TD17

# Fonctions de plusieurs variables sur $\mathbb{R}^n$

## Fonctions de plusieurs variables, continuité

### Exercice 17.1 (★)

Pour chaque fonction ci-dessous, déterminer les lignes de niveau $\lambda$ pour $\lambda \in \{-2,-1,0,1,2,3,4\}$ et les représenter graphiquement. En déduire la représentation graphique de la fonction.

$$(x,y) \mapsto 2x+y+1 \quad ; \quad (x,y) \mapsto x^2 \quad ; \quad (x,y) \mapsto xy \quad ; \quad (x,y) \mapsto 2\sin(\sqrt{x^2+y^2}).$$

Vérifier les lignes de niveau et la représentation graphique de la fonction en utilisant `Python`.

---

### Exercice 17.2 (★★)

Étudier la continuité de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}\sin(x^2+y^2+z^2), & \text{si } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

---

## Calcul différentiel

### Exercice 17.3 (★)

Pour chacune des fonctions suivantes, montrer qu'elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur son ensemble de définition, et calculer son gradient.

$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto e^{xyz} \end{cases} ;$$

$$f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto \dfrac{y\exp(z^2)}{x^2+x+1} \end{cases} ;$$

$$f_3 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto \ln(x^2+y^2+1) \end{cases} ;$$

$$f_4 : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \to \mathbb{R} \\ (x_1,\dots,x_n) & \mapsto (x_1^2+\dots+x_n^2)e^{-(x_1^2+\dots+x_n^2)} \end{cases}.$$

---

### Exercice 17.4 (★★)

Soit $f$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(x,y) = \displaystyle\int_x^{xy} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Montrer que $g$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et déterminer ses dérivées partielles.

> Puisque $f$ est continue sur $\mathbb{R}$, elle admet une primitive $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On a alors pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,
> $$g(x,y) = F(xy) - F(x).$$
> Les applications $(x,y) \mapsto xy$ et $(x,y) \mapsto x$ sont polynomiales donc $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Par composition et somme, on en déduit que $g$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et on a pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ :
> $$\partial_1 g(x,y) = yF'(xy) - F'(x) = yf(xy) - f(x) \quad \text{et} \quad \partial_2 g(x,y) = xF'(xy) = xf(xy).$$

---

**Exercice 17.5 (★)**
Soit $f : (x, y) \mapsto (x - y)^2 + x^3 + y^3$.

1. Justifier l'existence et écrire le développement limité à l'ordre 1 de la fonction $f$ en un point $(a, b)$ quelconque.
2. Déterminer l'équation du plan affine tangent au graphe de $f$ aux points $(0, -1)$, $(0, 0)$ et $(-1, -1)$.
3. Tracer le graphe de $f$ ainsi que les plans tangents aux points $(0, -1)$, $(0, 0)$ et $(-1, -1)$ à l'aide du logiciel `Python`.

---

**Exercice 17.6 (★★)**
Soit $f$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$, et soit $F$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par $F(x, y, z) = f(x-y, y-z, z-x)$.

1. Soit $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$. Montrer que la fonction
$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto f(x - y_0, y_0 - z_0, z_0 - x) \end{cases}$$
est dérivable en $x_0$ et déterminer $\varphi'(x_0)$. Que peut-on en déduire sur la dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à $x$ de $F$ ?
2. Montrer que pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a :
$$\partial_1(F)(x, y, z) + \partial_2(F)(x, y, z) + \partial_3(F)(x, y, z) = 0.$$

> 1. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = f(a + xu)$ où $a = (-y_0, y_0 - z_0, z_0)$ et $u = (1, 0, -1)$. Puisque $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$, on sait que $\varphi$ est dérivable en $x_0$ et on a :
> $$\varphi'(x_0) = \langle \nabla f(a+x_0u), u\rangle = \partial_1 f(a+x_0u) - \partial_3 f(a+x_0u) = \partial_1 f(x_0-y_0, y_0-z_0, z_0-x_0) - \partial_3 f(x_0-y_0, y_0-z_0, z_0-x_0).$$
> Ceci étant vrai pour tout $(x_0, y_0, z_0)$, on en déduit que $F$ admet une dérivée partielle par rapport à la première variable en tout point de $\mathbb{R}$, et on a :
> $$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ \partial_1 F(x, y, z) = \partial_1 f(x - y, y - z, z - x) - \partial_3 f(x - y, y - z, z - x).$$
> Notons de plus que $\partial_1 F$ est continue sur $\mathbb{R}^3$ car $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$.
> 2. En procédant de la même manière, on montre que $F$ admet des dérivées partielles par rapport aux deuxième et troisième variables, et on a pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ :
> $$\partial_2 F(x, y, z) = \partial_2 f(x - y, y - z, z - x) - \partial_1 f(x - y, y - z, z - x),$$
> $$\partial_3 F(x, y, z) = \partial_3 f(x - y, y - z, z - x) - \partial_2 f(x - y, y - z, z - x).$$
> Ces dérivées partielles étant continues sur $\mathbb{R}^3$, $F$ est donc de classe $\mathscr{C}^1$, et on a pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ :
> $$\begin{aligned} \partial_1 F(x, y, z) + \partial_2 F(x, y, z) + \partial_3 F(x, y, z) &= \partial_1 f(x - y, y - z, z - x) - \partial_3 f(x - y, y - z, z - x) \\ &\quad + \partial_2 f(x - y, y - z, z - x) - \partial_1 f(x - y, y - z, z - x) \\ &\quad + \partial_3 f(x - y, y - z, z - x) - \partial_2 f(x - y, y - z, z - x) = 0 \end{aligned}$$

**Exercice 17.7 (★★ - Gradient et lignes de niveau)**
Soit $f(x,y) = (y-x^2)^3 - 1$.

1. Montrer que les lignes de niveau de $f$ sont des paraboles.
2. Montrer que $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, et déterminer ses dérivées partielles.
3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On note $\mathscr{C}_\lambda$ la ligne de niveau $\lambda$ de $f$. Soit $(x_0, y_0) \in \mathscr{C}_\lambda$.
   (a) Déterminer un vecteur directeur de la tangente à $\mathscr{C}_\lambda$ en $(x_0, y_0)$.
   (b) Montrer que ce vecteur est orthogonal à $\nabla f(x_0, y_0)$.
4. Vérifier ce résultat à l'aide du logiciel `Python`, en traçant sur un même graphique les lignes de niveau et le champ de gradients de $f$.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. La courbe de niveau $\lambda$ de $f$ est :
$$\begin{aligned}\mathscr{C}_\lambda(f) &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = \lambda\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (y-x^2)^3 = \lambda + 1\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 + \sqrt[3]{\lambda+1}\}.\end{aligned}$$
On reconnait alors l'équation d'une parabole.
2. La fonction $f$ est polynomiale donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Et on obtient par calcul :
$$\nabla f(x,y) = (-6x(y-x^2)^2, 3(y-x^2)^2).$$
3. (a) Si on note $h : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 + \sqrt[3]{\lambda+1}$, l'équation de la tangente à $h$ en $x_0$ (qui coïncide avec celle de $\mathscr{C}_\lambda$ en $(x_0, y_0)$) est :
$$y = h(x_0) + h'(x_0)(x - x_0).$$
Or $h'(x_0) = 2x_0$, et donc un vecteur directeur de cette tangente est $\overrightarrow{u} = (1, h'(x_0)) = (1, 2x_0)$.
   (b) On calcule le produit scalaire :
$$\langle \overrightarrow{u}, \nabla f(x_0, y_0)\rangle = -6x_0(y_0 - x_0^2)^2 + 2x_0 \times 3(y_0 - x_0^2)^2 = 0.$$
4. Je vous renvoie au TP7 sur les fonctions de plusieurs variables.

**Exercice 17.8 (★★★)**
Étudier la continuité, l'existence de dérivées partielles, leur continuité ainsi que la classe $\mathscr{C}^1$ des fonctions :
$$f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad ; \quad g : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \begin{cases} y^2 \sin\left(\dfrac{x}{y}\right) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}.$$

Le cas de la fonction $f$ a été traité en TD.

Étudions la continuité de la fonction $g$. Les fonctions $(x,y) \mapsto x$ et $(x,y) \mapsto y$ étant polynomiales, elles sont donc continues sur $\mathbb{R}^2$. Par quotient, composition par la fonction sinus qui est continue sur $\mathbb{R}$, et produit, $g$ est donc continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0),\ x \in \mathbb{R}\}$.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Étudions la continuité de $g$ en $(x_0, 0)$. Prenons pour cela $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ avec $y \neq 0$ et majorons :
$$|g(x,y) - g(x_0, 0)| = \left| y^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right)\right| \leq y^2 \leq \|(x - x_0, y)\|^2.$$
Soit $\varepsilon > 0$. On déduit de cette majoration l'existence d'un réel $\alpha = \sqrt{\varepsilon} > 0$ tel que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ :
$$\|(x,y) - (x_0, 0)\| \leq \alpha \quad \Rightarrow \quad |g(x,y) - g(x_0,0)| \leq \varepsilon.$$

Par définition, $g$ est donc continue au point $(x_0, 0)$. Ceci étant vrai pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, $g$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

De même que pour la continuité, on montre que $g$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0),\ x \in \mathbb{R}\}$, et en tout point $(x,y)$ avec $y \neq 0$ :

$$\partial_1 g(x,y) = y\cos\left(\frac{x}{y}\right) \quad \text{et} \quad \partial_2 g(x,y) = 2y\sin\left(\frac{x}{y}\right) - x\cos\left(\frac{x}{y}\right).$$

Fixons $x_0 \in \mathbb{R}$ et étudions l'existence de dérivées partielles d'ordre 1 pour $g$ en $(x_0,0)$. Pour tout $t \neq 0$ :

$$\frac{g(x_0+t,0)-g(x_0,0)}{t} = 0 \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Donc $\partial_1 g(x_0,0)$ existe et vaut 0. De même :

$$\frac{g(x_0,t)-g(x_0,0)}{t} = t\sin\left(\frac{x_0}{t}\right) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$$

car sin est une fonction bornée. Ainsi, $\partial_2 g(x_0,0)$ existe également et vaut 0.

Étudions la continuité de $\partial_1 g$ au point $(x_0,0)$. Pour cela, majorons pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y \neq 0$ :

$$|\partial_1 g(x,y) - \partial_1 g(x_0,0)| \leq |y| \leq \|(x-x_0,y)\|.$$

On déduit de cette majoration que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha = \varepsilon > 0$ tel que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ :

$$\|(x,y)-(x_0,0)\| \leq \alpha \quad \Rightarrow \quad |\partial_1 g(x,y) - \partial_1 g(x_0,0)| \leq \varepsilon.$$

Donc $\partial_1 g$ est continue au point $(x_0,0)$. Et ceci étant vrai pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, $\partial_1 g$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Soit $x_0 \neq 0$. Pour tout $y \in \mathbb{R}$ avec $y \neq 0$ :

$$\partial_2 g(x_0,y) - \partial_2 g(x_0,0) = 2y\sin\left(\frac{x_0}{y}\right) - x_0\cos\left(\frac{x_0}{y}\right).$$

La limite $\lim\limits_{y\to 0} 2y\sin\left(\frac{x_0}{y}\right)$ existe et vaut 0 car le sinus est borné. Par contre, le terme $\cos\left(\frac{x_0}{y}\right)$ n'a pas de limite lorsque $y \to 0$. Par conséquent, $\partial_2 g(x_0,y) - \partial_2 g(x_0,0)$ n'admet pas de limite lorsque $y \to 0$, et $\partial_2 g$ n'est donc pas continue[a] au point $(x_0,0)$.

Pour conclure, $g$ est continue sur $\mathbb{R}^2$, admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$, mais n'est pas $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ puisque $\partial_2 g$ n'est pas continue sur $\mathbb{R}^2$.

[a] Si $\partial_2 g$ était continue au point $(x_0,0)$, la quantité $2y\sin\left(\frac{x_0}{y}\right) - x_0\cos\left(\frac{x_0}{y}\right)$ aurait une limite nulle lorsque $y \to 0$.

---

# Recherche d'extremum

### Exercice 17.9 (★)

1. Soit $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 + 2x + 3y^2 - 6y + 1$.
   (a) Représenter le graphe de $f$ à l'aide de `Python`. Déterminer graphiquement le(s) point(s) critique(s) de $f$. Quel est la nature de ce(s) point(s) critique(s) ?
   (b) Vérifier ces résultats par le calcul.
2. Mêmes questions pour $g : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^3 + y^3 - 3xy + 1$.

---

### Exercice 17.10 (★)

Déterminer les points critiques et les extrema éventuels des fonctions suivantes :

$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto \frac{x^2}{2} + xyz + y - z \end{cases} ; \qquad f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto xyz + xy + yz + xz \end{cases} .$$

---

### Exercice 17.11 (★★)

Dans la suite, on considère deux fonctions $f$ et $h$ définies respectivement sur $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}$ par

$$f(x,y) = 2e^{-x} + 3x^2 - 2xy + y^2 \quad \text{et} \quad h(x) = 2e^{-x} + 2x^2.$$

1. Montrer que l'équation $e^{-x} - 2x = 0$ admet une unique solution $\alpha$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et admet un unique point critique.
3. Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ : $f(x,y) \geq h(x)$.
4. Étudier les variations de $h$ et en déduire que $f$ admet un minimum, et exprimer ce minimum en fonction de $\alpha$.

---

### Exercice 17.12 (★★)

Déterminer si les fonctions suivantes admettent ou non des extrema, et déterminer l'ensemble des points où ces extrema sont atteints.

$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto x^4 - 4x^2y^2 + 4y^4 \end{cases} ; \qquad f_3 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto -2x^2 - 2xy - 3y^2 - 4 \end{cases} ;$$

$$f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto x^2 + xy + y^2 \end{cases} ; \qquad f_4 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto \frac{x^2}{2} + y^2 + 2z^2 - xy - xz + x^4 \end{cases} .$$

---

### Exercice 17.13 (★★ - Étude d'un extremum par variation de fonctions)

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$.

1. Montrer que $f$ n'admet pas de maximum.
2. On se propose de montrer que $f$ possède un minimum.
   (a) En considérant $f(-x,-y)$, montrer qu'on peut se restreindre à $y \geq 0$.
   (b) Pour $y \geq 0$ fixé, montrer que la fonction $x \mapsto f(x,y)$ admet un minimum noté $g(y)$.
   (c) Étudier les variations de $y \mapsto g(y)$ et en déduire que $f$ admet un minimum, et préciser le(s) point(s) où ce minimum est atteint.

---

### Exercice 17.14 (★★)

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \dfrac{xy}{(1+x^2)(1+y^2)}$.

1. Montrer que $f$ est $\mathscr{C}^1$ et déterminer son gradient.
2. Montrer que $(0,0)$ est un point critique de $f$ et que $f$ admet quatre autres points critiques, de la forme $(a,b)$, $(-a,b)$, $(a,-b)$, $(-a,-b)$, avec $a > 0, b > 0$.
3. Déterminer la nature du point critique $(0,0)$.
4. On souhaite étudier la nature de $(a,b)$. Pour cela, on cherche à déterminer le signe de $f(x,y) - f(a,b)$.
   (a) Soit $y \in \mathbb{R}$ fixé. Montrer que $f(x,y) - f(a,b) = \dfrac{P(x,y)}{4(1+x^2)(1+y^2)}$ où $x \mapsto P(x,y)$ est un polynôme de degré 2 dont on calculera son discriminant $\Delta(y)$.
   (b) Montrer que la fonction $\Delta$ est de signe constant.
   (c) Conclure.

5. Déterminer de même la nature des trois autres points critiques.

6. Dresser le tableau de variations de $g : t \mapsto \dfrac{t}{1+t^2}$. Retrouver alors les résultats précédents.

---

**Exercice 17.15 (★★)**
Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$f(x,y,z) = (x+y+z)e^{-\frac{1}{6}(x^2+y^2+z^2)}$$

1. Montrer que $f$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$ et déterminer ses points critiques.

2. Montrer que pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $|x+y+z| \leq \sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

3. En étudiant la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $h(t) = \sqrt{t}e^{-t/6}$, déterminer la nature des points critiques de $f$.

---

**Exercice 17.16 (★★★)**
Soit $a$ et $b$ deux vecteurs non colinéaires de $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) et $f$ la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) = \langle x, a\rangle^2 + \langle x, b\rangle^2.$$

1. Justifier que $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et calculer les dérivées partielles de $f$. En déduire une expression du gradient de $f$.

2. Déterminer l'ensemble des points critiques de $f$.

3. Étudier les extrema de $f$.

> 1. On a pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ :
>
> $$f(x) = \langle x, a\rangle^2 + \langle x, b\rangle^2 = \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i\right)^2 + \left(\sum_{j=1}^n b_j x_j\right)^2$$
>
> $f$ est polynomiale, donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$. Et on a pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ :
>
> $$\partial_k f(x) = 2a_k\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i\right) + 2b_k\left(\sum_{j=1}^n b_j x_j\right) = 2a_k\langle a, x\rangle + 2b_k\langle b, x\rangle.$$
>
> On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ :
>
> $$\begin{aligned}\nabla f(x) &= (2a_1\langle a,x\rangle + 2b_1\langle b,x\rangle, \dots, 2a_n\langle a,x\rangle + 2b_n\langle b,x\rangle)\\ &= 2\langle a,x\rangle(a_1,\dots,a_n) + 2\langle b,x\rangle(b_1,\dots,b_n) = 2\langle a,x\rangle a + 2\langle b,x\rangle b.\end{aligned}$$
>
> 2. $x \in \mathbb{R}^n$ est un point critique si et seulement si :
>
> $$\nabla f(x) = 0 \Leftrightarrow \langle a,x\rangle a + \langle b,x\rangle b = 0.$$
>
> Puisque $a$ et $b$ ne sont pas colinéaires, c'est équivalent à $\begin{cases}\langle a,x\rangle = 0\\ \langle b,x\rangle = 0\end{cases}$, soit encore à $x \in \mathrm{Vect}(a,b)^\perp$.
> Ainsi l'ensemble des points critiques est $\mathrm{Vect}(a,b)^\perp$.
>
> 3. Soit $c$ un point critique de $f$. Alors $c$ est orthogonal à $a$ et $b$ et on a :
>
> $$f(c) = 0 \leq \langle x,a\rangle^2 + \langle x,b\rangle^2 = f(x)$$
>
> pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Ainsi $f$ admet un minimum global qui vaut 0, atteint en chacun des points critiques de $f$, c'est à dire en tout point de $\mathrm{Vect}(a,b)^\perp$.

---

**Exercice 17.17 (★★★)**
Soit $n \geq 1$ et soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \left(1 - \sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2.$$

1. Montrer que $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ et qu'elle possède un unique point critique $a = (a_1, \dots, a_n)$.
2. Pour $(h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$, expliciter $f(a_1+h_1, \dots, a_n+h_n) - f(a_1, \dots, a_n)$, et en déduire la nature du point critique $a$.

---

**Exercice 17.18 (★★★★ - Fonctions convexes sur $\mathbb{R}^n$ - Oral ESCP 2001 - ✍)**
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique, le produit scalaire étant noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et la norme associée $\| \cdot \|$.
Soit $f$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ définie sur $\mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, convexe, c'est-à-dire vérifiant pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$ et pour tout réel $\lambda \in [0, 1]$ :

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

Pour tout $(h, x) \in (\mathbb{R}^n)^2$ fixé, on définit la fonction $\varphi_{h,x}$ de la variable réelle $t$ par :

$$\varphi_{h,x}(t) = f(x + th).$$

1. (a) Montrer que $\varphi_{h,x}$ est une fonction convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
   (b) En déduire que $\varphi'_{h,x}(0) \leq \varphi_{h,x}(1) - \varphi_{h,x}(0)$.
2. Montrer que pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, on a

$$\langle \nabla f(x), y - x \rangle \leq f(y) - f(x).$$

3. On suppose dans cette question que $f(0) = 0$ et que $\nabla f(0) = 0$. On suppose également que $f$ est strictement convexe, c'est-à-dire qu'elle vérifie pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$ tels que $x \neq y$, pour tout réel $\lambda \in ]0, 1[$ :

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) < (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

   Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $f(0) \leq f(x)$, puis que si $x \neq 0$, alors $f(x) \neq 0$.

1. (a) Pour tout $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ et pour tout $\lambda \in [0, 1]$, on a :

$$\begin{aligned}
\varphi_{h,x}(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) &= f(x + (\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2)h) \\
&= f((\lambda + 1 - \lambda)x + \lambda t_1 h + (1-\lambda)t_2 h) \\
&= f(\lambda(x + t_1 h) + (1-\lambda)(x + t_2 h)) \\
&\leq \lambda f(x + t_1 h) + (1-\lambda)f(x + t_2 h) \qquad \text{car } f \text{ convexe.} \\
&\leq \lambda \varphi_{h,x}(t_1) + (1-\lambda)\varphi_{h,x}(t_2)
\end{aligned}$$

   Donc $\varphi_{h,x}$ est bien convexe.

   (b) Puisque $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$, on sait par le cours que $\varphi_{h,x}$ est aussi de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Comme de plus $\varphi_{h,x}$ est convexe, son graphe est au dessus de ses tangentes. En particulier, la tangente en 0 d'équation $y = \varphi'_{h,x}(0)(t-0) + \varphi_{h,x}(0)$ est en dessous de son graphe, soit pour $t = 1$ :

$$\varphi'_{h,x}(0) \times 1 + \varphi_{h,x}(0) \leq \varphi_{h,x}(1) \quad \Rightarrow \quad \varphi'_{h,x}(0) \leq \varphi_{h,x}(1) - \varphi_{h,x}(0).$$

2. Or par le cours on a :

$$\varphi'_{h,x}(0) = \langle \nabla f(x), h \rangle$$

   et donc par la question précédente :

$$\langle \nabla f(x), h \rangle \leq f(x + h) - f(x).$$

Ceci étant vrai pour tout $(x,h) \in (\mathbb{R}^n)^2$, on en déduit que pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2$ (en posant $h = y - x$) :

$$\langle \nabla f(x), y - x \rangle \leq f(y) - f(x).$$

3. Supposons que $f(0) = 0$ et que $\nabla f(0) = (0, \ldots, 0)$. Par la question précédente, on obtient que pour tout $y \in \mathbb{R}^n$ (avec $x = 0$) :

$$f(0) = 0 = \langle \nabla f(0), y \rangle \leq f(y) - f(0) = f(y).$$

Ainsi $f$ admet un minimum global en $0 \in \mathbb{R}^n$. Montrons que ce minimum global est atteint uniquement en ce point. Par l'absurde, supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $x \neq 0$ et $f(x) = 0$. Alors pour tout $\lambda \in ]0,1[$, on a :

$$f(\lambda x) = f((1-\lambda)0 + \lambda x) < (1-\lambda) f(0) + \lambda f(x) = 0.$$

Or ceci contredit le résultat obtenu précédemment, puisqu'on a montré que pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, $f(y) \geq 0$. Ainsi on a bien que pour tout $x \neq 0$, $f(x) \neq 0$. $f$ admet donc un minimum global atteint en un unique point qui est $0 \in \mathbb{R}^n$.