TD10

Variables aléatoires à densité

Loi d'une variable aléatoire à densité

Exercice 10.1 (★)

On suppose que X est une variable aléatoire suivant la loi $\gamma(3)$. Déterminer sa fonction de répartition.

Exercice 10.2 (★★ - D'après Ecricome 2015)

1. Déterminer un réel a tel que la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ \dfrac{a}{x \ln^2(x)} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ soit une densité.

   Dans toute la suite, X est une variable aléatoire admettant f comme densité.

2. Déterminer la fonction de répartition F de X.

3. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?

4. Calculer les probabilités $P(0 \leq X \leq 4)$ et $P(X \geq 5/2)$.

Exercice 10.3 (★★)

Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ qui suit une loi normale centrée réduite. Soit Y une variable aléatoire définie sur le même espace, indépendante de X et telle que $P(Y = 1) = p$ et $P(Y = -1) = 1 - p$. Montrer que $Z = XY$ a la même loi que X.

> On cherche la fonction de répartition de Z pour la comparer à celle de X. Soit pour cela $x \in \mathbb{R}$. Alors :
> $$F_Z(x) = P(Z \leq x) = P(XY \leq x).$$
> On applique la formule des probabilités totales avec le SCE $([Y = 1], [Y = -1])$:
> $$\begin{aligned} F_Z(x) &= P([XY \leq x] \cap [Y = 1]) + P([XY \leq x] \cap [Y = -1]) \\ &= P([X \leq x] \cap [Y = 1]) + P([-X \leq x] \cap [Y = -1]) \\ &= P(X \leq x)P(Y = 1) + P(X \geq -x)P(Y = -1) \quad \text{par indép. de } X \text{ et } Y \\ &= pP(X \leq x) + (1 - P(X < -x))(1 - p) \\ &= pP(X \leq x) + (1 - P(X \leq -x))(1 - p) \quad \text{car } X \text{ est continue} \\ &= p\Phi(x) + (1 - \Phi(-x))(1 - p) = p\Phi(x) + (1 - p)\Phi(x) = \Phi(x). \end{aligned}$$
> Ainsi $F_Z = \Phi$, donc Z et X sont de même loi $\mathscr{N}(0, 1)$.

Exercice 10.4 (★★★ - QSP ESCP 2006)

Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle $\mathscr{E}(\lambda)$, de densité f. On définit une fonction G sur $\mathbb{R}$ par
$$G(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(X \leq xt) f(t) \, dt.$$

1. Déterminer la fonction G.

2. Montrer que G est la fonction de répartition d'une variable à densité Y, et donner une densité g de Y.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$G(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(X \leq xt) f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} F(xt)\lambda e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t,$$

où F est la fonction de répartition de X. En particulier F est nulle sur $]-\infty, 0]$ puisque X suit une loi exponentielle. Pour tout $t \geq 0$ et pour tout $x \leq 0$, $tx \leq 0$ et donc $F(xt) = 0$. Ainsi, pour tout $x \leq 0$, $G(x)$ existe bien et vaut 0.

Supposons maintenant $x > 0$. Alors $F(xt) = 1 - e^{-\lambda xt}$ et :

$$G(x) = \int_0^{+\infty} (1 - e^{-\lambda xt})\lambda e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} - e^{-\lambda(x+1)t}\,\mathrm{d}t$$

On reconnait l'intégrale de référence $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ qui converge si, et seulement si, $\alpha > 0$, et qui vaut $\dfrac{1}{\alpha}$ (densité d'une loi exponentielle de paramètre α). Ainsi les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda(x+1)t}\,\mathrm{d}t$ convergent puisque $\lambda > 0$ et $\lambda(x+1) > 0$. Donc pour tout $x > 0$, $G(x)$ existe bien, et on obtient par linéarité de l'intégrale (tout converge) :

$$G(x) = \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t - \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda(x+1)t}\,\mathrm{d}t = \frac{\lambda}{\lambda} - \frac{\lambda}{\lambda(x+1)} = \frac{x}{x+1}.$$

Ainsi : $\quad G : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{x}{x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}.$

2. On ne sait pas que G est une fonction de répartition, donc il va falloir montrer tous les points suivants :

   - G est croissante : elle est constante sur $]-\infty, 0]$ égale à 0, et sur $]0, +\infty[$:

   $$G(x) = \frac{x}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}.$$

   $x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$ étant décroissante sur $]0, +\infty[$, G est bien croissante sur cet intervalle à valeurs dans $]0, 1[$. G est donc croissante sur $\mathbb{R}$.
   - $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} G(x) = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} G(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1} = 1$.
   - G est continue à droite en tout point de R : c'est clair sur continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ comme composée de fonctions continues. Et en 0 :

   $$\lim_{x\to 0^+} G(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x+1} = 0 = G(0).$$

   Ainsi G est bien continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$.

   De ces trois points, il suit que G est la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle Y. Montrons que Y est à densité :

- G est continue sur $\mathbb{R}$: elle l'est sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$ comme composée de fonctions continues. Regardons la continuité en 0 :

$$\lim_{x\to 0^-} G(x) = 0 = G(0) = \lim_{x\to 0^+} G(x)$$

Donc G est continue en 0, et donc sur $\mathbb{R}$.

- G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$ comme quotient de fonctions $\mathscr{C}^1$ dont le dénominateur ne s'annule pas.

Ainsi Y est à densité. Pour déterminer une densité, on dérive G. Pour tout $x \neq 0$:

$$G'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{(x+1)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

Une densité de Y est donc $g : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{1}{(x+1)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$, la valeur en 0 étant choisie arbitrairement.

Exercice 10.5 (★★★★ - QSP HEC 2008)

Soit F la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité. Montrer que la fonction g définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = F(x+1) - F(x)$$

est une densité de probabilité.

Pour montrer que g est une densité de probabilité, on vérifie les trois points suivants :

- g est continue sauf ENFP : c'est bien le cas ici car F est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction de répartition d'une variable à densité. g est donc continue comme composée de fonctions continues.

- g est positive sur $\mathbb{R}$: pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = F(x+1) - F(x) \geq 0$ par croissance de la fonction de répartition F.

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 1 : c'est un peu plus délicat. La fonction g étant continue sur $\mathbb{R}$, l'intégrale est généralisée en $\pm\infty$. Prenons donc deux réels $a < b$. Par linéarité de l'intégrale :

$$\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b F(t+1)\,\mathrm{d}t - \int_a^b F(t)\,\mathrm{d}t = \int_{a+1}^{b+1} F(u)\,\mathrm{d}u - \int_a^b F(t)\,\mathrm{d}t \qquad (*)$$

en effectuant dans la première intégrale le changement de variables affine (donc licite) $u = t+1$. Par relation de Chasles, on en déduit :

$$\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t = \int_b^{b+1} F(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{a+1} F(t)\,\mathrm{d}t$$

Faisons maintenant le raisonnement suivant : on sait que $\lim\limits_{t\to+\infty} F(t) = 1$. Quand b est grand, on devrait donc avoir $F(t) \approx 1$ sur $[b, b+1]$, de sorte qu'on peut espérer avoir $\displaystyle\int_b^{b+1} F(t)\,\mathrm{d}t \approx \int_b^{b+1} 1\,\mathrm{d}t = 1$ pour b grand.

> Essayons de prouver ce résultat plus rigoureusement. Puisque F est croissante :
> $$\forall t \in [b, b+1], \quad F(b) \leq F(t) \leq F(b+1).$$
> D'où par croissance de l'intégrale :
> $$F(b) = \int_b^{b+1} F(b)\,\mathrm{d}t \leq \int_b^{b+1} F(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_b^{b+1} F(b+1)\,\mathrm{d}t = F(b+1).$$
> Puisque $\lim\limits_{b\to+\infty} F(b) = \lim\limits_{b\to+\infty} F(b+1) = 1$, $\lim\limits_{b\to+\infty} \int_b^{b+1} F(t)\,\mathrm{d}t$ existe et vaut 1 par théorème des gendarmes. On peut donc passer à la limite quand $b \to +\infty$ dans $(*)$: $\int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut
> $$\int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t = 1 - \int_a^{a+1} F(t)\,\mathrm{d}t.$$
> On montre exactement de la même manière que $\lim\limits_{a\to+\infty} \int_a^{a+1} F(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut :
> $$\int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t = 1 - 0 = 1.$$
>
> Ainsi g est bien une densité de probabilité.

Lois à densité usuelles

Exercice 10.6 (★★ - ✍)

Calculer les espérances et variances de toutes les lois à densité usuelles.
On pourra pour la loi normale commencer par une variable suivant une loi $\mathcal{N}(0,1)$, puis passer au cas général à l'aide d'une transformation affine.

Exercice 10.7 (★★ - Utilisation de la table de la loi normale)

1. On suppose que X est une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$.
   À l'aide de la table de valeurs de Φ, déterminer une valeur approchée des probabilités suivantes :
   $$P(X \leq 0,23)\ ,\ P(X \geq 0,82)\ ,\ P(-3 \leq X \leq 1)\ ,\ P(X^2 > 0,82^2).$$
2. Reprendre la question précédente en supposant cette fois que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(-1,4)$.
3. On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. Déterminer $x \in \mathbb{R}$ pour que :
   $$P(X \leq x) = 0,95\ ;\ P(X \geq x) = 0,10\ ;\ P(|X| \leq x) = 0,90\ ;\ P(5 + 3X > x) = 0,01.$$
4. On suppose maintenant que X suit une loi normale.
   Déterminer l'espérance et la variance de X sachant $P(X < -1) = 0,05$ et $P(X > 3) = 0,12$.

Exercice 10.8 (★★ - Calcul d'intégrales gaussiennes à l'aide de lois normales)

En utilisant des lois normales bien choisies, calculer les valeurs des intégrales suivantes :
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(t^2-8t)}\,\mathrm{d}t, \quad J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2-4t-8}\,\mathrm{d}t, \quad K = \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2-4t-8}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 10.9 (★★★ - Caractérisation de la loi exponentielle par l'absence de mémoire - ✍)
On dit qu'une variable aléatoire T à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ est *sans mémoire* si elle vérifie, pour tous $s, t > 0$:

$$P(T > t + s) = P(T > t)P(T > s).$$

1. Vérifier qu'une variable aléatoire T suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ est une variable aléatoire sans mémoire.
2. Réciproquement, soit T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ sans mémoire et vérifiant $P(T > 0) > 0$.
   (a) On suppose qu'il existe $t > 0$ tel que $P(T > t) = 0$. Calculer $P(T > \frac{t}{2^n})$ en fonction de $P(T > t)$. En déduire que $P(T > 0) = 0$. Conclusion ?
   (b) Soit $\alpha = P(T > 1)$. On souhaite démontrer que $P(T > t) = \alpha^t$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.
      i. Démontrer ce résultat si $t \in \mathbb{N}^*$.
      ii. On suppose $t \in \mathbb{Q}_+^*$ et on note $t = \frac{p}{q}$. Démontrer que $P(T > p) = (P(T > p/q))^q$. En déduire que le résultat est vrai pour $t \in \mathbb{Q}_+^*$.
      iii. En utilisant la décroissance de $x \mapsto P(T > x)$, démontrer que le résultat est vrai pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.
   (c) Conclure.
3. Justifier le terme « sans mémoire ». On pourra calculer $P_{[T>s]}(T > s + t)$.

1. Si T est une variable aléatoire suivant une loi $\mathscr{E}(\lambda)$, sa fonction de répartition est :

$$F_T : x \mapsto P(T \leq x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

   Soient $s, t > 0$. Calculons :

$$\begin{aligned} P(T > t)P(T > s) &= (1 - F_T(t))(1 - F_T(s)) = e^{-\lambda t}e^{-\lambda s} \\ &= e^{-\lambda(s+t)} = 1 - F_T(s + t) = P(T > s + t). \end{aligned}$$

   Donc T est sans mémoire.

2. (a) Supposons qu'il existe $t > 0$ tel que $P(T > t) = 0$. Puisque T est sans mémoire :

$$P(T > t) = P\left(T > \frac{t}{2} + \frac{t}{2}\right) = P\left(T > \frac{t}{2}\right)P\left(T > \frac{t}{2}\right) = P\left(T > \frac{t}{2}\right)^2.$$

   Par une récurrence immédiate, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$P(T > t) = P\left(T > \frac{t}{2^n}\right)^{2^n}.$$

   Et puisque $P(T > t) = 0$, il suit que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$P\left(T > \frac{t}{2^n}\right) = 0.$$

   Or, par propriété de la limite monotone (les évènements $[T > \frac{t}{2^n}]$ formant une suite croissante pour l'inclusion) :

$$P(T > 0) = P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty}\left[T > \frac{t}{2^n}\right]\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(T > \frac{t}{2^n}\right) = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0.$$

D'où une contradiction puisque $P(T > 0) > 0$ par hypothèse. Ainsi pour tout $t > 0$, $P(T > t) > 0$. En particulier, $P(T > 1) > 0$.

(b) i. Par récurrence sur $t \in \mathbb{N}^*$.

Init. Pour $t = 1$, $P(T > 1) = \alpha$ par définition du réel α. D'où la propriété au rang 1.

Hér. Soit $t \in \mathbb{N}^*$. Supposons la propriété vraie au rang t. Au rang $t + 1$:

$$\begin{aligned} P(T > t+1) &= P(T > t)P(T > 1) \quad \text{car } T \text{ sans mémoire} \\ &= \alpha^t \times \alpha \quad \text{par hyp. de réc.} \\ &= \alpha^{t+1}. \end{aligned}$$

D'où la propriété au rang $t + 1$.

On conclut par principe de récurrence.

ii. Supposons que $t = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}_+^*$. Calculons :

$$P\left(T > \frac{p}{q}\right) P\left(T > \frac{p}{q}\right) = P\left(T > \frac{2p}{q}\right)$$

car T est sans mémoire. En répétant cet argument, on montre par une récurrence immédiate que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$P\left(T > \frac{p}{q}\right)^k = P\left(T > \frac{kp}{q}\right).$$

En particulier, pour $k = q$, il vient :

$$P\left(T > \frac{p}{q}\right)^q = P\left(T > \frac{qp}{q}\right) = P\left(T > p\right).$$

Et comme par la question précédente, $P\left(T > p\right) = \alpha^p$, il suit :

$$P\left(T > \frac{p}{q}\right)^q = \alpha^p.$$

D'où en élevant à la puissance $\frac{1}{q}$:

$$P\left(T > \frac{p}{q}\right) = \alpha^{\frac{p}{q}}.$$

Ainsi, le résultat est bien vrai pour tout $t \in \mathbb{Q}_+^*$.

iii. La fonction $x \mapsto P(T > x) = 1 - P(T \leq x) = 1 - F_T(x)$ est bien décroissante sur $\mathbb{R}$ puisque F_T est croissante.

Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. Admettons provisoirement l'existence de deux suites (a_n) et (b_n) de rationnels satisfaisants les propriétés suivantes :

(i) (a_n) est croissante, (b_n) est décroissante ;

(ii) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq t \leq b_n$;

(iii) (a_n) et (b_n) convergent vers t.

Par décroissance de la fonction $x \mapsto P(T > x)$, il suit pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$P(T > b_n) \leq P(T > t) \leq P(T > a_n).$$

Par la question précédente (le résultat est vrai pour les rationnels), on obtient :

$$\alpha^{b_n} \leq P(T > t) \leq \alpha^{a_n}.$$

Et puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha^{b_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \alpha^{a_n} = \alpha^t$, on obtient par passage à la limite dans les inégalités (tout converge donc bien) :

$$\alpha^t \leq P(T > t) \leq \alpha^t.$$

Ainsi $P(T > t) = \alpha^t$ et le résultat est vrai pour tout $t > 0$.

Reste le cas $t = 0$. Toujours par décroissance de $x \mapsto P(T > x)$ et par la question précédente :

$$\alpha^{\frac{1}{n+1}} = P(T > \frac{1}{n+1} \leq P(T > 0) \leq 1$$

par la question précédente. Et puisque $\alpha > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha^{\frac{1}{n+1}} = 1$ et par passage à la limite dans les inégalités :

$$P(T > 0) = 1 = \alpha^0.$$

Le résultat est finalement vrai pour tout $t \geq 0$.

Reste à démontrer l'existence des deux suites (a_n) et (b_n). Pour cela, posons pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = \frac{\lfloor t \times 10^n \rfloor}{10^n} \quad \text{et} \quad b_n = \frac{\lfloor t \times 10^n \rfloor + 1}{10^n}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n correspond à la troncature de l'écriture décimale de t à 10^{-n} par valeur inférieure, et (b_n) la troncature par valeur supérieure. Pour être plus concret, pour $t = \pi = 3,14159\dots$:

$$a_0 = 3,\ a_1 = 3.1,\ a_2 = 3.14\ a_3 = 3.141, \dots,$$

$$b_0 = 4,\ b_1 = 3.2,\ b_2 = 3.15\ b_3 = 3.142, \dots$$

Par définition[a], les suites (a_n) et (b_n) vérifient donc les points (i) à (iii).

(c) On a ainsi montré que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $P(T > t) = \alpha^t$., ce qui ce récrit :

$$F_T(t) = 1 - P(T > t) = 1 - \alpha^t.$$

Or $\alpha = P(T > 1) \in]0, 1]$ et est différent de 1 (sinon $F_T(t) = 0$ pour tout $t \geq 0$, ce qui contredit $\lim\limits_{t\to+\infty} F_T(t) = 1$ puisque F_T est une fonction de répartition). Puisque $x \mapsto e^{-x}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $]0, 1[$, il existe un unique réel $\lambda > 0$ tel que $\alpha = e^{-\lambda}$. Par suite :

$$F_T(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

pour tout $t \geq 0$. Et comme T est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, $F_T(t) = 0$ si $t < 0$. T suit donc une loi exponentielle de paramètre $\lambda = -\ln(\alpha)$.

3. Soient $s, t > 0$. Calculons (en utilisant que T est sans mémoire) :

$$P_{[T>s]}(T > s + t) = \frac{P(T > s + t)}{P(T > s)} = \frac{P(T > s)P(T > t)}{P(T > s)} = P(T > t)$$

Ceci peut se traduire ainsi : si T modélise la durée de vie d'un phénomène dit *sans mémoire*, alors la probabilité que le phénomène dure au moins $s + t$ heures sachant qu'il a déjà duré t heures sera la même que la probabilité de durer s heures à partir de sa mise en fonction initiale. En d'autres termes, le fait que le phénomène ait duré pendant t heures ne change rien à son espérance de vie à partir du temps t.

La loi exponentielle est ainsi utilisée pour modéliser des phénomènes sans mémoire tels que la durée de vie d'un atome radioactif ou d'un composant électronique. Elle peut aussi être utilisée pour décrire par exemple le temps écoulé entre deux coups de téléphone reçus au bureau, ou le temps écoulé entre deux accidents de voiture dans lequel un individu donné est impliqué.

[a] Si vous n'êtes pas satisfait de cet argument, je vous invite à démontrer à la main que ces suites satisfont les points (i) à (iii) !

Fonction d'une variable aléatoire à densité

Exercice 10.10 (★★)
Soit la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ 1 - \dfrac{1}{x} & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$

1. Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle X.
2. Montrer que X est une variable à densité et déterminer une densité de X.
3. Montrer que X n'admet pas d'espérance. X admet-elle une variance ?
4. (a) On pose $Y = -3X + 2$. Justifier que Y est une variable à densité et déterminer une densité de Y. Y admet-elle une espérance ?
   (b) On pose $Z = 1 + \sqrt{X}$. Montrer que Z est une variable à densité et déterminer une densité de Z. Montrer que Z admet une espérance et la déterminer. Z admet-elle une variance ?

Exercice 10.11 (★★)
Pour tout réel t, on pose $f(t) = e^{-2|t|}$.

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f, et $Y = X^2$. Montrer que Y est une variable aléatoire à densité, et en déterminer une densité.

1. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions continues, et elle est positive par positivité de l'exponentielle. Soient $a < b$ deux réels. Par relation de Chasles :
$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_a^0 e^{-2|t|}\,\mathrm{d}t + \int_0^b e^{-2|t|}\,\mathrm{d}t = \int_a^0 e^{2t}\,\mathrm{d}t + \int_0^b e^{-2t}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{e^{2t}}{2}\right]_a^0 + \left[-\frac{e^{-2t}}{2}\right]_0^b = \frac{1}{2}\left(1 - e^{2a} + 1 - e^{-2b}\right).\end{aligned}$$
Comme $\lim\limits_{b\to+\infty} \frac{1}{2}\left(1 - e^{2a} + 1 - e^{-2b}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - e^{2a}\right)$, puis que $\lim\limits_{a\to-\infty} \frac{1}{2}\left(1 - e^{2a} + 1\right) = 1$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge bien et vaut 1. Ainsi f est une densité de probabilités.
2. Soit X une variable aléatoire continue de densité f. On pose $Y = X^2$.
   - **Ensemble image de Y.** Puisque $X(\Omega) = \mathbb{R}$, $Y(\Omega) = \mathbb{R}_+$. Ainsi, pour tout $x < 0$, $P(Y \leq x) = 0$.

- **Fonction de répartition de Y.** Soit $x \geq 0$. Calculons :

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P(Y \leq x) = P(X^2 \leq x) = P(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}) \\ &= P(X \leq \sqrt{x}) - P(X < \sqrt{x}) = P(X \leq \sqrt{x}) - P(X \leq \sqrt{x}) \text{ car } X \text{ continue} \\ &= F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x}). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$F_Y : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x}) & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

- **Y est à densité.** F_Y est continue et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ en tant que composée de fonctions $\mathscr{C}^1$ sur ces intervalles (on notera que F_X est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ en tant que primitive de f continue sur $\mathbb{R}$). Reste à montrer que F_Y est continue en 0 :

$$F_Y(0) = F_X(0) - F_X(0) = 0 = \lim_{x \to 0^+} F_Y(x) = \lim_{x \to 0^-} F_Y(x).$$

Donc F_Y est bien continue sur $\mathbb{R}$. Ainsi, Y est une variable à densité.

- **Densité de Y.** Pour tout $x \neq 0$:

$$F_Y'(x) \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}} F_X'(\sqrt{x}) + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} F_X'(-\sqrt{x}) = \dfrac{e^{-\frac{2}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{x}} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Une densité de Y est donc (en choisissant une valeur arbitraire en 0) :

$$f_Y : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ \dfrac{e^{-\frac{2}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{x}} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Exercice 10.12 (★★)

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

1. Donner la loi de $Y = |X|$. Préciser son espérance et sa variance.
2. Déterminer la fonction de répartition de $Z = \frac{X+|X|}{2}$. La variable Z est-elle à densité ?

1. On procède par étapes.

- **Ensemble image.** Puisque $X(\Omega) = \mathbb{R}$, $Y(\Omega) = \mathbb{R}_+$ et pour tout $x < 0$, $F_Y(x) = 0$.
- **Fonction de répartition de Y.**
Soit $x \geq 0$. Calculons :

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P(|X| \leq x) = P(-x \leq X \leq x) = P(X \leq x) - P(X < x) \\ &= P(X \leq x) - P(X \leq -x) \quad \text{car } X \text{ continue} \\ &= \Phi(x) - \Phi(-x) = \Phi(x) - (1 - \Phi(x)) = 2\Phi(x) - 1. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$F_Y : x \mapsto \begin{cases} 2\Phi(x) - 1 & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

- **Y est-elle à densité ?**

La fonction F_Y est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$ en tant que composée de fonctions qui le sont. De plus :

$$\lim_{x\to 0^+} F_Y(x) = F_Y(0) = 2\Phi(0) - 1 = 2\times\frac{1}{2} - 1 = 0 = \lim_{x\to 0^-} F_Y(x).$$

Donc F_Y est continue en 0, et donc sur $\mathbb{R}$. Ainsi, Y est à densité.

- **Une densité de Y.**

  Pour tout $x \neq 0$:

$$F'_Y(x) = \begin{cases} 2\Phi'(x) & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

  Une densité de Y est donc (en fixant une valeur arbitraire en 0) :

$$f_Y(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Y admet une espérance si, et seulement si, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f_Y(t)\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} te^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$ converge absolument, donc converge car la fonction à intégrer est positive. Puisqu'elle est de plus continue sur $[0,+\infty[$, c'est une intégrale généralisée en $+\infty$. Soit donc $A > 0$, et calculons :

$$\int_0^A te^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \left[-e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_0^A = 1 - e^{-\frac{A^2}{2}} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Donc $E(Y)$ existe et vaut $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$.

Calculons le moment d'ordre 2. Pour cela, remarquons que $Y^2 = |X|^2 = X^2$, de sorte que :

$$E(Y^2) = E(X^2) = V(X) + E(X)^2 = 1 + 0^2 = 1.$$

D'où par Huygens :

$$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = 1 - \frac{2}{\pi}.$$

2. Remarquons que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{x+|x|}{2} = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} = \max(0,x).$$

Ainsi, $Z = \max(X,0)$. En particulier, $Z(\Omega) = \mathbb{R}_+$, et pour tout $x < 0$:

$$F_Z(x) = 0.$$

D'autre part, pour tout $x \geq 0$:

$$F_Z(x) = P(Z \leq x) = P(X \leq x) = \Phi(x).$$

Ainsi :

$$F_Z : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \Phi(x) & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Cette fonction est discontinue en 0 puisque $\lim_{x\to 0^-} F_Z(x) = 0 \neq F_Z(0) = \Phi(0) = \dfrac{1}{2}$. Donc Z n'est pas une variable à densité.

On aurait pu également le remarquer en notant que :

$$P(Z=0) = P(X \leq 0) = \Phi(0) = \frac{1}{2} \neq 0$$

ce qui montre que Z n'est pas une variable continue (une variable continue ne « charge » pas les points). Notons enfin que Z n'est pas une variable discrète puisque sa fonction de répartition n'est pas en escalier.

Exercice 10.13 (★★★ - QSP HEC 2010)

On dit qu'une variable X suit la loi de Cauchy si elle admet pour densité la fonction $f : t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+t^2}$.
Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Cauchy. Montrer que $\frac{1}{X}$ suit la loi de Cauchy.

Essayons d'exprimer la fonction de répartition de $\frac{1}{X}$ en fonction de celle de X.
Notons que $P(X=0)=0$, de sorte que $\frac{1}{X}$ est bien définie[a].
Si $x=0$, alors $P\left(\frac{1}{X} \leq 0\right) = P(X \leq 0) = F_X(0)$.
Si $x>0$, alors

$$F_{1/X}(x) = P\left(\frac{1}{X} \leq x\right) = P(X \leq 0) + P\left(\frac{1}{x} \leq X\right) = F_X(0) + 1 - F_X\left(\frac{1}{x}\right).$$

Si $x<0$, alors

$$F_{1/X}(x) = P(1/X \leq x) = P\left(\frac{1}{x} \leq X \leq 0\right) = F_X(0) - F_X\left(\frac{1}{x}\right).$$

De plus, nous connaissons la fonction de répartition de X, puisque $\forall x \in \mathbf{R}$:

$$F_X(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{Arctan}(x) + \frac{\pi}{2}\right).$$

Notons qu'en particulier, on a $F_X(0) = \frac{1}{2}$, et donc $F_{1/X}(0) = F_X(0)$.
Il s'agit à présent de prouver que

$$\begin{cases} 1 - \frac{1}{\pi}\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\pi}\operatorname{Arctan}(x) + \frac{1}{2} \text{ si } x>0 \\ -\frac{1}{\pi}\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\pi}\operatorname{Arctan}(x) + \frac{1}{2} \text{ si } x<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} \text{ si } x>0 \\ \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2} \text{ si } x<0 \end{cases}$$

Or, la fonction $g : x \mapsto \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}^*$, et sa dérivée vaut

$$\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

Il serait dès lors tentant de conclure que g est constante, mais malheureusement, $\mathbf{R}^*$ n'est pas un intervalle, et nous pouvons juste conclure que g est constante sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.
Or, on a

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\frac{\pi}{2} \text{ et } \lim_{x\to+\infty} g(x) = \frac{\pi}{2}$$

ce qui permet d'affirmer que

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Ceci suffit à prouver que pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $F_X(x) = F_{1/X}(x)$. Et donc X et $\frac{1}{X}$ suivent la même loi.

[a] En réalité, il existe peut-être des $\omega \in \Omega$ tels que $X(\omega) = 0$, mais ces ω forment un ensemble de mesure nulle. Sur cet ensemble, on peut par exemple décréter que $\frac{1}{X} = 0$ ce qui ne changera pas sa loi.

Exercice 10.14 (★★★)

Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1[$.

1. Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n < m$. On pose $X = n + \lfloor (m - n + 1)U \rfloor$. Montrer que $X \hookrightarrow \mathscr{U}(\llbracket n, m \rrbracket)$.
2. Soit $\lambda > 0$. On pose $Y = -\dfrac{1}{\lambda} \ln(1 - U)$. Déterminer la loi de Y.
3. On pose $Z = \lfloor Y \rfloor + 1$. Montrer que Y suit une loi usuelle que l'on précisera.
4. On rappelle que la fonction `rd.random()` (de la bibliothèque `numpy.random`) renvoie une réalisation d'une variable aléatoire suivant une loi $\mathscr{U}([0, 1])$. Écrire des fonctions `uniforme(n,m)`, `exponentielle(lambda)` et `geometrique(p)` simulant respectivement une loi $\mathscr{U}(\llbracket n, m \rrbracket)$, une loi $\mathscr{E}(\lambda)$ et une loi $\mathscr{G}(p)$ à partir de la fonction `rd.random()`.

Exercice 10.15 (★★★★ - QSP HEC 2013)

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ qui suit la loi uniforme sur $]-1, 1[$.

1. Trouver toutes les fonctions ϕ définies, continues et strictement monotones sur $]-1, 1[$ telles que la variable aléatoire $Y = \phi(X)$ suive la loi exponentielle de paramètre 1.
2. En déduire une fonction paire ψ définie sur $]-1, 1[$, telle que la variable aléatoire $\psi(X)$ suive aussi la loi exponentielle de paramètre 1.

1. Puisque ϕ est continue et strictement monotone sur $]-1, 1[$. Elle réalise donc une bijection de I sur un intervalle ouvert $J =]a, b[$ avec $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. De plus, puisque $Y = \phi(X)$ suit une loi exponentielle de paramètre 1, on a que $J =]0, +\infty[$.

   Commençons par le cas où ϕ est strictement croissante. On a pour tout $x > 0$:

   $$F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(\phi(X) \leq x) = P(X \leq \phi^{-1}(x)) = F_X(\phi^{-1}(x))$$

   Or on a pour tout $t \in]-1, 1[$, $F_X(t) = \dfrac{t - (-1)}{1 - (-1)} = \dfrac{t + 1}{2}$. Puisque de plus $\phi^{-1}(x) \in]-1, 1[$, on en déduit que :

   $$F_Y(x) = \frac{\phi^{-1}(x) + 1}{2}.$$

   Or Y suit une loi $\mathscr{E}(1)$ par hypothèse, donc on a :

   $$F_Y(x) = 1 - e^{-x}.$$

   On en déduit donc que $1 - e^{-x} = \dfrac{\phi^{-1}(x) + 1}{2}$, soit encore $\phi^{-1}(x) = 1 - 2e^{-x}$. On cherche alors ϕ en résolvant pour $x > 0$ et $t \in]-1, 1[$:

$$\begin{aligned} t = 1 - 2e^{-x} \Leftrightarrow e^{-x} = \frac{1-t}{2} \Leftrightarrow -x = \ln\left(\frac{1-t}{2}\right) \\ \Leftrightarrow x = -\ln\left(\frac{1-t}{2}\right) \end{aligned}$$

Ainsi on obtient dans ce cas $\phi(t) = -\ln\left(\frac{1-t}{2}\right)$.

Réciproquement, on vérifie par une étude de fonction que ϕ est bien continue strictement croissante de $]-1, 1[$ dans $]0, +\infty[$. Et d'après les calculs précédents, on a bien pour tout $x > 0$:

$$F_Y(x) = \frac{\phi^{-1}(x) + 1}{2} = \frac{1 - 2e^{-x} + 1}{2} = 1 - e^{-x}.$$

Et pour $x \leq 0$, $F_Y(x) = P(\phi(X) \leq x) = 0$ car $\phi(X) > 0$. On peut donc conclure que $\phi : t \in]-1, 1[\mapsto -\ln\left(\frac{1-t}{2}\right)$ est l'unique fonction continue et strictement croissante répondant au problème.

Supposons à présent que ϕ est strictement décroissante. Alors pour tout $x > 0$, on obtient en reprenant les calculs :

$$F_Y(x) = P(\phi(X) \leq x) = P(X \geq \phi^{-1}(x)) = 1 - P(X < \phi^{-1}(x)) = 1 - F_X(\phi^{-1}(x))$$

car X est à densité. Comme pour tout $t \in]-1, 1[$, $F_X(t) = \frac{t+1}{2}$ et que $\phi^{-1}(x) \in]-1, 1[$, on obtient :

$$F_Y(x) = 1 - \frac{\phi^{-1}(x) + 1}{2} = \frac{1 - \phi^{-1}(x)}{2}.$$

Or Y suit une loi $\mathscr{E}(1)$ par hypothèse, donc on a :

$$F_Y(x) = 1 - e^{-x}.$$

On en déduit donc que $1 - e^{-x} = \frac{1 - \phi^{-1}(x)}{2}$, soit encore $\phi^{-1}(x) = 2e^{-x} - 1$. On cherche alors ϕ en résolvant pour $x > 0$ et $t \in]-1, 1[$:

$$\begin{aligned} t = 2e^{-x} - 1 \Leftrightarrow e^{-x} = \frac{1+t}{2} \Leftrightarrow -x = \ln\left(\frac{1+t}{2}\right) \\ \Leftrightarrow x = -\ln\left(\frac{1+t}{2}\right) \end{aligned}$$

Ainsi on obtient dans ce cas $\phi(t) = -\ln\left(\frac{1+t}{2}\right)$. Et on vérifie réciproquement que ϕ est bien strictement décroissante et que $Y = \phi(X)$ suit bien une loi $\mathscr{E}(1)$.

2. On va chercher une telle fonction $\psi :]-1, 1[\to [0, +\infty[$ paire et telle que sa restriction $\tilde{\psi}$ à $[0, 1[$ réalise une bijection continue croissante strictement de $[0, 1[$ sur $[0, +\infty[$.

   Posons $Y = \psi(X)$. Y est une variable aléatoire d'après le cours. Pour tout $y \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(\psi(X) \leq y) = P(-\tilde{\psi}^{-1}(y) \leq X \leq \tilde{\psi}^{-1}(y)) \\ &= P(X \leq \tilde{\psi}^{-1}(y)) - P(X < -\tilde{\psi}^{-1}(y)) = P(X \leq \tilde{\psi}^{-1}(y)) - P(X \leq -\tilde{\psi}^{-1}(y)) \end{aligned}$$

car X est à densité. Comme de plus $\tilde{\psi}^{-1}(y) \in [0,1[$ et que $F_X(x) = \dfrac{x+1}{2}$ pour tout $x \in]-1,1[$, on obtient :

$$F_Y(y) = \frac{\tilde{\psi}^{-1}(y)+1}{2} - \frac{1-\tilde{\psi}^{-1}(y)}{2} = \tilde{\psi}^{-1}(y).$$

On cherche ψ de telle sorte que $Y \hookrightarrow \mathscr{E}(1)$, soit donc :

$$\tilde{\psi}^{-1}(y) = 1 - e^{-y}.$$

On résout pour tout $y \geq 0$ et $x \in [0,1[$:

$$x = 1 - e^{-y} \Leftrightarrow e^{-y} = 1 - x \Leftrightarrow y = -\ln(1-x)$$

Ainsi on obtient que pour tout $x \in [0,1[$, $\psi(x) = \tilde{\psi}(x) = -\ln(1-x)$. Comme de plus ψ est paire sur $]-1,1[$, on a pour tout $x \in]-1,0]$:

$$\psi(x) = \psi(-x) = -\ln(1-(-x)) = -\ln(1-x).$$

On obtient donc que pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\psi(x) = -\ln(1-|x|)$$

Montrons réciproquement qu'une telle fonction convient, c'est à dire que $\psi : x \in]-1,1[\mapsto -\ln(1-|x|)$ est paire et que $Y = \psi(X) \hookrightarrow \mathscr{E}(1)$. Cette fonction est clairement paire, et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P(-\ln(1-|X|) \leq x) = P(\ln(1-|X|) \geq -x) = P(1-|X| \geq e^{-x}) \quad \text{car exp croissante} \\ &= P(|X| \leq 1 - e^{-x}) \end{aligned}$$

On résout :

$$1 - e^{-x} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \leq e^{-x} \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 0.$$

Donc si $x < 0$, $F_Y(x) = 0$. Si $x \geq 0$, on a :

$$F_Y(x) = P(|X| \leq 1 - e^{-x}) = P(-1 + e^{-x} \leq X \leq 1 - e^{-x}) = P(X \leq 1 - e^{-x}) - P(X \leq -1 + e^{-x})$$

car X est à densité. Comme de plus $1 - e^{-x} \in [0,1[$ car $x \geq 0$, et que $F_X(y) = \dfrac{y+1}{2}$ pour tout $y \in]-1,1[$, on obtient :

$$F_Y(x) = \frac{1-e^{-x}+1}{2} - \frac{1-1+e^{-x}}{2} = 1 - e^{-x}.$$

Ainsi la fonction $\psi : x \in]-1,1[\mapsto -\ln(1-|x|)$ répond bien au problème.

Moments d'une variable à densité

Exercice 10.16 (★)

1. Soit $X \hookrightarrow \mathscr{U}(]0,1[)$. Justifier l'existence de $E(\ln(X))$ et la calculer.

2. Soit $X \hookrightarrow \mathscr{N}(0,1)$. On note Φ la fonction de répartition de X. Justifier l'existence de $E(\Phi(X))$ et la calculer.

Exercice 10.17 (★)

1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} -\ln(x) & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f. Montrer que X admet des moments de tout ordre et les calculer.

1. Montrons que f est une densité de probabilité.
   (i) f est continue sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en 0 et en 1 (où il n'est pas nécessaire d'étudier la continuité, inutile d'y perdre du temps donc).
   (ii) f est positive sur $\mathbb{R}$.
   (iii) Étudions $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$. Le logarithme étant continue sur $]0,1]$, l'intégrale est généralisée en 0. Soit donc $0 < a \leq 1$. On effectue une intégration par parties sur le segment $[a,1]$:
   $$\begin{array}{c|ccc} + & \ln(t) & & 1 \\ & & \searrow & \\ - & \frac{1}{t} & \overset{\int}{\leftarrow} & t \end{array}$$
   Les fonctions $t \mapsto \ln(t)$ et $t \mapsto t$ sont de classe $\mathscr{C}^1$, donc l'intégration par parties est licite. De plus, on a :
   $$\int_a^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t = [t\ln(t)]_a^1 - \int_a^1 1\,\mathrm{d}t = -a\ln(a) - 1 + a \underset{a\to 0^+}{\longrightarrow} -1$$
   Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 1.

   f est donc bien une densité de probabilité.

2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. X admet un moment d'ordre k si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^k f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 t^k \ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument, soit si et seulement si elle converge (car la fonction intégrée est de signe constant).

   Or la fonction $g_k : t \mapsto t^k \ln(t)$ est continue sur $]0,1]$, et on a $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} g_k(t) = 0$ par croissances comparées. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^k \ln(t)\,\mathrm{d}t$ est donc faussement impropre en 0, et converge donc. Donc $E(X^k)$ existe bien.

   Remarque. Cela résultait aussi directement d'une propriété du cours : on a $X(\Omega) =]0,1]$, et donc $X^k(\Omega) =]0,1]$ également, qui est borné. Par le cours, on sait donc que $E(X^k)$ existe bien. En fait, si X est bornée, elle admet des moments à n'importe quel ordre.

   Tentons de calculer cette intégrale. Soit $0 < a \leq 1$. On effectue encore une fois une intégration par parties sur le segment $[a,1]$:
   $$\begin{array}{c|ccc} + & \ln(t) & & t^k \\ & & \searrow & \\ - & \frac{1}{t} & \overset{\int}{\leftarrow} & \frac{t^{k+1}}{k+1} \end{array}$$

Les fonctions $t \mapsto \ln(t)$ et $t \mapsto t^{k+1}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$, donc l'intégration par parties est licite. De plus, on a :

$$\int_a^1 t^k \ln(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\ln(t)\right]_a^1 - \int_a^1 \frac{t^k}{k+1}\,\mathrm{d}t = -a\ln(a) - \frac{1}{k+1} + \frac{a^k}{k+1}$$

$$\underset{a\to 0^+}{\longrightarrow} -\frac{1}{k+1}$$

On retrouve ici que $\int_0^1 t^k \ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge, et elle vaut $-\frac{1}{k+1}$. Ainsi $E(X^k)$ existe et vaut $\frac{1}{k+1}$.

Exercice 10.18 (★★)

Soit X une variable aléatoire suivant une loi γ de paramètre ν.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X admet un moment d'ordre n, et calculer ce moment.
2. On pose $Y = e^X$. Montrer que Y est une variable à densité, et donner une de ses densités.
3. Montrer que Y n'admet pas d'espérance.

Exercice 10.19 (★★)

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

1. Déterminer la loi de $-X$ puis de $\pi(X+1)$.
2. On pose $Y = \frac{X^2}{2}$.
   (a) Montrer que Y admet une espérance et une variance et les déterminer.
   (b) Montrer que Y suit une loi usuelle que l'on précisera. Retrouver alors son espérance et sa variance.

1. Rappelons qu'une transformation affine d'une variable suivant une loi normale suit encore une loi normale, et qu'on obtient ses paramètres en calculant espérance et variance. Appliquons cela dans cette question.

   Pour $U = -X$, elle suit une loi normale de paramètres :

   $$E(U) = E(-X) = -E(X) = 0 \quad \text{par lin. de l'espérance,}$$

   $$V(U) = V(-X) = V(X) = 1.$$

   Ainsi U suit la loi normale $\mathscr{N}(0,1)$.

   Pour $V = \pi X + \pi$, elle suit une loi normale de paramètres :

   $$E(V) = \pi E(X) + \pi = \pi,$$

   $$V(V) = V(\pi X + \pi) = \pi^2 V(X) = \pi^2.$$

   Donc V suit une loi normale $\mathscr{N}(0, \pi^2)$.

2. (a) Puisque $Y = \frac{X^2}{2}$ et que X admet un moment d'ordre 2 (elle suit une loi normale $\mathscr{N}(0,1)$), Y admet une espérance par linéarité de l'espérance, et :

$$E(Y) = \frac{1}{2}E(X^2) = \frac{1}{2}(V(X)+E(X)^2) = \frac{1}{2}(1+0^2) = \frac{1}{2}.$$

Pour la variance, on cherche le moment d'ordre 2 de Y, ce qui revient à étudier le moment d'ordre 4 de X. On procède alors par théorème de transfert. Il s'agira alors d'effectuer des intégrations par parties successives. Je vous laisse le soin d'effectuer ces calculs fastidieux.

(b) On procède par étapes.

- **Ensemble image de Y.**
  Puisque $X(\Omega) = \mathbb{R}$, alors $Y(\Omega) = \mathbb{R}_+$ et pour tout $x < 0$, $F_Y(x) = 0$.
- **Fonction de répartition de Y.**
  Soit $x \geq 0$. Calculons :

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P(Y \leq x) = P(X^2 \leq 2x) = P(-\sqrt{2x} \leq X \leq \sqrt{2x}) \\ &= P(X \leq \sqrt{2x}) - P(X < \sqrt{2x}) = P(X \leq \sqrt{2x}) - P(X \leq \sqrt{2x}) \quad \text{car } X \text{ continue} \\ &= \Phi(\sqrt{2x}) - \Phi(-\sqrt{2x}) = \Phi(\sqrt{2x}) - (1-\Phi(\sqrt{2x})) = 2\Phi(\sqrt{2x}) - 1. \end{aligned}$$

  Ainsi,

$$F_Y : x \mapsto \begin{cases} 2\Phi(\sqrt{2x}) - 1 & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

- **Y est-elle à densité ?**
  F_Y est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ en tant que composée de fonctions qui le sont. En 0 :

$$\lim_{x \to 0^-} F_Y(x) = 0$$

  et

$$\lim_{x \to 0^+} F_Y(x) = F_Y(0) = 2\Phi(0) - 1 = 2 \times \frac{1}{2} - 1 = 0.$$

  Donc F_Y est continue en 0, et donc sur $\mathbb{R}$. Y est bien une variable à densité.
- **Densité de Y.**
  Si $x < 0$, $F_Y'(x) = 0$. Pour $x > 0$, calculons :

$$\begin{aligned} F_Y'(x) &= 2 \times \frac{2}{2\sqrt{2x}} \times \Phi'(\sqrt{2x}) \\ &= \sqrt{\frac{2}{x}} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\sqrt{2x})^2}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} x^{-1/2} e^{-x} = \frac{1}{\Gamma(1/2)} x^{1/2-1} e^{-x} \end{aligned}$$

  Une densité de Y est donc par exemple :

$$f : t \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(1/2)} t^{1/2-1} e^{-t} & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{si } t \leq 0. \end{cases}$$

  On reconnait une densité de la loi $\gamma(1/2)$. Ainsi, Y suit une loi $\gamma(1/2)$.

On retrouve en particulier que $E(Y)$ et $V(Y)$ existent et valent $\frac{1}{2}$.

Exercice 10.20 (★★ - Loi de Pareto et loi exponentielle)

Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle $\mathscr{E}(a)$, $a > 0$. On pose alors $Y = e^X$.

1. Déterminer la fonction de répartition de Y. En déduire que Y est une variable à densité et en donner une densité.
2. À quelle condition sur a la variable aléatoire Y admet-elle une espérance ? Calculer alors $E(Y)$.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que Y admette une variance, et lorsque cette condition est vérifiée, calculer $V(Y)$.

1. Procédons par étapes.
   - **Ensemble image de Y.**
     Fixons pour densité de X la fonction :
     $$f_X : t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} ae^{-at} & \text{si } t \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
     Ainsi $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$, et donc $Y(\Omega) = [1, +\infty[$. En particulier, $F_Y(x) = P(Y \leq x) = 0$ pour tout $x < 1$.
   - **Calcul de F_Y.**
     Pour $x \geq 1$, calculons :
     $$F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(e^X \leq x) = P(X \leq \ln(x)) = F_X(\ln(x))$$
     puisque ln est strictement croissante. Comme de plus, $F_X : u \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } u < 0 \\ 1 - e^{-au} & \text{si } u \geq 0 \end{cases}$ et $\ln(x) \geq 0$ pour $x \geq 1$, on obtient :
     $$F_Y(x) = 1 - e^{-a\ln(x)} = 1 - \frac{1}{x^a}.$$
     La fonction de répartition de Y est donc :
     $$F_Y : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ 1 - \dfrac{1}{x^a} & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$
   - **Y à densité ?**
     F_Y est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$ comme composée de fonctions qui le sont. On étudie la continuité en 1 :
     $$\lim_{x \to 1^-} F_Y(x) = 0 = F_Y(0) = \lim_{x \to 1^+} F_Y(x).$$
     Donc F_Y est continue en 1, et donc sur $\mathbb{R}$. Ainsi Y est une variable à densité.
   - **Densité de Y.**
     Pour tout $x \neq 1$:
     $$F_Y'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ -(-a)x^{-a-1} & \text{si } x > 1. \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ \dfrac{a}{x^{a+1}} & \text{si } x > 1. \end{cases}.$$
     Ainsi une densité de Y est donnée par (la valeur en 1 étant arbitrairement choisie égale à 0) :
     $$f_Y : t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 1, \\ \dfrac{a}{t^{a+1}} & \text{si } t > 1. \end{cases}$$

2. Y admet une espérance si, et seulement si, $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t = \int_{1}^{+\infty} \frac{a}{t^a}\,\mathrm{d}t$ converge absolument, donc converge car la fonction intégrée est positive. On reconnait une intégrale de Riemann, qui converge si, et seulement si, $a > 1$, et pour tout $B > 1$:

$$\int_1^B \frac{a}{t^a}\,\mathrm{d}t = \left[a\frac{t^{-a+1}}{-a+1}\right]_1^B = \frac{a}{a-1}\left(1 - \frac{1}{B^{a-1}}\right) \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{a}{a-1}.$$

Ainsi $E(Y)$ existe si, et seulement si, $a > 1$, et elle vaut $\frac{a}{a-1}$.

3. $V(Y)$ existe si, et seulement si, Y admet un moment d'ordre 2, soit si, et seulement si, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{1}^{+\infty} \frac{a}{t^{a-1}}\,\mathrm{d}t$ converge absolument, donc converge car la fonction intégrée est positive. C'est aussi une intégrale de Riemann, qui converge si, et seulement si, $a - 1 > 1$, c'est à dire $a > 2$. Pour tout $B > 1$, on obtient par le même calcul :

$$\int_1^B \frac{a}{t^{a-1}}\,\mathrm{d}t = \left[a\frac{t^{-a+2}}{-a+2}\right]_1^B = \frac{a}{a-2}\left(1 - \frac{1}{B^{a-2}}\right) \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{a}{a-2}.$$

Ainsi $V(Y)$ existe si, et seulement si, $a > 2$, et elle vaut par la formule de Huygens :

$$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = \frac{a}{a-2} - \frac{a^2}{(a-1)^2} = \frac{a}{(a-2)(a-1)^2}.$$

Exercice 10.21 (★★★ - QSP ESCP 2022 - ✍)

Soit X une variable aléatoire positive, qui admet une espérance, de densité f définie sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}_+$.

Montrer que $E(X) = \int_0^{+\infty} P(X > t)\,\mathrm{d}t$.
