TD17

# Fonctions de plusieurs variables sur $\mathbb{R}^n$

## Fonctions de plusieurs variables, continuité

### Exercice 17.1 (★)

Pour chaque fonction ci-dessous, déterminer les lignes de niveau $\lambda$ pour $\lambda \in \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ et les représenter graphiquement. En déduire la représentation graphique de la fonction.

$$(x, y) \mapsto 2x + y + 1 \quad ; \quad (x, y) \mapsto x^2 \quad ; \quad (x, y) \mapsto xy \quad ; \quad (x, y) \mapsto 2\sin(\sqrt{x^2 + y^2}).$$

Vérifier les lignes de niveau et la représentation graphique de la fonction en utilisant `Python`.

---

### Exercice 17.2 (★★)

Étudier la continuité de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \sin(x^2 + y^2 + z^2), & \text{si } (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

---

## Calcul différentiel

### Exercice 17.3 (★)

Pour chacune des fonctions suivantes, montrer qu'elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur son ensemble de définition, et calculer son gradient.

$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto e^{xyz} \end{cases} ;$$

$$f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto \dfrac{y \exp(z^2)}{x^2 + x + 1} \end{cases} ;$$

$$f_3 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto \ln(x^2 + y^2 + 1) \end{cases} ;$$

$$f_4 : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \to \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) & \mapsto (x_1^2 + \dots + x_n^2) e^{-(x_1^2 + \dots + x_n^2)} \end{cases} .$$

---

### Exercice 17.4 (★★)

Soit $f$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(x, y) = \displaystyle\int_x^{xy} f(t)\, \mathrm{d}t$.

Montrer que $g$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et déterminer ses dérivées partielles.

---

### Exercice 17.5 (★)

Soit $f : (x, y) \mapsto (x - y)^2 + x^3 + y^3$.

1. Justifier l'existence et écrire le développement limité à l'ordre 1 de la fonction $f$ en un point $(a, b)$ quelconque.
2. Déterminer l'équation du plan affine tangent au graphe de $f$ aux points $(0, -1)$, $(0, 0)$ et $(-1, -1)$.
3. Tracer le graphe de $f$ ainsi que les plans tangents aux points $(0, -1)$, $(0, 0)$ et $(-1, -1)$ à l'aide du logiciel `Python`.

---

### Exercice 17.6 (★★)

Soit $f$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$, et soit $F$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par $F(x,y,z) = f(x-y, y-z, z-x)$.

1. Soit $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$. Montrer que la fonction
$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto f(x-y_0, y_0-z_0, z_0-x) \end{cases}$$
est dérivable en $x_0$ et déterminer $\varphi'(x_0)$. Que peut-on en déduire sur la dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à $x$ de $F$ ?

2. Montrer que pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on a :
$$\partial_1(F)(x,y,z) + \partial_2(F)(x,y,z) + \partial_3(F)(x,y,z) = 0.$$

---

### Exercice 17.7 (★★ - Gradient et lignes de niveau)

Soit $f(x,y) = (y-x^2)^3 - 1$.

1. Montrer que les lignes de niveau de $f$ sont des paraboles.
2. Montrer que $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, et déterminer ses dérivées partielles.
3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On note $\mathscr{C}_\lambda$ la ligne de niveau $\lambda$ de $f$. Soit $(x_0, y_0) \in \mathscr{C}_\lambda$.
   (a) Déterminer un vecteur directeur de la tangente à $\mathscr{C}_\lambda$ en $(x_0, y_0)$.
   (b) Montrer que ce vecteur est orthogonal à $\nabla f(x_0, y_0)$.
4. Vérifier ce résultat à l'aide du logiciel `Python`, en traçant sur un même graphique les lignes de niveau et le champ de gradients de $f$.

---

### Exercice 17.8 (★★★)

Étudier la continuité, l'existence de dérivées partielles, leur continuité ainsi que la classe $\mathscr{C}^1$ des fonctions :
$$f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad ; \quad g : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \begin{cases} y^2 \sin\left(\dfrac{x}{y}\right) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}.$$

---

## Recherche d'extremum

### Exercice 17.9 (★)

1. Soit $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 + 2x + 3y^2 - 6y + 1$.
   (a) Représenter le graphe de $f$ à l'aide de `Python`. Déterminer graphiquement le(s) point(s) critique(s) de $f$. Quel est la nature de ce(s) point(s) critique(s) ?
   (b) Vérifier ces résultats par le calcul.
2. Mêmes questions pour $g : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^3 + y^3 - 3xy + 1$.

---

### Exercice 17.10 (★)

Déterminer les points critiques et les extrema éventuels des fonctions suivantes :
$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto \frac{x^2}{2} + xyz + y - z \end{cases} ; \qquad f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto xyz + xy + yz + xz \end{cases}.$$

---

### Exercice 17.11 (★★)

Dans la suite, on considère deux fonctions $f$ et $h$ définies respectivement sur $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}$ par

$$f(x,y) = 2e^{-x} + 3x^2 - 2xy + y^2 \quad \text{et} \quad h(x) = 2e^{-x} + 2x^2.$$

1. Montrer que l'équation $e^{-x} - 2x = 0$ admet une unique solution $\alpha$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et admet un unique point critique.
3. Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ : $f(x,y) \geq h(x)$.
4. Étudier les variations de $h$ et en déduire que $f$ admet un minimum, et exprimer ce minimum en fonction de $\alpha$.

---

### Exercice 17.12 (★★)

Déterminer si les fonctions suivantes admettent ou non des extrema, et déterminer l'ensemble des points où ces extrema sont atteints.

$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto x^4 - 4x^2y^2 + 4y^4 \end{cases} ; \qquad f_3 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto -2x^2 - 2xy - 3y^2 - 4 \end{cases} ;$$

$$f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto x^2 + xy + y^2 \end{cases} ; \qquad f_4 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto \frac{x^2}{2} + y^2 + 2z^2 - xy - xz + x^4 \end{cases} .$$

---

### Exercice 17.13 (★★ - Étude d'un extremum par variation de fonctions)

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$.

1. Montrer que $f$ n'admet pas de maximum.
2. On se propose de montrer que $f$ possède un minimum.
   (a) En considérant $f(-x,-y)$, montrer qu'on peut se restreindre à $y \geq 0$.
   (b) Pour $y \geq 0$ fixé, montrer que la fonction $x \mapsto f(x,y)$ admet un minimum noté $g(y)$.
   (c) Étudier les variations de $y \mapsto g(y)$ et en déduire que $f$ admet un minimum, et préciser le(s) point(s) où ce minimum est atteint.

---

### Exercice 17.14 (★★)

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \dfrac{xy}{(1+x^2)(1+y^2)}$.

1. Montrer que $f$ est $\mathscr{C}^1$ et déterminer son gradient.
2. Montrer que $(0,0)$ est un point critique de $f$ et que $f$ admet quatre autres points critiques, de la forme $(a,b)$, $(-a,b)$, $(a,-b)$, $(-a,-b)$, avec $a > 0, b > 0$.
3. Déterminer la nature du point critique $(0,0)$.
4. On souhaite étudier la nature de $(a,b)$. Pour cela, on cherche à déterminer le signe de $f(x,y) - f(a,b)$.
   (a) Soit $y \in \mathbb{R}$ fixé. Montrer que $f(x,y) - f(a,b) = \dfrac{P(x,y)}{4(1+x^2)(1+y^2)}$ où $x \mapsto P(x,y)$ est un polynôme de degré 2 dont on calculera son discriminant $\Delta(y)$.
   (b) Montrer que la fonction $\Delta$ est de signe constant.
   (c) Conclure.
5. Déterminer de même la nature des trois autres points critiques.
6. Dresser le tableau de variations de $g : t \mapsto \dfrac{t}{1+t^2}$. Retrouver alors les résultats précédents.

---

### Exercice 17.15 (★★)

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$f(x,y,z) = (x+y+z)e^{-\frac{1}{6}(x^2+y^2+z^2)}$$

1. Montrer que $f$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$ et déterminer ses points critiques.
2. Montrer que pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $|x+y+z| \leq \sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.
3. En étudiant la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $h(t) = \sqrt{t}e^{-t/6}$, déterminer la nature des points critiques de $f$.

---

### Exercice 17.16 (★★★)

Soit $a$ et $b$ deux vecteurs non colinéaires de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ et $f$ la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) = \langle x, a\rangle^2 + \langle x, b\rangle^2.$$

1. Justifier que $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et calculer les dérivées partielles de $f$. En déduire une expression du gradient de $f$.
2. Déterminer l'ensemble des points critiques de $f$.
3. Étudier les extrema de $f$.

---

### Exercice 17.17 (★★★)

Soit $n \geq 1$ et soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$f(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i=1}^n x_i^2 + \left(1 - \sum_{i=1}^n x_i\right)^2.$$

1. Montrer que $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ et qu'elle possède un unique point critique $a = (a_1,\dots,a_n)$.
2. Pour $(h_1,\dots,h_n) \in \mathbb{R}^n$, expliciter $f(a_1+h_1,\dots,a_n+h_n) - f(a_1,\dots,a_n)$, et en déduire la nature du point critique $a$.

---

### Exercice 17.18 (★★★★ - Fonctions convexes sur $\mathbb{R}^n$ - Oral ESCP 2001 - ✍)

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique, le produit scalaire étant noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et la norme associée $\|\cdot\|$.

Soit $f$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ définie sur $\mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, convexe, c'est-à-dire vérifiant pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2$ et pour tout réel $\lambda \in [0,1]$ :

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

Pour tout $(h,x) \in (\mathbb{R}^n)^2$ fixé, on définit la fonction $\varphi_{h,x}$ de la variable réelle $t$ par :

$$\varphi_{h,x}(t) = f(x+th).$$

1. (a) Montrer que $\varphi_{h,x}$ est une fonction convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
   (b) En déduire que $\varphi'_{h,x}(0) \leq \varphi_{h,x}(1) - \varphi_{h,x}(0)$.
2. Montrer que pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, on a
$$\langle \nabla f(x), y-x\rangle \leq f(y) - f(x).$$
3. On suppose dans cette question que $f(0) = 0$ et que $\nabla f(0) = 0$. On suppose également que $f$ est strictement convexe, c'est-à-dire qu'elle vérifie pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2$ tels que $x \neq y$, pour tout réel $\lambda \in ]0,1[$ :
$$f((1-\lambda)x + \lambda y) < (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y).$$
   Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $f(0) \leq f(x)$, puis que si $x \neq 0$, alors $f(x) \neq 0$.

---