TD14

# Vecteurs aléatoires

## Maximum, minimum

### Exercice 14.1 (★)

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes une loi $\mathscr{B}(p)$. Déterminer la loi de $Z = \max(X_1, \dots, X_n)$.

---

### Exercice 14.2 (★)

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes une loi $\mathscr{G}(p)$ avec $p \in ]0,1[$, et soit $Z = \min(X_1, \dots, X_n)$. Montrer que $Z$ suit une loi usuelle dont on précisera les paramètres. Calculer $E(Z)$ et $V(Z)$.

---

### Exercice 14.3 (★★)

Un sac contient $N$ boules numérotées de 1 à $N$. On effectue dans ce sac $n$ tirages d'une boule avec remise et on note $Z_n$ le plus petit numéro obtenu. Déterminer la loi de $Z_n$.

---

### Exercice 14.4 (★ - Minimum et maximum de lois uniformes)

Soit $a > 0$ et soient $X_1, \dots, X_n$ $n$ variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme $\mathscr{U}([0,a])$. On pose

$$Y = \max(X_1, \dots, X_n) \text{ et } Z = \min(X_1, \dots, X_n).$$

Montrer que $Y$ et $Z$ sont des variables aléatoires à densité et en déterminer une densité.

---

### Exercice 14.5 (★★ - Lois uniformes et loi de Pareto)

Soit $n \geq 3$ et soient $Z_1, \dots, Z_n$ des variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ suivant toutes la loi uniforme sur $]0,a]$, $a > 0$. On pose alors $X_i = \dfrac{1}{Z_i}$.

1. Montrer que $X_1$ est une variable aléatoire à densité, et qu'une densité de $X_1$ est :

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{ax^2} & \text{si } x \geq \frac{1}{a}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. Soit $Y_n = \min(X_1, \dots, X_n)$. Montrer que $Y_n$ est une variable à densité, et qu'une densité de $Y_n$ est :

$$g : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \dfrac{n}{a^n x^{n+1}} & \text{si } x \geq \frac{1}{a}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. Montrer que $Y_n$ admet une espérance et une variance, et les calculer.
4. `Python.` Écrire une fonction `pareto` qui simule la loi de $X_n$ pour $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

---

### Exercice 14.6 (★★★)

Soit $N$ une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n$ et $p$ ($n \in \mathbb{N}^*$, $p \in ]0,1[$).
Soient $X_0, X_1, \dots, X_n$ $n+1$ variables aléatoires suivant la loi uniforme sur $[0,1]$.
On suppose que $X_0, X_1, \dots, X_n, N$ sont mutuellement indépendantes.

1. Soit $k \in \{0, \dots, n\}$. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $T_k = \min(X_0, X_1, \dots, X_k)$.
2. On pose $T = \min(X_0, X_1, \dots, X_N)$.
   (a) Montrer que $T$ est une variable aléatoire.

(b) Montrer que $T$ est une variable à densité et déterminer une densité de $T$.

(c) `Python.` Écrire une fonction `simulation` qui simule la loi de $T$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $p \in ]0,1[$.

---

**Exercice 14.7 (★★★★ - QSP HEC 2015)**
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ de même loi exponentielle de paramètre $a > 0$.
Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on définit la variable aléatoire $N_x$ par :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad N_x(\omega) = \begin{cases} \min(k \in \mathbb{N}^*,\ X_k(\omega) > x) \text{ si cet ensemble n'est pas vide,} \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de $N_x$ et préciser son espérance $E(N_x)$.
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} P(N_x > E(N_x))$.

---

# Vecteurs aléatoires, fonction d'un vecteur

**Exercice 14.8 (★★)**
Une urne contient $n$ boules numérotées de 1 à $n$ ($n \geq 3$). On tire simultanément trois boules dans l'urne, et on note $X_1$ le plus petit des trois numéros, $X_3$ le plus grand et $X_2$ le numéro intermédiaire.

1. Déterminer la loi de $(X_1, X_2, X_3)$.
2. En déduire la loi de $X_2$, puis son espérance.

---

**Exercice 14.9 (★★)**
Soient $X, Y, Z$ trois variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$. Montrer que $\dfrac{X+Y}{1+Z}$ admet une espérance, et la déterminer.

---

**Exercice 14.10 (★★★★ - QSP HEC 2008)**
Les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
On considère $n$ variables aléatoires à densité, de même loi et indépendantes $X_1, \ldots, X_n$. On note $F$ la fonction de répartition et $f$ une densité des $X_i$.
Pour tout $\omega \in \Omega$, on note $(Y_1(\omega), Y_2(\omega), \ldots, Y_n(\omega))$ la suite des $X_i(\omega)$ pour $1 \leq i \leq n$ réordonnés par ordre croissant. On a donc $Y_1(\omega) \leq Y_2(\omega) \leq \cdots \leq Y_n(\omega)$ pour tout $\omega$ de $\Omega$.

1. Si $1 \leq k \leq n$ et $x \in \mathbb{R}$, montrer que :
$$P([Y_k \leq x]) = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} F(x)^j (1 - F(x))^{n-j}.$$
2. En déduire que $Y_k$ admet une densité qu'on explicitera sans le signe $\sum$.

---

# Somme de variables aléatoires

**Exercice 14.11 (★)**
Soient $X_1, X_2, X_3$ des variables indépendantes de loi $\mathscr{E}(\lambda)$, et soit $T = X_1 + X_2 + X_3$. Calculer $P(T > 1)$.

---

**Exercice 14.12 (★★)**
On désigne par $p$ un réel de $]0,1[$. On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, indépendantes, dont la loi commune est donnée, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par : $P(X_n = 1) = p$ et $P(X_n = -1) = 1 - p$.

1. On pose $Y_n = aX_n + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
   Déterminer $a$ et $b$ pour que $Y_n$ suive une loi de Bernoulli de paramètre $p$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Déterminer la loi de $S_n$.

3. *Application.* Un supporter de foot sort d'un bar après une longue soirée. À chaque seconde, il avance d'un mètre en se déplaçant d'un mètre vers la gauche avec la probabilité $p$, et d'un mètre vers la droite avec la probabilité $1 - p$. En $t = 0$, il se trouve à la sortie du bar, à l'ordonnée $y = 0$.

   (a) Donner la loi de son ordonnée à l'instant $t = n$ secondes.

   (b) En moyenne, où se trouve-t-il à $t = 10$ secondes ?

   (c) `Python.` Proposer une fonction d'entête `def marche(n,p)` simulant la marche de ce supporter pendant $n$ secondes. Cette fonction renverra un vecteur de longueur $n+1$, dont la $k$-ème coordonnée contient l'ordonnée du supporter à l'instant $t = k + 1$.

   (d) `Python.` Proposer un script qui représente la trajectoire de ce supporter pendant 1000 secondes.

---

**Exercice 14.13 (★★ - Loi du $\chi^2$)**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $X_1, \ldots, X_n$ $n$ variables aléatoires mutuellement indépendantes, suivant toutes la loi normale centrée réduite. On note $Z = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} X_i^2$.

1. Montrer que $\frac{1}{2} X_1^2$ suit une loi usuelle que l'on déterminera.

2. En déduire la loi de $Z$.

---

**Exercice 14.14 (★★ - Loi binomiale négative)**
On considère une expérience ayant probabilité $p$ de réussite, et $1 - p$ d'échouer.
On répète l'expérience jusqu'à obtenir $m$ succès, et on note $X$ le nombre d'essais nécessaires.
On note également $X_i$ la variable aléatoire qui vaut 1 si l'expérience $i$ a été un succès, et 0 sinon.

1. Reconnaitre la loi de $X$ lorsque $m = 1$.

2. Déterminer la loi de $X_i$.

3. Écrire l'évènement $[X = k]$ en fonction d'évènements formés à partir des variables aléatoires $X_1 + \cdots + X_{k-1}$ et $X_k$.

4. En déduire la loi de $X$ dans le cas général.

5. En écrivant $X$ comme somme de $m$ variables aléatoires suivant une loi usuelle, déterminer l'espérance de $X$.

---

**Exercice 14.15 (★★ - Loi $\Gamma$ à deux paramètres - ✍)**
Soient $b$ et $\nu$ deux réels strictement positifs. On définit la fonction

$$f : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \dfrac{t^{\nu-1} e^{-\frac{t}{b}}}{b^\nu \Gamma(\nu)} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

1. Montrer que $f$ est une densité de probabilité.

   Dans la suite, on considère une variable aléatoire $X$ admettant pour densité $f$, et on dit que $X$ suit la loi $\Gamma$ de paramètres $b$ et $\nu$, et on écrit $X \hookrightarrow \Gamma(b, \nu)$.

2. Quelle est la loi de $\frac{1}{b} X$ ? Quelle est la loi de $X$ si $\nu = 1$ ?

3. Reconnaitre la loi $\Gamma(1, \nu)$.
4. Montrer que $X$ admet une espérance et une variance, et qu'on a $E(X) = b\nu$ et $V(X) = b^2\nu$.
5. Soient $X_1, X_2$ deux variables aléatoires réelles indépendantes sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ telles que $X_1 \hookrightarrow \Gamma(b, \nu_1)$ et $X_2 \hookrightarrow \Gamma(b, \nu_2)$. Montrer que $X_1 + X_2 \hookrightarrow \Gamma(b, \nu_1 + \nu_2)$.

   *On pourra commencer par considérer la loi de* $\frac{X_1}{b} + \frac{X_2}{b}$.
6. Plus généralement, si $X_1, \dots, X_n$ sont $n$ variables mutuellement indépendantes telles que $X_i \hookrightarrow \Gamma(b, \nu_i)$, montrer que $X_1 + \cdots + X_n \hookrightarrow \Gamma(b, \nu_1 + \cdots + \nu_n)$.
7. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes sur $(\Omega, A, P)$ suivant la loi exponentielle $\mathscr{E}(\lambda)$. Montrer que $X_1 + \cdots + X_n$ suit la loi $\Gamma(\frac{1}{\lambda}, n)$.
8. Soit $Y$ une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{N}(0, 1)$. Montrer que $Y^2$ suit une loi $\Gamma$ dont on précisera les paramètres.

---

**Exercice 14.16 (★★★★ - Oral ESCP 2014)**

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ et $U_n = \displaystyle\min_{1\leq k\leq n} X_k$

1. Soit $n$ un entier naturel non nul.
   (a) Déterminer la loi de $U_n$.
   (b) Donner une densité de $S_n$. Montrer que pour tout $x > 0$,
   $$P(S_n > x) = e^{-\lambda x} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k x^k}{k!}.$$
2. Soit $N$ une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, indépendante des $(X_i)$ et qui suit la loi géométrique de paramètre $p$, avec $0 < p < 1$. On définit $S$ et $U$ par :

   pour tout $\omega \in \Omega$, $S(\omega) = S_{N(\omega)}(\omega)$ et $U(\omega) = U_{N(\omega)}(\omega)$.

   On admet que $S$ et $U$ sont des variables aléatoires.
   (a) Montrer que $U$ est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de $U$.
   (b) Déterminer la loi de $S$.

---

**Exercice 14.17 (★★★★ - QSP ESCP 2014)**

Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, mutuellement indépendantes et suivant toutes la loi géométrique de paramètre $p$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la variable aléatoire $\dfrac{1}{S_n}$ admet une espérance, que l'on notera par la suite $m_n$.
2. Soient $(k, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$. Déterminer l'espérance de $\dfrac{S_k}{S_n}$ en fonction de $m_n$.

---