

Projection orthogonale

Supplémentaire orthogonal

Exercice 15.1 (★)

Dans \mathbb{R}^4 muni du produit scalaire canonique, déterminer une base de F^\perp dans les deux cas suivants :

$$F = \text{Vect}((1, 1, 0, 2), (0, 1, 3, 2)). \quad F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y - z + t = 0 \text{ et } x - y - t = 0\}.$$

Exercice 15.2 (★)

Dans \mathbb{R}^3 muni du produit scalaire canonique, on note $F = \text{Vect}((0, 0, 2), (1, -1, 0))$.

1. Déterminer une base orthonormée $\mathcal{C} = (u_1, u_2, u_3)$ de E telle que (u_1, u_2) soit une base orthonormée de F et (u_3) une base orthonormée de F^\perp .
2. Notons \mathcal{B} la base canonique de \mathbb{R}^3 . Déterminer $P_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}$.

Exercice 15.3 (★★ - Vecteur normal à un hyperplan -)

1. Soit F un hyperplan d'un espace euclidien E . Montrer qu'il existe $u \in E$ tel que pour tout $x \in E$:

$$x \in F \Leftrightarrow \langle x, u \rangle = 0.$$

Un tel vecteur est dit *normal à l'hyperplan* F .

2. **Application.** Dans \mathbb{R}^3 muni du produit scalaire canonique, on pose $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 2x + 3y - z = 0\}$. Montrer que F est un hyperplan de \mathbb{R}^3 et déterminer un vecteur normal à F .

1. Supposons que F soit un hyperplan, c'est-à-dire que $\dim(F) = \dim(E) - 1$. Dans ce cas, on a :

$$\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F) = \dim(E) - (\dim(E) - 1) = 1.$$

Ainsi F^\perp est une droite vectorielle, et il existe $u \in E$ tel que $F^\perp = \text{Vect}(u)$. On a alors :

$$x \in F \Leftrightarrow x \in (F^\perp)^\perp = (\text{Vect}(u))^\perp \Leftrightarrow \langle x, u \rangle = 0.$$

D'où le résultat.

2. On a :

$$(x, y, z) \in F \Leftrightarrow 2x + 3y - z = 0 \Leftrightarrow \langle (x, y, z), (2, 3, -1) \rangle = 0 \Leftrightarrow (x, y, z) \in \text{Vect}((2, 3, -1))^\perp$$

Ainsi en posant $u = (2, 3, -1)$, on a $F = \text{Vect}(u)^\perp$. On a $\dim(F) = 3 - \dim(\text{Vect}(u)) = 3 - 1 = 2$. Donc F est un hyperplan, et u est un vecteur normal de F .

Remarque. On notera que le vecteur normal s'obtient très facilement à partir de l'équation cartésienne d'un hyperplan. Si par exemple F est l'hyperplan de \mathbb{R}^n d'équation :

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0,$$

alors un vecteur normal à F est donné par $u = (a_1, \dots, a_n)$.

Exercice 15.4 (★★ - Propriétés de l'orthogonal - \hookrightarrow)

Soient F et G des sous-espaces vectoriels d'un espace préhilbertien réel E .

1. Montrer l'implication suivante : $F \subset G \Rightarrow G^\perp \subset F^\perp$.
2. Montrer que :

$$F^\perp \cap G^\perp = (F + G)^\perp \quad ; \quad F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp.$$

3. En déduire que si E est de dimension finie et si F et G sont des sous-espaces supplémentaires de E , alors $E = F^\perp \oplus G^\perp$.

1. Supposons que $F \subset G$, et montrons que $G^\perp \subset F^\perp$. Soit pour cela $y \in G^\perp$, on a par définition que :

$$\forall x \in G, \quad \langle x, y \rangle = 0.$$

Comme $F \subset G$, on en déduit en particulier que :

$$\forall x \in F, \quad \langle x, y \rangle = 0.$$

Ainsi y appartient bien à F^\perp . D'où l'inclusion voulue.

2. Montrons que $F^\perp \cap G^\perp = (F + G)^\perp$.

\subset Soit $x \in F^\perp \cap G^\perp$. Montrons que $x \in (F + G)^\perp$. Pour tout $z \in F + G$, il existe $(y, t) \in F \times G$ tel que $z = y + t$. On obtient que :

$$\langle x, z \rangle = \underbrace{\langle x, y \rangle}_{\in F^\perp} + \underbrace{\langle x, t \rangle}_{\in G^\perp} = 0 + 0 = 0.$$

Donc x appartient bien à $(F + G)^\perp$.

\supset On a $F \subset F + G$, donc d'après la première question, $(F + G)^\perp \subset F^\perp$. De même, on a $(F + G)^\perp \subset G^\perp$. Ainsi on obtient que $(F + G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp$.

Montrons à présent que $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$. On a $F \cap G \subset G$, donc par la question 1, on obtient que $G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$. De même, on a que $F^\perp \subset (F \cap G)^\perp$. Comme de plus, $(F \cap G)^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E , on peut conclure que $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$.

3. Supposons E de dimension finie, et que $E = F \oplus G$. Alors on a :

$$F^\perp \cap G^\perp = (F + G)^\perp = E^\perp = \{0_E\}.$$

Donc les sous-espaces F^\perp et G^\perp sont en somme directe. De plus on a :

$$\dim(F^\perp) + \dim(G^\perp) = \dim(E) - \dim(F) + \dim(E) - \dim(G) = 2 \dim(E) - (\dim(F) + \dim(G)) = \dim(E).$$

Avec ces deux assertions, on a bien que $E = F^\perp \oplus G^\perp$.

Exercice 15.5 (★★ - Orthogonal d'un sous-espace en dimension infinie)

On munit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ du produit scalaire défini par :

$$\forall f, g \in E, \quad \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

On considère l'espace $H = \{f \in E, f(0) = 0\}$.

- a) Soit $f \in H^\perp$. On pose $g : t \mapsto tf(t)$. Que peut-on dire de f et g ? En déduire que $f = 0_E$.
- b) En déduire H^\perp et $(H^\perp)^\perp$. A-t-on $H \oplus H^\perp = E$?

1. On a $g \in H$, et donc $\langle f, g \rangle = 0$ puisque $f \in H^\perp$. On en déduit donc que :

$$\int_0^1 t f(t)^2 dt = 0.$$

Il s'agit de l'intégrale d'une fonction continue, positive. Elle est donc nulle si et seulement si la fonction est nulle. On en déduit donc que $t f(t) = 0$ pour tout $t \in]0, 1[$, on a $f(t) = 0$. Puisque de plus f est continue sur $[0, 1]$, on en déduit que $f = 0$ sur $[0, 1]$. Donc on a $f = 0_E$.

2. Par la question précédente, on en déduit que $H^\perp \subset \{0_E\}$, et donc égal à $\{0_E\}$ puisque c'est un sous-espace vectoriel de E . Mais alors on a :

$$(H^\perp)^\perp = \{0_E\}^\perp = E$$

et

$$H \oplus H^\perp = H \oplus \{0_E\} = H \subsetneq E.$$

En particulier, on notera que H et H^\perp ne sont pas nécessairement supplémentaires en dimension infinie. On a vu en cours que c'était cependant toujours le cas en dimension finie.

Exercice 15.6 (★★★ - QSP ESCP 2014)

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 3$, et (a, b) une famille orthonormale de vecteurs de E . On définit $f \in \mathcal{L}(E)$ par :

$$\forall x \in E, \quad f(x) = \langle x, a \rangle b - \langle x, b \rangle a.$$

1. Montrer que $\text{Im}(f) = \text{Ker}(f)^\perp$.
2. Étudier la diagonalisabilité de f .

1. On a $f(a) = b$ et $f(b) = -a$, de sorte que $\text{Vect}(a, b) \subset \text{Im}(f)$, et l'inclusion réciproque est évidente (puisque $f(x)$ est toujours combinaison linéaire de a et b).

On en déduit donc que $\text{Im } f = \text{Vect}(a, b)$.

De plus, $x \in \text{Ker } f \Leftrightarrow \langle x, a \rangle b - \langle x, b \rangle a = 0$.

Mais (a, b) est une famille libre (car orthogonale sans le vecteur nul) de sorte que

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \langle x, a \rangle = \langle x, b \rangle = 0.$$

On a donc bien $\text{Ker } f = (\text{Im } f)^\perp$.

Et en prenant l'orthogonal des deux membres de cette égalité, on obtient $(\text{Ker } f)^\perp = ((\text{Im } f)^\perp)^\perp = \text{Im } f$ (valide car on est en dimension finie).

2. On sait déjà que 0 est valeur propre de f , et $\dim E_0(f) = \dim \text{Ker } f = n - 2$.

Soit (e_2, \dots, e_n) une base orthonormée de $\text{Ker } f$. Alors (a, b, e_2, \dots, e_n) est une base orthonormée de E , car obtenue par concaténation d'une base orthonormée de $\text{Im } f$ et d'une base orthonormée de son supplémentaire orthogonal.

La matrice de f dans cette base est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Alors λ est valeur propre de f si et seulement si $\text{rg}(A - \lambda I_n) < n$. Mais

$$A - \lambda I_n = \begin{pmatrix} -\lambda & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & -\lambda & \dots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & -\lambda \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ -\lambda & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & -\lambda & \dots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 + \lambda L_1}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda^2 - 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & -\lambda & \dots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & -\lambda \end{pmatrix}$$

Ainsi, λ est valeur propre de A si, et seulement si, $\lambda = 0$ ou $-\lambda^2 - 1 = 0$.

Cette deuxième équation n'a pas de solution, donc 0 est l'unique valeur propre de f .

On sait déjà que $\dim E_0(f) = \dim \text{Ker } f = n - \dim(\text{Vect}(a, b)) = n - 2 < \dim E$ et donc f n'est pas diagonalisable.

Projection orthogonale

Exercice 15.7 (★)

Dans \mathbb{R}^3 muni du produit scalaire canonique, on considère le sous-espace $F = \text{Vect}((1, 1, 0), (-2, 0, 1))$. Déterminer le projeté de $a = (-2, 1, 1)$ sur F .

Exercice 15.8 (★ - Calcul de projetés orthogonaux)

Soit $E = \mathbb{R}_3[x]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$.

- Déterminer le projeté orthogonal de $P_1 = x^2 + x + 1$ sur $F_1 = \mathbb{R}_1[x]$.
- Déterminer le projeté orthogonal de $P_2 = x^3 + x^2 + x + 1$ sur $F_2 = \text{Vect}(x^3 + x, x^2, 1)$.
- Déterminer le projeté orthogonal de $P_3 = x^2 - 1$ sur $F_3 = \text{Vect}(1 + x, x^2 - x)$.

Réponses : $p_{F_1}(P_1) = 2x + \frac{5}{6}$, $p_{F_2}(P_2) = x^3 + x^2 + x + 1$, $p_{F_3}(P_3) = -\frac{20}{11}x^2 + \frac{32}{11}x - \frac{10}{11}$.

Exercice 15.9 (★)

Sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on considère le produit scalaire $\langle A, B \rangle = \text{Tr}({}^tAB)$. Soit $p : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'application définie par $p(M) = \frac{M + {}^tM}{2}$.

- Montrer que p est un projecteur de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et en déterminer l'image et le noyau.
- Montrer que p est le projecteur orthogonal sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. En déduire une expression du projecteur orthogonal sur $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 15.10 (★★)

Pour tout couple de polynômes (P, Q) de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[x]$, on pose :

$$\langle P, Q \rangle = P(0)Q(0) + P'(0)Q'(0) + P''(0)Q''(0).$$

On note $F = \text{Vect}(1 + x, -1 + x + x^2)$ et $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$. On considère φ la projection orthogonale sur F .

- Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[x]$.

2. Déterminer une base orthonormée de F .
3. Calculer $\varphi(1)$, $\varphi(x)$ et $\varphi(x^2)$. En déduire la matrice de φ dans la base canonique.

Exercice 15.11 (★★)

Dans \mathbb{R}^4 muni du produit scalaire usuel, on considère F le sous-espace vectoriel défini par :

$$\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y - z = 0\}.$$

On détermine la matrice dans la base canonique \mathcal{B} de la projection orthogonale p sur F par deux méthodes.

1. Méthode 1.

- (a) Déterminer une base orthonormale de F .
- (b) Déterminer $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(p)$.

2. Méthode 2.

- (a) Déterminer une base orthonormale de F^\perp .
- (b) On note q la projection orthogonale sur F^\perp . Déterminer $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(q)$.
- (c) En déduire $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(p)$.

Exercice 15.12 (★★)

Soit E un espace euclidien de base orthonormée (e_1, \dots, e_n) , soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension 1, et soit p le projecteur orthogonal sur F . Montrer que : $\sum_{i=1}^n \|p(e_i)\|^2 = 1$.

Puisque F est une droite vectorielle, prenons u un vecteur directeur unitaire de F de sorte que $F = \text{Vect}(u)$ et que (u) est une base orthonormée de F . Ainsi on a :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad p(e_i) = \langle u, e_i \rangle u.$$

De plus (e_1, \dots, e_n) étant une base orthonormée de E , on a $u = \sum_{i=1}^n \langle u, e_i \rangle e_i$ et $\|u\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle u, e_i \rangle^2$. On obtient donc :

$$\sum_{i=1}^n \|p(e_i)\|^2 = \sum_{i=1}^n (\langle u, e_i \rangle)^2 = \|u\|^2 = 1$$

Exercice 15.13 (★★★★ - Oral ESCP 2016)

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien muni de la norme $\|\cdot\|$ associée au produit scalaire, et $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant :

$$\forall x \in E, \quad \|u(x)\| \leq \|x\|.$$

1. (a) Soit x un vecteur appartenant à $\text{Ker}(u - \text{id}) \cap \text{Im}(u - \text{id})$. Justifier qu'il existe $y \in E$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, nx = u^n(y) - y$.
- (b) En déduire que $E = \text{Ker}(u - \text{id}) \oplus \text{Im}(u - \text{id})$.
2. On pose : $\forall p \in \mathbb{N}, v_p = \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^p u^k$, et on note w le projecteur sur $\text{Ker}(u - \text{id})$ parallèlement à $\text{Im}(u - \text{id})$.

Montrer que pour tout $x \in E$, la suite $(v_p(x))_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers $w(x)$, c'est-à-dire que :

$$\forall x \in E, \quad \lim_{p \rightarrow +\infty} \|v_p(x) - w(x)\| = 0.$$

3. Soit q un projecteur de E , distinct de l'application nulle.

- (a) Montrer que si $\text{Ker}(q)$ et $\text{Im}(q)$ sont orthogonaux, alors : $\forall x \in E, \|q(x)\| \leq \|x\|$.
- (b) Réciproquement, on suppose que pour tout $x \in E, \|q(x)\| \leq \|x\|$. Soient $x \in \text{Im}(q)$ et $y \in \text{Ker}(q)$. En considérant les vecteurs $z = x + \lambda y$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$, montrer que : $\langle x, y \rangle = 0$.
- (c) En déduire que le projecteur q non nul est orthogonal si, et seulement si, pour tout $x \in E, \|q(x)\| \leq \|x\|$.

4. En déduire que w est un projecteur orthogonal.

1. (a) Soit donc $x \in \text{Ker}(u - \text{id}) \cap \text{Im}(u - \text{id})$. Puisque $x \in \text{Im}(u - \text{id})$, il existe $y \in E$ tel que $x = (u - \text{id})(y) = u(y) - y$. Composons par u cette relation, en notant que $u(x) = x$ puisque $x \in \text{Ker}(u)$:

$$x = u(x) = u^2(y) - u(y)$$

D'où en recomposant par u , on obtient en itérant :

$$x = u^k(y) - u^{k-1}(y) \quad \text{pour tout } k = 1, \dots, n.$$

Sommons ces n égalités, on obtient :

$$nx = (u(y) - y) + (u^2(y) - u(y)) + \dots + (u^n(y) - u^{n-1}(y)) = u^n(y) - y.$$

D'où le résultat.

- (b) On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$n\|x\| = \|u^n(y) - y\| \leq \|u^n(y)\| + \|y\|$$

par l'inégalité triangulaire. Or par hypothèse on a $\|u(y)\| \leq \|y\|$. Par récurrence (que je vous laisse rédiger), on montre que $\|u^n(y)\| \leq \|y\|$. On obtient donc que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$n\|x\| \leq 2\|y\|.$$

Si $x \neq 0_E$, on aurait alors $n \leq \frac{2\|y\|}{\|x\|}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui est impossible. Donc $x = 0_E$ et on a donc $\text{Ker}(u - \text{id}) \cap \text{Im}(u - \text{id}) = \{0_E\}$. Comme de plus $\dim(E) = \dim(\text{Ker}(u - \text{id})) + \dim(\text{Im}(u - \text{id}))$ par le théorème du rang, on a donc que :

$$E = \text{Ker}(u - \text{id}) \oplus \text{Im}(u - \text{id}).$$

2. Soit $x \in E$. D'après 1.(b), il existe un unique couple $(y, z) \in \text{Ker}(u - \text{id}) \times \text{Im}(u - \text{id})$ tel que :

$$x = y + z$$

Pour $y \in \text{Ker}(u - \text{id})$, on a par récurrence immédiate que $u^k(y) = y$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et donc :

$$v_p(y) = \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^p u^k(y) = \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^p y = y.$$

Pour $z \in \text{Im}(u - \text{id})$, il existe $t \in E$ tel que $z = u(t) - t$. On a donc pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$v_p(z) = \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^p u^k(z) = \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^p u^{k+1}(t) - u^k(t) = \frac{1}{p+1} (u^{p+1}(t) - t)$$

par télescopage. On en déduit par inégalité triangulaire que :

$$\|v_p(z)\| \leq \frac{1}{p+1} (\|u^{p+1}(t)\| + \|t\|) \leq \frac{2\|t\|}{p+1}$$

par inégalité triangulaire et en utilisant que $\|u^p(t)\| \leq \|t\|$ comme nous l'avons démontré à la première question. Puisque $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{2\|t\|}{p+1} = 0$, on en déduit par théorème des gendarmes que $\lim_{p \rightarrow +\infty} \|v_p(z)\| = 0$.

Finalement, on obtient donc :

$$v_p(x) - w(x) = v_p(y) + v_p(z) - y = y + v_p(z) - y = v_p(z)$$

D'où $\|v_p(x) - w(x)\| = \|v_p(z)\| \rightarrow 0$ lorsque $p \rightarrow +\infty$ d'après ce qui précède. D'où le résultat.

3. (a) Supposons $\text{Ker}(Q)$ et $\text{Im}(Q)$ orthogonaux. Alors pour tout $x \in E$, $Q(x) - x \in \text{Ker}(Q)$ et $Q(x) \in \text{Im}(Q)$ sont orthogonaux, et on a par le théorème de Pythagore :

$$\|x\|^2 = \|Q(x) + (x - Q(x))\|^2 = \|Q(x)\|^2 + \|x - Q(x)\|^2 \geq \|Q(x)\|^2.$$

D'où en prenant la racine carrée, on obtient $\|Q(x)\| \leq \|x\|$.

- (b) Supposons que $\forall x \in E, \|Q(x)\| \leq \|x\|$. Soit $x \in \text{Im}(Q)$ et $y \in \text{Ker}(Q)$ comme dans l'énoncé. Considérons le vecteur $z = x + \lambda y$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} \|Q(z)\|^2 &\leq \|z\|^2 \Rightarrow \|Q(x)\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\lambda\langle x, y \rangle + \lambda^2\|y\|^2 \\ &\Rightarrow \|x\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\lambda\langle x, y \rangle + \lambda^2\|y\|^2 \\ &\Rightarrow 0 \leq \lambda(2\langle x, y \rangle + \lambda\|y\|^2) \end{aligned}$$

Ainsi on a $\lambda(2\langle x, y \rangle + \lambda\|y\|^2) \geq 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $\|y\| \neq 0$ (ce qu'on peut supposer sinon on a immédiatement $\langle x, y \rangle = 0$), on a donc un polynôme du second degré ayant deux racines $\lambda = 0$ et $\lambda = -2\frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2}$. Il est de signe constant si et seulement si ses racines sont confondues, soit si et seulement si $\langle x, y \rangle = 0$. D'où le résultat.

- (c) On a déjà obtenu l'implication \Rightarrow en 3.(a). Pour la réciproque, on a vu que si $\|Q(x)\| \leq \|x\|$ pour tout $x \in E$, alors $\text{Ker}(Q)$ et $\text{Im}(Q)$ sont orthogonaux : $\text{Ker}(Q) \subset \text{Im}(Q)^\perp$. Comme de plus on a par le théorème du rang que $\dim \text{Ker}(Q) = \dim(E) - \dim(\text{Im}(Q)) = \dim(\text{Im}(Q)^\perp)$, on a donc $\text{Ker}(Q) = \text{Im}(Q)^\perp$ et Q est bien un projecteur orthogonal.

4. On a par inégalité triangulaire que pour tout $x \in E$:

$$\|w(x)\| = \|w(x) - v_p(x) + v_p(x)\| \leq \|w(x) - v_p(x)\| + \|v_p(x)\|$$

Or, toujours par inégalité triangulaire, on a :

$$\|v_p(x)\| \leq \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^p \|u^k(x)\| \leq \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^p \|x\| = \|x\|.$$

Puisque $\lim_{p \rightarrow +\infty} \|w(x) - v_p(x)\| = 0$, on en déduit par passage à la limite dans les inégalités que :

$$\|w(x)\| \leq \|x\|.$$

Par la question précédente, on a donc bien que w est un projecteur orthogonal.

Distance à un sous-espace

Exercice 15.14 (★)

Pour tous réels x et y , on note : $f(x, y) = (2 + x + 2y)^2 + (1 - 2x)^2 + (1 + 2y)^2 + (3 + 2x - y)^2$.

On se place \mathbb{R}^4 muni du produit scalaire canonique. On note $a = (-2, 1, 1, 3)$ et $F = \text{Vect}(u_1, u_2)$ avec $u_1 = (1, 2, 0, -2)$ et $u_2 = (2, 0, -2, 1)$.

1. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $f(x, y) = \|a - (xu_1 + yu_2)\|^2$.
2. En déduire que la fonction f admet un minimum atteint en un unique couple (x_0, y_0) que l'on déterminera, et préciser la valeur de ce minimum.

Exercice 15.15 (★★)

Déterminer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x, y) = (-x + 2)^2 + (3x - y + 1)^2 + (x + y)^2$ soit minimal. Quelle est la valeur minimale de cette fonction ?

La somme de 3 carrés nous indique que l'espace euclidien à considérer est \mathbb{R}^3 muni du produit scalaire canonique. On a :

$$f(x, y) = \|(2 - x, 1 + 3x - y, x + y)\|^2 = \|(2, 1, 0) - x(1, -3, -1) - y(0, 1, -1)\|^2.$$

On cherche ainsi la distance du vecteur $u = (2, 1, 0)$ au sous-espace $F = Vect(v_1, v_2)$ avec $v_1 = (1, -3, -1)$ et $v_2 = (0, 1, -1)$. Calculons donc le projeté orthogonal $p(u)$ de u sur F . On ne dispose pas d'une base orthonormée de F . On va appliquer la méthode du cours : $p(u) \in F$ donc il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $p(u) = av_1 + bv_2$. D'autre part, $u - p(u) \in F^\perp$ donc on a :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \langle u - p(u), v_1 \rangle = 0 \\ \langle u - p(u), v_2 \rangle = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \langle p(u), v_1 \rangle = \langle u, v_1 \rangle \\ \langle p(u), v_2 \rangle = \langle u, v_2 \rangle \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a\langle v_1, v_1 \rangle + b\langle v_2, v_1 \rangle = \langle u, v_1 \rangle \\ a\langle v_1, v_2 \rangle + b\langle v_2, v_2 \rangle = \langle u, v_2 \rangle \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 11a - 2b = -1 \\ -2a + 2b = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1/2 \end{cases} \end{aligned}$$

On peut donc conclure par le cours que f admet un minimum global, atteint en un unique point $(a, b) = (0, 1/2)$. De plus, ce minimum vaut $f(0, 1/2) = 4 + 1/4 + 1/4 = \frac{9}{2}$.

Exercice 15.16 (★★)

Si $P = a_0 + a_1x + a_2x^2$ et $Q = b_0 + b_1x + b_2x^2$ sont deux polynôme de $\mathbb{R}_2[x]$, on pose $\langle P, Q \rangle = \sum_{i=0}^2 a_i b_i$.

On pose $F = \{P \in \mathbb{R}_2[x], P(1) = 0\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[x]$ et en déterminer une base.
2. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[x]$.
3. Déterminer la distance entre le polynôme x^2 et F .

Exercice 15.17 (★★)

Le but de cet exercice est de prouver l'existence et de calculer la valeur de

$$\Delta = \inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (e^t - a - bt)^2 dt.$$

Sur $E = \mathcal{C}([0, 1])$, on définit un produit scalaire en posant pour tout $(f, g) \in E^2$, $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt$.

Soient f_1, f_2 et g les éléments de E définis par : $\forall t \in \mathbb{R}, f_1(t) = 1, f_2(t) = t$ et $g(t) = e^t$. On pose $F = Vect(f_1, f_2)$. Soit $Q = af_1 + bf_2 \in F$.

1. Donner sous forme intégrale $\|g - Q\|^2$.
2. En déduire qu'il existe un unique $Q_0 \in F$ minimisant $\|g - Q_0\|^2$.
3. Déterminer sans calcul les valeurs de $\langle g - Q_0, f_1 \rangle$ et de $\langle g - Q_0, f_2 \rangle$.
4. En déduire la valeur de Δ .

Exercice 15.18 (★★★)

Soit n un entier supérieur ou égal à 2, et $E = \mathbb{R}_n[x]$ muni du produit scalaire défini par :

$$\forall (P, Q) \in E^2, \quad \langle P, Q \rangle = \sum_{i=0}^n P(i)Q(i).$$

On note $F = \{P \in E, P(0) = P(n) = 0\}$. On considère les polynômes :

$$M_k = \prod_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket \setminus \{k\}} (x - i) \quad \text{et} \quad N_k = \frac{M_k}{M_k(k)}$$

pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .
2. Montrer que $(N_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base orthonormée de E .
3. Montrer que $(N_k)_{1 \leq k \leq n-1}$ est une base orthonormée de F .
4. Déterminer l'expression de la projection orthogonale d'un polynôme $P \in E$ sur F .
5. Calculer la distance de P à F pour tout polynôme P de E .

Exercice 15.19 (★★★)

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire usuel. Soit $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{Tr}(M) = 0\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer sa dimension.
2. Déterminer F^\perp .
3. Soit J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Déterminer la distance entre la matrice J et le sous-espace F .

Exercice 15.20 (★★★★)

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier qu'on définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[x]$ en posant : $\langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt$.
2. Établir l'existence de réels p_0, p_1, \dots, p_n (on précisera p_0) tels que :

$$(x - 1)(x - 2) \dots (x - n) = p_0 + \sum_{k=1}^n p_k(x + 1)(x + 2) \dots (x + k).$$

3. Vérifier que $P(x) = \sum_{k=0}^n p_k x^k$ est orthogonal au sous-espace vectoriel $\text{Vect}(x, x^2, \dots, x^n)$.

En déduire la distance du polynôme 1 au sous-espace vectoriel $\text{Vect}(x, x^2, \dots, x^n)$.

4. Déterminer de même la distance de x^n au sous-espace vectoriel $\text{Vect}(1, x, \dots, x^{n-1})$.

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt$ converge et vaut $\Gamma(k+1) = k!$. Par linéarité de l'intégrale, il suit que pour tout $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt$ converge également.

On a déjà montré dans des exercices passés qu'un tel crochet définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[x]$. Je vous laisse le vérifier.

2. $\mathcal{B} = (P_0 = 1, P_1 = x + 1, \dots, P_n = (x + 1)(x + 2) \dots (x + n))$ est une famille libre de $\mathbb{R}_n[x]$ (car les degrés de ces polynômes sont deux à deux distincts) de cardinal $n + 1 = \dim(\mathbb{R}_n[x])$. C'est donc une base de $\mathbb{R}_n[x]$.

Puisque $P = (x - 1)(x - 2) \dots (x - n)$ appartient à $\mathbb{R}_n[x]$, il se décompose dans la base \mathcal{B} . D'où

l'existence des réels p_0, \dots, p_n tels que :

$$(x-1)(x-2)\dots(x-n) = p_0 + \sum_{k=1}^n p_k(x+1)(x+2)\dots(x+k).$$

En prenant $x = -1$ dans cette égalité, on obtient $p_0 = (-1)^n(n+1)!$.

3. Pour tout $1 \leq s \leq n$, on obtient par linéarité de l'intégrale (tout converge) :

$$\begin{aligned} \langle P, X^s \rangle &= \sum_{k=0}^n p_k \int_0^{+\infty} t^{k+s} e^{-t} dt = \sum_{k=0}^n p_k \Gamma(k+s) \\ &= s! \left(p_0 + \sum_{k=1}^n p_k (s+1)(s+2)\dots(s+k) \right) \end{aligned}$$

Mais en prenant $x = s$ dans l'égalité de la question 2, il suit :

$$p_0 + \sum_{k=1}^n p_k (s+1)(s+2)\dots(s+k) = (s-1)(s-2)\dots(s-s)\dots(s-n) = 0.$$

D'où $\langle P, X^s \rangle = 0$ pour tout $s \in \llbracket 1, n \rrbracket$, et P est bien orthogonal au sous-espace $\text{Vect}(x, x^2, \dots, x^n)$.

Notons $F = \text{Vect}(x, x^2, \dots, x^n)$. F est de dimension n , donc F^\perp est de dimension 1. Puisque P est un vecteur non nul de F^\perp (car le polynôme $(x-1)(x-2)\dots(x-n)$ est non nul), il suit que $F^\perp = \text{Vect}(P)$. Le vecteur $\frac{P}{\|P\|}$ constitue donc une base orthonormée de F^\perp , et le projeté orthogonal de 1 sur F^\perp est donc :

$$p_{F^\perp}(1) = \left\langle 1, \frac{P}{\|P\|} \right\rangle \frac{P}{\|P\|} = \langle 1, P \rangle \frac{P}{\|P\|^2}.$$

Calculons $d(1, F) = \|1 - p_F(1)\| = \|p_{F^\perp}(1)\| = \frac{|\langle 1, P \rangle|}{\|P\|^2} \|P\| = \frac{|\langle 1, P \rangle|}{\|P\|}$. Or on a (en prenant $s = 0$ dans le calcul précédent) :

$$\begin{aligned} \langle 1, P \rangle &= p_0 + \sum_{k=1}^n p_k (0+1)(0+2)\dots(0+k) \\ &= (0-1)(0-2)\dots(0-n) = (-1)^n n!. \end{aligned}$$

D'autre part, puisque P est orthogonal à F :

$$\|P\|^2 = \sum_{k=0}^n p_k \langle P, x^k \rangle = p_0 \langle P, 1 \rangle = (n!)^2 (n+1)$$

On obtient finalement :

$$d(1, F) = \frac{n!}{n! \sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

4. On utilise la même démarche, en définissant cette fois le polynôme $Q = \sum_{k=0}^n q_k X^k$ tel que :

$$X(X-1)\dots(X-n+1) = q_0 + \sum_{k=1}^n q_k (X+1)(X+2)\dots(X+k).$$