TD13

Diagonalisation

Diagonalisation

Exercice 13.1 (★)

À l'aide des commandes `al.eig(A)[0]` et `al.matrix_rank(A)` de la librairie `numpy.linalg` donnant le spectre et le rang d'une matrice A, déterminer si les matrices suivantes sont diagonalisables.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -12 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 8 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 6 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 13.2 (★)

Déterminer par le moins de calcul possible si les matrices suivantes sont diagonalisables.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 13.3 (★)

Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables dans $\mathbb{R}$? Si oui, les diagonaliser et expliciter la matrice de passage. Afin de vérifier ses calculs sur `Python`, on pourra utiliser la commande `al.eig(A)` qui à A associe deux valeurs, un vecteur contenant les valeurs propres d'une part, une base des sous-espaces propres associés d'autre part.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 13.4 (★★)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on pose :

$$M = \begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{pmatrix} \text{ et } J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer qu'il existe une matrice Δ diagonale et une matrice P inversible telle que $J = P\Delta P^{-1}$. On explicitera Δ et P.
2. Écrire M comme combinaison linéaire de I_n et J. En déduire que M est diagonalisable, et déterminer une matrice diagonale semblable à M.

Exercice 13.5 (★★)

Soit $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et F le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille $\mathscr{B} = (f_0, f_1, f_2, f_3)$ où $f_k : x \mapsto x^k e^{-x}$ pour $k = 0, 1, 2, 3$.

1. Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de F. En déduire la dimension de F.
2. Soit D l'application définie sur F par :
$$\forall f \in F, \quad D(f) = f'$$
où f' désigne la dérivée première de f.
Montrer que D est un endomorphisme de F et écrire sa matrice M dans la base $\mathscr{B}$.
3. M est-elle inversible ? diagonalisable ?

Exercice 13.6 (★★)

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}_n[x]$ par $f(P)(x) = xP'(x+1)$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.
2. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$.
3. f est-elle diagonalisable ?

Exercice 13.7 (★★)

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Pour quelles valeurs de a, b et c la matrice $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 13.8 (★★★)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, et soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de rang 1. Soit $\mathscr{B}$ une base de E et $A = M_{\mathscr{B}}(f)$.

1. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}'$ de E dans laquelle la matrice de f est de la forme $M = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \alpha_1 \\ \vdots & & \vdots & \alpha_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$.
2. Montrer que M est diagonalisable si, et seulement si, $\alpha_n \neq 0$.
3. En déduire que f est diagonalisable si, et seulement si, $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$.

> 1. Puisque f est de rang 1, on obtient $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = n - 1$ par le théorème du rang. Soit $(e_1, \dots, e_{n-1})$ une base de $\mathrm{Ker}(f)$. C'est une famille libre de E qu'on complète en $\mathscr{B}' = (e_1, \dots, e_{n-1}, e_n)$ une base de E. Dans cette base, $f(e_i)$ est égal à 0_E pour tout $1 \leq i \leq n$. En notant $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ les coordonnées de $f(e_n)$ dans la base $\mathscr{B}'$, on en déduit que :
> $$M_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \alpha_1 \\ \vdots & & \vdots & \alpha_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$$
> 2. Puisque M est triangulaire supérieure, ses valeurs propres sont sur la diagonale, de sorte que $\mathrm{Sp}(M) = \{0, \alpha_n\}$. Deux cas sont à considérer :
>   - Si $\alpha_n = 0$, alors M a une unique valeur propre 0. Elle est diagonalisable si, et seulement si, $M = 0_n$. Or $M \neq 0_n$ car elle est de rang 1. Donc M n'est pas diagonalisable dans ce cas.

- Si $\alpha_n \neq 0$, alors M a deux valeurs propres 0 et α_n, et $\dim E_{\alpha_n}(M) \geq 1$ et $\dim E_0(M) = n-1$. On obtient que :

$$1 + (n-1) \leq \dim E_{\alpha_n}(M) + \dim E_0(M) \leq n.$$

Ainsi, $\dim E_{\alpha_n}(M) + \dim E_0(M) = n$, et la matrice M est bien diagonalisable dans ce cas.

3. Rappelons que deux matrices semblables ont même trace. Ainsi $\alpha_n = \mathrm{Tr}(M) = \mathrm{Tr}(A)$, et le résultat de la question précédente se récrit :

$$Tr(A) \neq 0 \Leftrightarrow M \text{ diagonalisable } \Leftrightarrow f \text{ diagonalisable.}$$

Exercice 13.9 (★★★ - QSP HEC 2016 - ✍)
Soit n un entier supérieur ou égal à 1. Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n. On suppose que A admet n valeurs propres distinctes.

Montrer que les matrices A et B commutent si, et seulement si, elles sont diagonalisables avec la même matrice de passage.

$\Rightarrow$ Commençons par rappeler un résultat essentiel ici.

> **Rappel.**
> Lorsque deux matrices ou endomorphismes commutent, les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autre.

Puisque A admet n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, elle est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont tous de dimension 1. De plus, si on note $X_i \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_1, alors $(X_1, \ldots, X_n)$ est une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A. Vérifions que ce sont aussi des vecteurs propres pour B. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:

$$A(BX_i) = (AB)X_i \underset{\text{les matrices commutent}}{=} (BA)X_i = B(AX_i) = B(\lambda_i X_i) = \lambda_i BX_i.$$

Ainsi BX_i appartient au sous-espace propre $E_{\lambda_i}(A) = \mathrm{Vect}(X_i)$. On retrouve ainsi le résultat évoqué plus haut : $E_{\lambda_i}(A)$ est stable par B. Il existe donc un scalaire μ_i tel que :

$$BX_i = \mu_i X_i.$$

X_i apparait comme vecteur propre de B pour la valeur propre μ_i. Ceci étant vrai pour tout $1 \leq i \leq n$, on en déduit que $(X_1, \ldots, X_n)$ est aussi une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ formée de vecteurs propres de B. En particulier, B est aussi diagonalisable, et si on note $P = (X_1|\ldots|X_n)$ la matrice de passage de la base canonique que $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ à $(X_1, \ldots, X_n)$, on obtient par formule de changement de bases :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1}BP = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix}.$$

$\Leftarrow$ Supposons qu'il existe P inversible telle que :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = D_1 \quad \text{et} \quad P^{-1}BP = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix} = D_2.$$

Alors :

$$AB = PD_1P^{-1}PD_2P^{-1} = PD_1D_2P^{-1} \underset{(*)}{=} PD_2D_1P^{-1} = PD_2P^{-1}PD_1P^{-1} = BA,$$

l'égalité $(*)$ étant satisfaite puisque deux matrices diagonales commutent. Ainsi les matrices A et B commutent bien.

Exercice 13.10 (★★★)

Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ suivant une loi géométrique $\mathscr{G}(p)$, $p \in]0,1[$.

Déterminer la probabilité que la matrice $\begin{pmatrix} X & 0 \\ X+Y & Y \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

Commençons par noter que $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Étudions la diagonalisabilité de la matrice $A_{k,\ell} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ k+\ell & \ell \end{pmatrix}$ avec $k, \ell \in \mathbb{N}^*$. Cette matrice étant triangulaire inférieure, ses valeurs propres sont sur la diagonale : $\mathrm{Sp}(A_{k,\ell}) = \{k, \ell\}$. Deux cas sont possibles :

- si $k \neq \ell$, alors la matrice $A_{k,\ell}$ a deux valeurs propres distinctes, et est de taille 2×2. Elle est donc diagonalisable.
- si $k = \ell$, alors la matrice $A_{k,\ell}$ a une unique valeur propre. Elle est donc diagonalisable si, et seulement si, $A_{k,k} = kI_2$. Or ce n'est pas le cas car $k + \ell \neq 0$.

Ainsi la matrice $A_{k,\ell}$ est diagonalisable si, et seulement si, $k \neq \ell$.

La probabilité que la matrice $\begin{pmatrix} X & 0 \\ X+Y & Y \end{pmatrix}$ soit diagonalisable est donc $P(X \neq Y)$. À l'aide de la FPT avec le SCE $([Y = \ell])_{\ell \in \mathbb{N}^*}$, on obtient :

$$\begin{aligned} P(X \neq Y) = 1 - P(X = Y) &= 1 - \sum_{\ell=1}^{+\infty} P(X = Y, Y = \ell) \\ &= 1 - \sum_{\ell=1}^{+\infty} P(X = \ell, Y = \ell) \\ &= 1 - \sum_{\ell=1}^{+\infty} P(X = \ell)P(Y = \ell) \qquad \text{car les v.a. sont indép.} \\ &= 1 - p^2 \sum_{\ell=1}^{+\infty} ((1-p)^2)^{\ell-1} \\ &= 1 - \frac{p^2}{1-(1-p)^2} = \frac{2p-2p^2}{2p-p^2} \end{aligned}$$

Exercice 13.11 (★★★ - QSP HEC 2021)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable. On pose $B = A^3 + A + I_n$.
Montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[x]$ tel que $A = Q(B)$.

Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de A, et $m_1, \dots, m_r$ la dimension des sous-espaces propres correspondants. Puisque A est diagonalisable, il existe une matrice P inversible telle que :

$$P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{m_1 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{\lambda_r, \dots, \lambda_r}_{m_r \text{ fois}}) = D.$$

Puisque $B = A^3 + A + I_n$, alors :

$$\begin{aligned} P^{-1}BP &= P^{-1}A^3P + P^{-1}AP + I_n = (P^{-1}AP)^3 + P^{-1}AP + I_n \\ &= \mathrm{diag}(\underbrace{\mu_1, \dots, \mu_1}_{m_1 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{\mu_r, \dots, \mu_r}_{m_r \text{ fois}}) = D'. \end{aligned}$$

où pour tout $1 \leq i \leq r$, on a noté $\mu_i = \lambda_i^3 + \lambda_i + 1$. En particulier, B est diagonalisable.

On souhaite montrer l'existence d'un polynôme Q tel que $Q(B) = A$. Puisque ces deux matrices sont semblables, il est équivalent de chercher un polynôme Q tel que $Q(D') = D$, et donc tel que $Q(\mu_i) = \lambda_i$ pour tout $i \in [\![1, r]\!]$.

Par une étude de fonction rapide, $x \mapsto x^3 + x + 1$ est strictement croissante. En particulier, elle est injective et les réels $\mu_1, \dots, \mu_r$ sont deux à deux distincts. Par le TD0 (et le TD4, et le TD6), on sait qu'il existe un polynôme Q, appelé polynôme interpolateur de Lagrange, satisfaisant $Q(\mu_i) = \lambda_i$ pour tout $i \in [\![1, r]\!]$.

Dès lors, calculons :

$$\begin{aligned} Q(B) &= PQ(D')P^{-1} = P\mathrm{diag}(\underbrace{Q(\mu_1), \dots, Q(\mu_1)}_{m_1 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{Q(\mu_r), \dots, Q(\mu_r)}_{m_r \text{ fois}})P^{-1} \\ &= P\mathrm{diag}(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{m_1 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{\lambda_r, \dots, \lambda_r}_{m_r \text{ fois}})P^{-1} = A. \end{aligned}$$

Exercice 13.12 (★★★ - Oral ESCP 2007)

Soit n un entier naturel non nul et Q un polynôme à coefficients réels de degré $d \leq n$.
On définit l'application suivante :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x] \\ P \mapsto (PQ)^{(n)} \end{cases}$$

où $(PQ)^{(n)}$ indique que l'on prend la dérivée n^{ieme} du produit de P par Q.

1. Justifier que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.
2. Donner une CNS sur le polynôme Q pour que φ soit un automorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.
3. Déterminer une CNS sur le polynôme Q pour que φ soit diagonalisable.

1. Notons tout d'abord que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$, PQ est de degré $\leq n + d \leq 2n$, et donc $(PQ)^{(n)}$ est de degré $\leq n$. Donc φ est à valeurs dans $\mathbb{R}_n[x]$. On montre de plus facilement que φ est linéaire en utilisant que la dérivation est linéaire.

   Donc φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.

2. Si $\deg(Q) < n$, alors $\varphi(1) = (Q)^{(n)} = 0$ et donc $0 \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. Donc φ n'est pas injectif. Ce n'est donc pas un automorphisme.

   Supposons que $\deg(Q) = n$ à présent. Alors pour tout polynôme $P \neq 0_{\mathbb{R}_n[x]}$, $\deg(P) \geq 0$ et

$\deg(P \times Q) \geq \deg(Q)$. Ainsi, $\deg(\varphi(P)) \geq 0$ et $\varphi(P)$ est donc non nul. Par contraposition, $\varphi(P)$ est donc nul si, et seulement si, $P = 0_{\mathbb{R}_n[x]}$: φ est injective. Puisque φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$ qui est de dimension finie, c'est donc un automorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$

Ainsi, φ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$ si, et seulement si, $\deg(Q) = n$.

3. Commençons par une remarque : pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $X^k Q$ est de degré $k + d$, et donc $\varphi(X^k)$ est de degré inférieur ou égal à $k + d - n \leq k$. Donc la matrice de φ dans la base canonique est bien triangulaire supérieure.

   Si de plus $d < n$, alors le degré de $\varphi(X^k)$ est strictement plus petit que k. Donc la matrice de φ dans la base canonique est triangulaire supérieure stricte.

   Étudions donc les cas $\deg(Q) < n$ puis $\deg(Q) = n$.

   Si $\deg(Q) < n$, on vient de voir que la matrice de φ dans la base canonique est triangulaire supérieure stricte. Elle admet donc une unique valeur propre qui est 0. Alors φ est diagonalisable dans ce cas si, et seulement si, $\varphi = 0$. Or, c'est le cas si, et seulement si, $Q = 0$. En effet, il est clair que si $Q = 0$, alors $\varphi = 0$. Si $d > 0$, alors $\varphi(X^n)$ est de degré $d \geq 0$, et φ est donc non nul.

   Supposons à présent $\deg(Q) = n$, et notons a son coefficient dominant (non nul). La matrice de φ dans la base canonique est triangulaire supérieure, ses valeurs propres sont donc exactement ses coefficients diagonaux. Déterminons les. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $X^k Q$ est de degré $k + n$ et de coefficient dominant aX^{k+n}. D'où en dérivant n fois ce polynôme, $\varphi(X^n)$ est de degré k et de coefficient dominant :

$$(k+n)(k+n-1)\dots(k+1)aX^k = \frac{(k+n)!}{k!}aX^k.$$

   Ainsi, les valeurs propres de φ sont :

$$an!, \quad a\frac{(n+1)!}{1}, \quad a\frac{(n+2)!}{2!}\dots, a\frac{(2n)!}{n!}.$$

   Or ces valeurs propres sont deux à deux distinctes (en remarquant que $n! < \dfrac{(n+1)!}{1} < \dfrac{(n+2)!}{2!} \dots < \dfrac{(2n)!}{n!}$). Donc φ a $n+1$ valeurs propres distinctes, et est un endomorphisme d'un espace de dimension $n+1$. φ est donc bien diagonalisable.

Utilisation de polynômes annulateurs

Exercice 13.13 (★)

Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Trouver une relation entre A^2, A et I_3.
2. Montrer que A admet une seule valeur propre λ. A est-elle diagonalisable ?

Exercice 13.14 (★★)

Soit $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'endomorphisme défini par $f(A) = {}^tA$.

1. Calculer f^2. En déduire un polynôme annulateur de f et les valeurs propres de f.

2. f est-il diagonalisable ?

Exercice 13.15 (★★)
Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par $a_{i,j} = \dfrac{i}{j}$.

1. Calculer A^2. En déduire un polynôme annulateur de A, puis que $\mathrm{Sp}(A) \subset \{0, n\}$.
2. Déterminer $\mathrm{rg}(A)$. En déduire que 0 est valeur propre de A, et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.
3. Résoudre le système $AX = nX$, d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. En déduire que A est diagonalisable.

> 1. Notons $(c_{i,j})$ les coefficients de A^2, Pour tout $i, k \in [\![1, n]\!]$:
> $$c_{i,k} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}a_{j,k} = \sum_{j=1}^{n} \frac{i}{j}\frac{j}{k} = \sum_{j=1}^{n} \frac{i}{k} = n\frac{i}{k}.$$
> Ainsi, $A^2 = nA$, et $x^2 - nx = x(x-n)$ est un polynôme annulateur de A. Les valeurs propres de A sont donc parmi les racines de ce polynôme, c'est-à-dire 0 ou n.
> 2. Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, la ligne L_j de A est égale à jL_1. Donc A est de rang 1. Donc 0 est valeur propre de A et $\dim E_0(A) = n - 1$.
> 3. Résolvons :
> $$\begin{aligned} AX = nX &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + \frac{x_2}{2} + \cdots + \frac{x_n}{n} = nx_1 \\ x_1 + \frac{x_2}{2} + \cdots + \frac{x_n}{n} = \frac{n}{2}x_2 \\ \dots \\ x_1 + \frac{x_2}{2} + \cdots + \frac{x_n}{n} = \frac{n}{n}x_n \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + \frac{x_2}{2} + \cdots + \frac{x_n}{n} = nx_1 \\ x_1 = \frac{x_2}{2} = \cdots = \frac{x_n}{n} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x_1 = \frac{x_2}{2} = \cdots = \frac{x_n}{n} \end{aligned}$$
> D'où $E_n(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 \\ \vdots \\ nx_1 \end{pmatrix}, x_1 \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} \right)$. Ainsi, $\dim E_0(A) + \dim E_n(A) = (n-1) + 1 = n$, et A est bien diagonalisable, semblable à $\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & n \end{pmatrix}$.

Exercice 13.16 (★★ - QSP HEC 2005)
Une matrice $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dite nilpotente s'il existe une puissance $p \in \mathbb{N}^*$ telle que $N^p = 0_n$.
À quelle condition une matrice nilpotente est-elle diagonalisable ?

> Supposons que N est nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^p = 0_n$. X^p est donc un polynôme annulateur de N, et la seule valeur propre possible de N est 0. Or N ne peut être inversible, car sinon $N^p = 0_n$ le serait (comme produit de matrices inversibles), ce qui est faux bien entendu. Ainsi N admet pour unique valeur propre 0.

> Dès lors, on sait par le cours que N est diagonalisable si, et seulement si, $N = 0_n$.
>
> **À retenir.** Une matrice à la fois diagonalisable et nilpotente est nécessairement la matrice nulle.

Exercice 13.17 (★★★ - QSP ESCP 2015)

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie $n \geq 1$, et a, b deux scalaires distincts. On suppose que :

$$(f - a\,\mathrm{Id}_E)^3 \circ (f - b\,\mathrm{Id}_E) = 0_{\mathscr{L}(E)} \quad \text{et} \quad (f - a\,\mathrm{Id}_E)^2 \circ (f - b\,\mathrm{Id}_E) \neq 0_{\mathscr{L}(E)}.$$

Étudier la diagonalisabilité de f.

Exercice 13.18 (★★★★ - Oral ESCP 2011 - ✍)

Soient n un entier supérieur ou égal à 2, et E un espace vectoriel de dimension n. Soit u un endomorphisme de E. On note id l'endomorphisme identité de E.

On souhaite montrer le résultat suivant :

$$u \text{ diagonalisable} \quad \Leftrightarrow \quad u \text{ annule un polynôme scindé à racines simples dans } \mathbb{R}.$$

1. On suppose dans cette question que u est diagonalisable. On note $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$ l'ensemble de ses valeurs propres. Montrer que le polynôme $m(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)\dots(x - \lambda_k)$ est annulateur de u.

   On étudie la réciproque. Supposons dans la suite de l'exercice qu'il existe un polynôme :

   $$P(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)\dots(x - \lambda_k)$$

   annulateur de u, où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ sont des réels distincts.

2. **Résultat préliminaire.** Soient f et g deux endomorphismes de E. En considérant la restriction de f à $\mathrm{Ker}(g \circ f)$, montrer que :

   $$\dim \mathrm{Ker}(g \circ f) \leq \dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Ker}(g).$$

3. (a) Montrer que $n \leq \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \dim \mathrm{Ker}(u - \lambda_j\,\mathrm{Id}_E)$.

   (b) En déduire que l'endomorphisme u est diagonalisable.

4. **Applications.**

   (a) Soit u un endomorphisme diagonalisable d'un espace vectoriel E de dimension finie, et soit F un sous-espace stable par u. Montrer que l'endomorphisme $\tilde{u}$ induit par u sur F est diagonalisable.

   (b) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que A^2 est diagonalisable à valeurs propres strictement positives. Montrer que A est diagonalisable.

> 1. La preuve a été faite en cours.
>
> 2. Considérons $\tilde{f} : \mathrm{Ker}(g \circ f) \to E$. Tout d'abord :
>
> $$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(\tilde{f}) &= \{x \in \mathrm{Ker}(g \circ f),\ \tilde{f}(x) = 0\} = \{x \in \mathrm{Ker}(g \circ f),\ f(x) = 0\} \\ &= \mathrm{Ker}(g \circ f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f) \end{aligned}$$

car $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$. D'autre part :

$$\mathrm{Im}(\tilde{f}) = \{\tilde{f}(y),\ y \in \mathrm{Ker}(g \circ f)\} = \{f(y),\ y \in \mathrm{Ker}(g \circ f)\} \subset \mathrm{Ker}(g).$$

Par le théorème du rang appliqué à $\tilde{f}$:

$$\dim \mathrm{Ker}(g \circ f) = \dim \mathrm{Ker}(\tilde{f}) + \dim \mathrm{Im}(\tilde{f}) \leq \dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f).$$

3. (a) On note toujours $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ les valeurs propres de u. Notons $u_i = u - \lambda_i \mathrm{Id}_E$. Par hypothèse :
$$0_{\mathscr{L}(E)} = P(u) = u_1 \circ \cdots \circ u_k.$$
En appliquant la propriété obtenue à la question précédente (qu'on peut généraliser par récurrence à une famille de n endomorphismes) :
$$n = \dim \mathrm{Ker}(u_1 \circ \cdots \circ u_k) \leq \sum_{i=1}^{k} \dim \mathrm{Ker}(u_i)$$
(b) Comme de plus, $\displaystyle\sum_{j=1}^{k} \dim \mathrm{Ker}(u - \lambda_j \mathrm{Id}) \leq n$ d'après le cours, on en déduit que :
$$\sum_{j=1}^{k} \dim \mathrm{Ker}(u - \lambda_j \mathrm{Id}) = n.$$

4. (a) Supposons u diagonalisable. D'après ce qu'on a démontré, il annule un polynôme scindé à racines simples P, soit $P(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Mais alors, pour tout $x \in F$:
$$P(\tilde{u})(x) = P(u)(x) = 0_E.$$
Donc $P(\tilde{u}) = 0_{\mathscr{L}(F)}$, et $\tilde{u}$ admet un polynôme annulateur scindé à racines simples également. Donc $\tilde{u}$ est bien diagonalisable.

(b) Puisque A^2 est diagonalisable, il annule le polynôme
$$P(x) = \prod_{i=1}^{k} (x - \lambda_i)$$
où $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sont les valeurs propres distinctes de A^2, supposées toutes strictement positives.

Puisque $P(A^2) = 0_n$, le polynôme
$$Q(x) = P(x^2) = \prod_{j=1}^{k} (x^2 - \lambda_j)$$
est annulateur de A. Et il s'écrit :
$$Q(x) = \prod_{j=1}^{k} \left(x - \sqrt{\lambda_j}\right)\left(x + \sqrt{\lambda_j}\right).$$
Toutes les racines de Q sont bien distinctes (puisque les λ_j le sont). Ainsi A annule un polynôme scindé à racines simples. A est donc diagonalisable.

Applications de la diagonalisation

Exercice 13.19 (★)

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 4,\ u_1 = 2,\ u_2 = -3 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n. \end{cases}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la matrice colonne $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.
3. Calculer $A^3 - 2A^2 - A$. En déduire un polynôme annulateur de A, puis montrer que A est diagonalisable.
4. En déduire qu'il existe trois réels λ, μ, ν tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda + \mu(-1)^n + \nu 2^n$.
5. En déduire l'expression de u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 13.20 (★★)

Les matrices suivantes sont-elles semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$?

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.
2. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 8 & -1 & 0 \\ 10 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.
4. $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -4 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 13.21 (★★ - Racine carrée d'une matrice)

Soit $C = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que si $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ commute avec C, alors D est diagonale. En déduire que si $D^2 = C$, alors D est diagonale.
2. Déterminer l'ensemble des matrices $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $D^2 = C$.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 0 \\ 8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer l'ensemble des matrices B de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $B^2 = A$.

Exercice 13.22 (★★★★)

Trouver toutes les matrices $X \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $X^2 + X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
