

## Diagonalisation

### Diagonalisation

#### Exercice 13.1 (★)

À l'aide des commandes `al.eig(A)[0]` et `al.matrix_rank(A)` de la librairie `numpy.linalg` donnant le spectre et le rang d'une matrice  $A$ , déterminer si les matrices suivantes sont diagonalisables.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -12 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 8 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -5 & 6 & 3 \\ -3 & 4 & 3 \\ -3 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

#### Exercice 13.2 (★)

Déterminer par le moins de calcul possible si les matrices suivantes sont diagonalisables.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

#### Exercice 13.3 (★)

Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables dans  $\mathbb{R}$  ? Si oui, les diagonaliser et expliciter la matrice de passage. Afin de vérifier ses calculs sur Python, on pourra utiliser la commande `al.eig(A)` qui à  $A$  associe deux valeurs, un vecteur contenant les valeurs propres d'une part, une base des sous-espaces propres associés d'autre part.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

#### Exercice 13.4 (★★)

Soient  $a, b \in \mathbb{R}$ . Dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on pose :

$$M = \begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer qu'il existe une matrice  $\Delta$  diagonale et une matrice  $P$  inversible telle que  $J = P\Delta P^{-1}$ . On explicitera  $\Delta$  et  $P$ .
2. Écrire  $M$  comme combinaison linéaire de  $I_n$  et  $J$ . En déduire que  $M$  est diagonalisable, et déterminer une matrice diagonale semblable à  $M$ .

#### Exercice 13.5 (★★)

Soit  $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et  $F$  le sous-espace vectoriel de  $E$  engendré par la famille  $\mathcal{B} = (f_0, f_1, f_2, f_3)$  où  $f_k : x \mapsto x^k e^{-x}$  pour  $k = 0, 1, 2, 3$ .

1. Montrer que  $\mathcal{B}$  est une base de  $F$ . En déduire la dimension de  $F$ .
2. Soit  $D$  l'application définie sur  $F$  par :

$$\forall f \in F, \quad D(f) = f'$$

où  $f'$  désigne la dérivée première de  $f$ .

Montrer que  $D$  est un endomorphisme de  $F$  et écrire sa matrice  $M$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

3.  $M$  est-elle inversible ? diagonalisable ?

**Exercice 13.6 (★★)**

Soit  $f$  l'application définie sur  $\mathbb{R}_n[x]$  par  $f(P)(x) = xP'(x+1)$ .

1. Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[x]$ .
2. Déterminer la matrice de  $f$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}_n[x]$ .
3.  $f$  est-elle diagonalisable ?

**Exercice 13.7 (★★)**

Soient  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ . Pour quelles valeurs de  $a, b$  et  $c$  la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  est-elle diagonalisable ?

**Exercice 13.8 (★★★)**

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n$ , et soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme de rang 1. Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$  et  $A = M_{\mathcal{B}}(f)$ .

1. Montrer qu'il existe une base  $\mathcal{B}'$  de  $E$  dans laquelle la matrice de  $f$  est de la forme  $M = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \alpha_1 \\ \vdots & & \vdots & \alpha_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$ .
2. Montrer que  $M$  est diagonalisable si, et seulement si,  $\alpha_n \neq 0$ .
3. En déduire que  $f$  est diagonalisable si, et seulement si,  $\text{Tr}(A) \neq 0$ .

**Exercice 13.9 (★★★ - QSP HEC 2016 - 🏠)**

Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 1. Soit  $A$  et  $B$  deux matrices carrées d'ordre  $n$ , diagonalisables et ayant chacune  $n$  valeurs propres distinctes.

Montrer que les matrices  $A$  et  $B$  commutent si, et seulement si, elles sont diagonalisables avec la même matrice de passage.

**Exercice 13.10 (★★★)**

Soient  $X$  et  $Y$  des variables aléatoires indépendantes sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  suivant une loi géométrique  $\mathcal{G}(p)$ ,  $p \in ]0, 1[$ .

Déterminer la probabilité que la matrice  $\begin{pmatrix} X & 0 \\ X+Y & Y \end{pmatrix}$  soit diagonalisable.

**Exercice 13.11 (★★★ - QSP HEC 2021)**

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice diagonalisable. On pose  $B = A^3 + A + I_n$ .

Montrer qu'il existe un polynôme  $Q \in \mathbb{R}[x]$  tel que  $A = Q(B)$ .

**Exercice 13.12 (★★★ - Oral ESCP 2007)**

Soit  $n$  un entier naturel non nul et  $Q$  un polynôme à coefficients réels de degré  $d \leq n$ .

On définit l'application suivante :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_n[x] \rightarrow \mathbb{R}_n[x] \\ P \mapsto (PQ)^{(n)} \end{cases}$$

où  $(PQ)^{(n)}$  indique que l'on prend la dérivée  $n^{\text{ième}}$  du produit de  $P$  par  $Q$ .

1. Justifier que  $\varphi$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[x]$ .
2. Donner une CNS sur le polynôme  $Q$  pour que  $\varphi$  soit un automorphisme de  $\mathbb{R}_n[x]$ .
3. Déterminer une CNS sur le polynôme  $Q$  pour que  $\varphi$  soit diagonalisable.

## Utilisation de polynômes annulateurs

### Exercice 13.13 (★)

Considérons la matrice  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

1. Trouver une relation entre  $A^2$ ,  $A$  et  $I_3$ .
  2. Montrer que  $A$  admet une seule valeur propre  $\lambda$ .  $A$  est-elle diagonalisable ?
- 

### Exercice 13.14 (★★)

Soit  $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  l'endomorphisme défini par  $f(A) = {}^t A$ .

1. Calculer  $f^2$ . En déduire un polynôme annulateur de  $f$  et les valeurs propres de  $f$ .
  2.  $f$  est-il diagonalisable ?
- 

### Exercice 13.15 (★★)

Soit  $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  la matrice définie par  $a_{i,j} = \frac{i}{j}$ .

1. Calculer  $A^2$ . En déduire un polynôme annulateur de  $A$ , puis que  $\text{Sp}(A) \subset \{0, n\}$ .
  2. Déterminer  $\text{rg}(A)$ . En déduire que 0 est valeur propre de  $A$ , et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.
  3. Résoudre le système  $AX = nX$ , d'inconnue  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ . En déduire que  $A$  est diagonalisable.
- 

### Exercice 13.16 (★★ - QSP HEC 2005)

Une matrice  $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est dite nilpotente s'il existe une puissance  $p \in \mathbb{N}^*$  telle que  $N^p = 0_n$ .

À quelle condition une matrice nilpotente est-elle diagonalisable ?

---

### Exercice 13.17 (★★★ - QSP ESCP 2015)

Soit  $f$  un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie  $n \geq 1$ , et  $a, b$  deux scalaires distincts. On suppose que :

$$(f - a\text{Id}_E)^3 \circ (f - b\text{Id}_E) = 0_{\mathcal{L}(E)} \quad \text{et} \quad (f - a\text{Id}_E)^2 \circ (f - b\text{Id}_E) \neq 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

Étudier la diagonalisabilité de  $f$ .

---

### Exercice 13.18 (★★★★ - Oral ESCP 2011 - )

Soient  $n$  un entier supérieur ou égal à 2, et  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$ . Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$ . On note  $\text{id}$  l'endomorphisme identité de  $E$ .

On souhaite montrer le résultat suivant :

$$u \text{ diagonalisable} \Leftrightarrow u \text{ annule un polynôme scindé à racines simples dans } \mathbb{R}.$$

1. On suppose dans cette question que  $u$  est diagonalisable. On note  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$  l'ensemble de ses valeurs propres. Montrer que le polynôme  $m(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \dots (x - \lambda_k)$  est annulateur de  $u$ .

*On étudie la réciproque. Supposons dans la suite de l'exercice qu'il existe un polynôme :*

$$P(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \dots (X - \lambda_k)$$

*annulateur de  $u$ , où  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$  sont des réels distincts.*

2. **Résultat préliminaire.** Soient  $f$  et  $g$  deux endomorphismes de  $E$ . En considérant la restriction de  $f$  à  $\text{Ker}(g \circ f)$ , montrer que :

$$\dim \text{Ker}(g \circ f) \leq \dim \text{Ker}(f) + \dim \text{Ker}(g).$$

3. (a) Montrer que  $n \leq \sum_{j=1}^k \dim \text{Ker}(u - \lambda_j \text{id})$ .

(b) En déduire que l'endomorphisme  $u$  est diagonalisable.

4. **Applications.**

- (a) Soit  $u$  un endomorphisme diagonalisable d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie, et soit  $F$  un sous-espace stable par  $u$ . Montrer que l'endomorphisme  $\tilde{u}$  induit par  $u$  sur  $F$  est diagonalisable.  
 (b) Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $A^2$  est diagonalisable à valeurs propres strictement positives. Montrer que  $A$  est diagonalisable.

## Applications de la diagonalisation

### Exercice 13.19 (★)

On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $\begin{cases} u_0 = 4, u_1 = 2, u_2 = -3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n. \end{cases}$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $X_n$  la matrice colonne  $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$ .

1. Déterminer une matrice  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X_{n+1} = AX_n$ .
2. En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X_n = A^n X_0$ .
3. Calculer  $A^3 - 2A^2 - A$ . En déduire un polynôme annulateur de  $A$ , puis montrer que  $A$  est diagonalisable.
4. En déduire qu'il existe trois réels  $\lambda, \mu, \nu$  tels que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda + \mu(-1)^n + \nu 2^n$ .
5. En déduire l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

### Exercice 13.20 (★★)

Les matrices suivantes sont-elles semblables dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  ?

1.  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ .

3.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 8 & -1 & 0 \\ 10 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ .

2.  $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

4.  $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -4 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

### Exercice 13.21 (★★ - Racine carrée d'une matrice)

Soit  $C = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

1. Montrer que si  $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  commute avec  $C$ , alors  $D$  est diagonale. En déduire que si  $D^2 = C$ , alors  $D$  est diagonale.
2. Déterminer l'ensemble des matrices  $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telles que  $D^2 = C$ .
3. Soit  $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 0 \\ 8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Déterminer l'ensemble des matrices  $B$  de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telles que  $B^2 = A$ .

### Exercice 13.22 (★★★★)

Trouver toutes les matrices  $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  telles que  $X^2 + X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .