fois}}) = D.$$

On en déduit que :

$$A^2 = (PDP^{-1})^2 = PD^2P^{-1} = P\mathrm{diag}(\underbrace{\lambda_1^2,\dots,\lambda_1^2}_{\dim(E_{\lambda_1}(A))\text{ fois}},\dots,\underbrace{\lambda_p^2,\dots,\lambda_p^2}_{\dim(E_{\lambda_p}(A))\text{ fois}})P^{-1}$$

On obtient alors (comme deux matrices semblables ont même trace) que :

$$\mathrm{Tr}(A^2) = \mathrm{Tr}(D^2) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^2 \dim(E_{\lambda_i}(A)).$$

D'où l'égalité souhaitée.

Exercice 18.11 (★★ - ✍)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, et soit $B = {}^tAA$. On munit $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique.

1. Montrer que B est symétrique, et que $B = 0$ si, et seulement si, $A = 0$.
2. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(B)$ et X un vecteur propre de B associé à λ. En calculant de deux façons $\langle BX, X\rangle$, montrer que $\lambda \geq 0$.
3. Montrer que $E_0(A) = E_0(B)$ et en déduire que $\mathrm{rg}(B) = \mathrm{rg}(A)$.

Exercice 18.12 (★★★ - QSP ESCP 2015)

Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tAA = A\,{}^tA$.
On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$. Montrer que $A = 0$.

Posons $B = {}^tA \times A$. Puisque A et ${}^tA$ commutent, on a :

$$B^p = ({}^tA \times A)^p = ({}^tA)^p \times A^p = 0_n.$$

Donc B est une matrice nilpotente. Elle est de plus symétrique car :

$${}^tB = {}^t({}^tA \times A) = {}^tA \times {}^t({}^tA) = {}^tA \times A = B.$$

B étant symétrique réelle, elle est diagonalisable. Il existe donc P inversible (qu'on peut éventuellement supposée orthogonale) et $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$P^{-1}BP = \mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n).$$

On a alors :

$$\mathrm{diag}(\lambda_1^p, \dots, \lambda_n^p) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^p = (P^{-1}BP)^p = P^{-1}B^pP = P^{-1}0_nP = 0_n.$$

Ainsi, on a $\lambda_1^p = \dots = \lambda_n^p = 0$, d'où $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. On obtient donc :

$$B = P\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)P^{-1} = P0_nP^{-1} = 0_n.$$

La matrice $B = {}^tAA$ est donc nulle, d'où en prenant la trace :

$$0 = \mathrm{Tr}({}^tAA) = \|A\|^2$$

où $\|\cdot\|$ est la norme associée au produit scalaire canonique sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On peut donc conclure que $A = 0_n$.

À retenir.

On a, entre autres, montré qu'une matrice **diagonalisable** et **nilpotente** est nulle. Ce résultat, qui avait déjà été démontré dans l'Exercice 13.15, est à retenir.

Exercice 18.13 (★★★★)

On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique, et on considère $(u_1, \dots, u_p)$ une famille libre de $\mathbb{R}^n$, avec $p \leq n$. On définit une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ par $f(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle x, u_i \rangle u_i$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

1. Montrer que f est un endomorphisme symétrique, et déterminer son noyau et son image.
2. On suppose à présent que $p = n$.
   (a) Montrer que les valeurs propres de f sont toutes strictement positives.
   (b) Montrer qu'il existe un endomorphisme symétrique g, dont toutes les valeurs propres sont strictement positives, et tel que $g^2 = f^{-1}$.
   (c) Établir que $(g(u_1), \dots, g(u_n))$ est une base orthonormée de E.

1. Montrons que f est linéaire. Pour tout $x, y \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f(\lambda x + \mu y) &= \sum_{i=1}^{p} \langle \lambda x + \mu y, u_i \rangle u_i \\ &= \lambda \sum_{i=1}^{p} \langle x, u_i \rangle u_i + \mu \sum_{i=1}^{p} \langle y, u_i \rangle u_i \text{ par bil. du prod. scal.} \\ &= \lambda f(x) + \mu f(y) \end{aligned}$$

Montrons que f est symétrique. Pour tout $x, y \in E$, on a :

$$\begin{aligned} \langle f(x), y \rangle &= \langle \sum_{i=1}^{p} \langle x, u_i \rangle u_i, y \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{p} \langle x, u_i \rangle \langle u_i, y \rangle \end{aligned}$$

par bilinéarité du produit scalaire. D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}\langle x, f(y)\rangle &= \langle x, \sum_{i=1}^{p}\langle y, u_i\rangle u_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{p}\langle y, u_i\rangle\langle x, u_i\rangle\end{aligned}$$

toujours par bilinéarité du produit scalaire. Par symétrie cette fois, on a que $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle$. Ceci étant vrai pour tout $x, y \in E$, on a bien que f est symétrique.

On a :

$$\begin{aligned}x \in \mathrm{Ker}(f) &\Leftrightarrow f(x) = 0_E \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{p}\langle x, u_i\rangle u_i = 0_E \\ &\Leftrightarrow \langle x, u_i\rangle = 0 \text{ par liberté de la famille } (u_i)_{i=1,\ldots,p} \\ &\Leftrightarrow x \in \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_p)^{\perp}.\end{aligned}$$

Ainsi on a $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_p)^{\perp}$. En particulier on a :

$$\dim \mathrm{Ker}(f) = \dim \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_p)^{\perp} = n - \dim \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_p) = n - p$$

par liberté de la famille $(u_1, \ldots, u_p)$.

Pour tout $x \in E$, on a $f(x) = \sum_{i=1}^{p}\langle x, u_i\rangle u_i \in \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$. Donc on a $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$. D'autre part on a :

$$\dim \mathrm{Im}(f) \underset{\text{th. du rang}}{=} \dim(E) - \dim \mathrm{Ker}(f) = n - (n-p) = p = \dim \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$$

par liberté de la famille $(u_1, \ldots, u_p)$. D'où l'égalité :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_p).$$

2. Puisque $p = n$, $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base de E car libre et de cardinal égal à la dimension. On déduit de ce qui précède que $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$, $\mathrm{Im}(f) = E$ et donc que f est un automorphisme (bijectif et linéaire de E dans E).

   (a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de f et $x \neq 0_E$ un vecteur propre associé. On a :

   $$\langle x, f(x)\rangle = \lambda\langle x, x\rangle = \lambda\|x\|^2$$

   et d'autre part :

   $$\begin{aligned}\langle x, f(x)\rangle &= \langle x, \sum_{i=1}^{n}\langle x, u_i\rangle u_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n}\langle x, u_i\rangle\langle x, u_i\rangle \text{ par bil. du prod. scal.} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\langle x, u_i\rangle^2.\end{aligned}$$

Ainsi on a $\lambda = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \langle x, u_i \rangle^2}{\|x\|^2} \geq 0$. Comme de plus $\lambda \neq 0$ car f est un isomorphisme, on en déduit que toutes les valeurs propres de f sont strictement positives.

(b) Comme f est symétrique réelle, elle est diagonalisable en base orthonormée. Il existe donc $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de f associés respectivement aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (non nécessairement distinctes) tel que :

$$M_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

De plus on a :

$$M_{\mathscr{B}}(f^{-1}) = M_{\mathscr{B}}(f)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{\lambda_1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\frac{1}{\lambda_n}} \end{pmatrix}^2.$$

Soit g l'unique endomorphisme de E tel que $M_{\mathscr{B}}(g) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{\lambda_1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\frac{1}{\lambda_n}} \end{pmatrix}$. Un tel endomorphisme existe et est unique car l'application

$$\Phi_{\mathscr{B}} : g \in \mathscr{L}(E) \mapsto M_{\mathscr{B}}(g) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Puisque cette matrice est symétrique dans une base orthonormée, g est un endomorphisme symétrique, à valeurs propres strictement positives, et tel que $M_{\mathscr{B}}(g^2) = M_{\mathscr{B}}(g)^2 = M_{\mathscr{B}}(f^{-1})$. Ainsi on a bien $g^2 = f^{-1}$ (par injectivité de $\Phi_{\mathscr{B}}$).

(c) Montrons que c'est une famille orthonormale. Soit donc $1 \leq i, j \leq n$. On a :

$$\begin{aligned} \langle g(u_i), g(u_j) \rangle &= \langle u_i, g^2(u_j) \rangle \text{ car } g \text{ sym.} \\ &= \langle u_i, f^{-1}(u_j) \rangle \end{aligned}$$

On cherche donc $f^{-1}(u_j)$. On a pour cela :

$$u_j = f \circ f^{-1}(u_j) = \sum_{k=1}^{n} \langle f^{-1}(u_j), u_k \rangle u_k$$

Par liberté de la famille $(u_1, \dots, u_n)$, on en déduit que :

$$\langle f^{-1}(u_j), u_k \rangle = \begin{cases} 1 \text{ si } j = k \\ 0 \text{ si } j \neq k \end{cases}.$$

D'où en reportant dans le calcul précédent :

$$\langle g(u_i), g(u_j) \rangle = \langle u_i, f^{-1}(u_j) \rangle = \begin{cases} 1 \text{ si } j = i \\ 0 \text{ si } j \neq i \end{cases}.$$

Ainsi $(g(u_1), \dots, g(u_n))$ est une famille orthonormée de E. Comme son cardinal est égal à $\dim(E)$, c'est donc une base orthonormée de E.

Exercice 18.14 (★★★★ - Endomorphismes antisymétriques - HEC 2017 - ✍)
Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$ muni d'un produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
Dans tout l'exercice, on considère un endomorphisme φ de E antisymétrique, c'est-à-dire tel que :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle x, \varphi(y) \rangle = -\langle \varphi(x), y \rangle.$$

1. Établir les propriétés suivantes :
   (a) Pour tout $x \in E$, on a : $\langle x, \varphi(x) \rangle = 0$.
   (b) $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\varphi)^{\perp}$.
   (c) Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que si F est stable par φ, alors $F^{\perp}$ est stable par φ.
   (d) $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\varphi^2)$, où $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$.
   (e) Le spectre de φ est soit vide, soit réduit à $\{0\}$.
2. Montrer que toutes les valeurs propres de φ^2 sont négatives ou nulles.
3. Soit :
   - F un sous-espace vectoriel de E de dimension $p \geq 2$,
   - α un réel strictement positif,
   - u un endomorphisme antisymétrique de F tel que $u^2 = -\alpha^2 \mathrm{Id}_F$, où Id_F est l'endomorphisme identité de F.

   (a) On suppose que $p = 2$. Établir l'existence d'une base orthonormale de F dans laquelle la matrice A_α de u est donnée par : $A_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$.
   (b) À l'aide d'un raisonnement par récurrence sur p, montrer qu'il existe une base orthonormale de F dans laquelle la matrice B_α de u est de la forme :

$$B_\alpha = \begin{pmatrix} A_\alpha & (0) & \dots & (0) \\ (0) & A_\alpha & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (0) \\ (0) & \dots & (0) & A_\alpha \end{pmatrix}.$$

1. (a) Comme φ est antisymétrique, on a pour tout $x \in E$ (en prenant $y = x$ dans la définition) :
$$\langle \varphi(x), x \rangle = -\langle x, \varphi(x) \rangle \quad \Rightarrow \langle x, \varphi(x) \rangle = 0.$$

Remarque. On peut montrer que la réciproque est vraie : suppososons que φ soit un endomorphisme de E tel que pour tout $x \in E$, $\langle x, \varphi(x) \rangle = 0$. Pour tout $x, y \in E$, on a donc :

$$\begin{aligned} 0 &= \langle x+y, \varphi(x+y) \rangle = \langle x+y, \varphi(x) + \varphi(y) \rangle \text{ car } \varphi \text{ lin.} \\ &= \underbrace{\langle x, \varphi(x) \rangle}_{=0} + \langle x, \varphi(y) \rangle + \langle y, \varphi(x) \rangle + \underbrace{\langle y, \varphi(y) \rangle}_{=0} \text{ par bil. du prod. scal.} \\ &= \langle x, \varphi(y) \rangle + \langle \varphi(x), y \rangle \end{aligned}$$

Donc φ est bien un endomorphisme antisymétrique.

(b) Soit $x \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ et $y \in \mathrm{Im}(\varphi)$. Il existe $z \in E$ tel que $y = \varphi(z)$. On a :

$$\langle x, y\rangle = \langle x, \varphi(z)\rangle = -\langle \varphi(x), z\rangle = -\langle 0_E, z\rangle = 0$$

Les sous-espaces $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$ sont donc orthogonaux. Ils sont donc en particulier en somme direct (propriété du cours). Comme de plus par le théorème du rang, on a $\dim E = \dim \mathrm{Ker}(\varphi) + \dim \mathrm{Im}(\varphi)$, $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$ sont bien supplémentaires orthogonaux dans E.

(c) Soit F stable par φ. Montrons que $F^\perp$ est aussi stable par φ, c'est-à-dire que pour tout $x \in F^\perp$, on a $\varphi(x) \in F^\perp$. Prenons pour cela $y \in F$. On a :

$$\langle \varphi(x), y\rangle \underset{\varphi \text{ antisym.}}{=} -\langle \underbrace{x}_{\in F^\perp}, \underbrace{\varphi(y)}_{\in F}\rangle = 0.$$

Donc $\varphi(x) \in F^\perp$, et $F^\perp$ est bien stable par φ.

(d) On a déjà que $\mathrm{Ker}(\varphi) \subset \mathrm{Ker}(\varphi^2)$ puisque pour tout $x \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, on a $\varphi(x) = 0_E$ et donc $\varphi^2(x) = \varphi(0_E) = 0_E$.

Montrons l'inclusion réciproque. Soit $x \in \mathrm{Ker}(\varphi^2)$. On a donc $\varphi(x) \in \mathrm{Ker}(\varphi) \cap \mathrm{Im}(\varphi) = \{0_E\}$ puisque $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$ sont en somme direct. Donc $\varphi(x) = 0_E$ et x appartient bien à $\mathrm{Ker}(\varphi)$. D'où le résultat.

(e) Supposons qu'il existe une valeur propre λ de φ et $x \neq 0_E$ un vecteur propre associé. On a :

$$0 = \langle \varphi(x), x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda\langle x, x\rangle = \lambda\|x\|^2.$$

Puisque $\|x\|^2 \neq 0$, on a bien que $\lambda = 0$. Ainsi le spectre de φ est soit vide, soit réduit à $\{0\}$.

Remarque. On a montré en cours pour les endomorphismes symétriques que :

$$f \text{ symétrique} \quad \Leftrightarrow \quad M_{\mathscr{B}}(f) \text{ symétrique}$$

lorsque $\mathscr{B}$ est une **base orthonormée**. On peut imaginer une propriété analogue pour les endomorphismes antisymétriques, à savoir :

$$f \text{ antisymétrique} \quad \Leftrightarrow \quad M_{\mathscr{B}}(f) \text{ antisymétrique},$$

toujours en supposant $\mathscr{B}$ **orthonormée**. Montrons que c'est effectivement le cas.

$\Rightarrow$ Soit $A = (a_{i,j})$ la matrice de f dans la base **orthonormée** $\mathscr{B}$.
Supposons que f est antisymétrique. Par définition de la matrice d'une application linéaire, et avec l'expression des coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée, on a pour tout $1 \leq i, j \leq n$:

$$a_{i,j} = \langle e_i, f(e_j)\rangle \underset{f \text{ antisym}}{=} -\langle f(e_i), e_j\rangle = -a_{j,i}$$

$\Leftarrow$ Réciproquement, supposons que ${}^tA = -A$, soit encore que $a_{i,j} = -a_{j,i}$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$. On a donc :

$$\langle e_i, f(e_j)\rangle = -\langle f(e_i), e_j\rangle$$

Prenons $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$ des vecteurs de E. On a :

$$\begin{aligned}
\langle f(x), y\rangle &= \langle f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right), \sum_{i=1}^{n} y_i e_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \langle f(e_i), e_j\rangle \text{ par lin de } f \text{ et bil du prod. scal.} \\
&= -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \langle e_i, f(e_j)\rangle \\
&= -\langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, f\left(\sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right)\rangle \text{ par lin de } f \text{ et bil du prod. scal.} \\
&= -\langle x, f(y)\rangle
\end{aligned}$$

2. Remarquons tout d'abord que φ est symétrique. Pour tout $x, y \in E$, on a :

$$\langle \varphi^2(x), y\rangle \underset{\varphi \text{ antisym.}}{=} -\langle \varphi(x), \varphi(y)\rangle \underset{\varphi \text{ antisym.}}{=} \langle x, \varphi^2(y)\rangle.$$

Donc φ^2 est bien symétrique. Soit maintenant λ une valeur propre de φ^2 (nécessairement réelle donc par le cours), et x un vecteur propre associé. On a :

$$\langle x, \varphi^2(x)\rangle = \lambda\langle x, x\rangle = \lambda\|x\|^2$$

et d'autre part :

$$\langle x, \varphi^2(x)\rangle \underset{\varphi \text{ antisym.}}{=} -\langle \varphi(x), \varphi(x)\rangle = -\|\varphi(x)\|^2.$$

Puisque $\|x\|^2 \neq 0$ (car x vecteur propre), on obtient donc $\lambda = -\dfrac{\|\varphi(x)\|^2}{\|x\|^2} \leq 0$. D'où le résultat.

3. (a) Procédons par analyse-synthèse. On cherche une base orthonormée $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ de F telle que $M_{\mathscr{B}}(u) = A_\alpha$, c'est-à-dire satisfaisant :

$$u(e_1) = \alpha e_2 \quad \text{et} \quad u(e_2) = -\alpha e_1.$$

Comme u est antisymétrique, si on prend e_1 quelconque, $e_2 = \dfrac{1}{\alpha}u(e_1)$, on aura automatiquement que (e_1, e_2) est orthogonale d'après 1.(a). On obtient donc aucune condition sur e_1, à part que c'est un vecteur de norme 1, et on prendra $e_2 = \dfrac{1}{\alpha}u(e_1)$.

Regardons à présent si cela fonctionne : soit e_1 quelconque de norme 1, et prenons $e_2 = \dfrac{1}{\alpha}u(e_1)$. On a :

- d'après 1.(a), (e_1, e_2) est orthogonale,
- $u(e_1) = \alpha e_2$ et $u(e_2) = \dfrac{1}{\alpha}u^2(e_1) = -\dfrac{\alpha^2}{\alpha}e_1 = -\alpha e_1$,
- $\|e_1\| = 1$ par définition, et on a :

$$\begin{aligned}
\|e_2\|^2 = \langle e_2, e_2\rangle = \frac{1}{\alpha^2}\langle u(e_1), u(e_1)\rangle &\underset{u \text{ antisym.}}{=} -\frac{1}{\alpha^2}\langle e_1, u^2(e_1)\rangle \\
&= -\frac{1}{\alpha^2}\langle e_1, -\alpha^2 e_1\rangle = \langle e_1, e_1\rangle = \|e_1\|^2 = 1
\end{aligned}$$

Donc la famille $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ est orthonormale, de cardinal $2 = \dim(F)$. C'est donc une base orthonormée de l'espace F.

- La matrice $M_{\mathscr{B}}(u)$ est bien A_α, d'après le deuxième point précédent.

D'où l'existence de la base orthonormée souhaitée.

(b) Soit F un sous-espace de dimension $p \geq 2$ et u un endomorphisme de F satisfaisant les conditions de l'énoncé.

Soit $\mathscr{B}_1 = (e_1, e_2)$ une famille orthonormale de F définie comme dans la question précédente, dont on vérifie aisément qu'il est stable par u. Prenons $F_1 = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)^\perp$. Si $G = \{0\}$, alors on a l'existence d'une base orthonormée (e_1, e_2) répondant au problème. Sinon, G est stable par u d'après le point 1.(c). Par conséquent, il induit sur ce sous-espace un endomorphisme u_1 qui satisfait exactement les mêmes propriétés que u : il est antisymétrique et tel que $u_1^2 = -\alpha^2 \mathrm{Id}_{F_1}$. Puisque $F_1 \neq \{0\}$, on peut prendre un vecteur e_3 de norme 1 dans F_1, et poser $e_4 = \frac{1}{\alpha} u(e_3)$. On a vu que (e_3, e_4) est une famille orthonormée, et par concaténation, (e_1, e_2, e_3, e_4) est une famille orthonormée de F. Si $F_2 = \mathrm{vect}(e_1, e_2, e_3, e_4)^\perp = \{0\}$, c'est gagné. Sinon, on répète cette construction. Puisque la dimension des sous-espaces F_i est strictement décroissante, cette construction itérative s'arrête lorsqu'on obtient une famille $(e_1, e_2, \dots, e_{2p-1}, e_{2p})$ orthonormale telle que $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_{2p-1}, e_{2p})^\perp = \{0\}$. Ainsi $(e_1, e_2, \dots, e_{2p-1}, e_{2p})$ est une base orthonormée de F (qui est par conséquent de dimension paire nécessairement), dans laquelle la matrice de u est bien de la forme souhaitée.

Formes quadratiques

Exercice 18.15 (★)

1. Déterminer les formes quadratiques q_1 et q_2 associées aux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \ ; \ B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Déterminer la matrice dont proviennent les formes quadratiques suivantes :

$$q_3((x, y, z)) = 2xy + 2xz + 2yz \ ; \ q_4((x, y, z)) = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy - yz.$$

3. Déterminer le signe des 4 formes quadratiques précédentes.

Exercice 18.16 (★★ - Quotients de Rayleigh - ✍)

Soit E un espace euclidien et f un endomorphisme symétrique de E. Soit λ la plus petite valeur propre de f et μ la plus grande valeur propre.

1. Montrer que pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$, on a : $\lambda \leq \dfrac{\langle f(x), x \rangle}{\|x\|^2} \leq \mu$.

2. En déduire que :

$$\lambda = \min_{x \neq 0} \frac{\langle f(x), x \rangle}{\|x\|^2} \text{ et que } \mu = \max_{x \neq 0} \frac{\langle f(x), x \rangle}{\|x\|^2}.$$

Exercice 18.17 (★★★ - Matrices symétriques définies positives - ✍)

On dit qu'une matrice symétrique M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est définie positive si sa forme quadratique q_M est strictement positive, soit si pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul, on a $q_M(X) = {}^tXMX > 0$.

1. Soit $L \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ inversible. Montrer que $M = {}^tLL$ est une matrice symétrique définie positive.
2. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   (i) M est définie positive ;
   (ii) les valeurs propres de M sont strictement positives ;
   (iii) il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D à coefficients diagonaux strictement positifs telles que $M = {}^tPDP$;
   (iv) il existe une matrice symétrique et inversible $L \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = L^2$.
3. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ tel que $L = P(M)$.

Exercice 18.18 (★★★ - QSP HEC 2022)
Soient a, b deux réels vérifiant $a < b$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
Soient $f_1, \ldots, f_n$ des fonctions continues sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On considère la matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont donnés pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ par :

$$a_{i,j} = \int_a^b f_i(t) f_j(t) \, \mathrm{d}t.$$

Montrer que les valeurs propres de A sont toutes réelles positives. Sous quelle condition sont-elles toutes strictement positives ?
