TD1

Calcul matriciel

Opérations matricielles

Exercice 1.1 (★★ - Matrices stochastiques - ✍)
Une matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *stochastique* si pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j}$ est un réel positif ou nul, et si pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$. On note $\mathcal{ST}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices stochastiques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

1. Donner des exemples de matrices stochastiques.
2. Soit $\lambda \in [0,1]$. Montrer que si A et B appartiennent à $\mathcal{ST}_n(\mathbb{R})$, alors $\lambda \cdot A + (1-\lambda) \cdot B$ est dans $\mathcal{ST}_n(\mathbb{R})$ également.

   Un ensemble satisfaisant une telle propriété est dit convexe.
3. (a) Notons $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que : $A \in \mathcal{ST}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall i,j, a_{i,j} \geq 0 \\ AX = X \end{cases}$.

   (b) En déduire que si A et B sont stochastiques, alors $A \times B$ est stochastique.
4. (★) Déterminer les matrices A de $\mathcal{ST}_n(\mathbb{R})$ qui sont inversibles et telles que $A^{-1} \in \mathcal{ST}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 1.2 (★★ - Produit de matrices élémentaires - ✍)
Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on définit pour tout $1 \leq i,j \leq n$ la matrice $E_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ où l'unique coefficient non nul égal à 1 est en position (i,j). Les $n \times p$ matrices $E_{i,j}$ sont appelées *matrices élémentaires.*

Montrer la formule suivante :

$$E_{i,j} \times E_{k,l} = \delta_{j,k} \cdot E_{i,l}$$

où $\delta_{j,k}$ est le symbole de Kronecker : $\delta_{j,k} = 1$ si $j = k$, 0 si $j \neq k$.

Exercice 1.3 (★★★ - Centre de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ - ✍)
On considère l'ensemble suivant (appelé le *centre de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$) :

$$\mathscr{Z}_n = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ A \times M = M \times A\}.$$

1. Proposer deux matrices appartenant à $\mathscr{Z}_n$.
2. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ appartient-elle à $\mathscr{Z}_2$?
3. On souhaite déterminer l'ensemble $\mathscr{Z}_n$. Considérons pour cela une matrice M appartenant à $\mathscr{Z}_n$.

   (i) Pour tout $1 \leq i,j \leq n$, calculer $E_{i,j} \times M$ et $M \times E_{i,j}$.

   (ii) En déduire que M est une matrice scalaire, c'est-à-dire de la forme $\lambda \cdot I_n$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

   (iii) Conclure.

Exercice 1.4 (★★★ - Matrices triangulaires supérieures strictes - ✍)

Le but de cet exercice est de montrer que toute matrice triangulaire supérieure stricte de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est nilpotente d'ordre $\leq n$.

1. Soit $k \geq 0$ et notons $\mathscr{T}_k^+(\mathbb{R})$ l'ensemble de matrices $A = (a_{i,j})$ telles que :
$$a_{i,j} = 0 \text{ si } i + k > j.$$
   (i) Identifier $\mathscr{T}_0^+(\mathbb{R})$, $\mathscr{T}_1^+(\mathbb{R})$, $\mathscr{T}_n^+(\mathbb{R})$
   (ii) Soient $k, l \geq 1$. Montrer que si $A \in \mathscr{T}_k^+(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{T}_l^+(\mathbb{R})$, alors $A \times B \in \mathscr{T}_{k+l}^+(\mathbb{R})$.
2. Montrer qu'une matrice triangulaire supérieure stricte est nilpotente, d'ordre de nilpotence $\leq n$.
3. La réciproque est-elle vraie, c'est-à-dire une matrice nilpotente est-elle nécessairement triangulaire supérieure stricte ?

Méthode du pivot, rang et inverse

Exercice 1.5 (★)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes linéaires homogènes suivants :

$$(\mathscr{S}_1) : \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \quad \Big| \quad (\mathscr{S}_2) : \begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ x + 11y - z = 0 \end{cases} \quad \Big| \quad (\mathscr{S}_3) : \begin{cases} 3x + 4y + z + 2t = 0 \\ 6x + 8y + 2z + 6t = 0 \\ 9x + 12y + 3z + 10t = 0 \end{cases}$$

Exercice 1.6 (★)

1. Résoudre le système $\quad (\mathscr{S}_0) : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y + 2z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$
2. On considère le système $\quad (\mathscr{S}) : \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + y + 2z = 5 \\ x + 2y + z = 4 \end{cases}$

   Vérifier que $(1, 1, 1)$ est solution de $(\mathscr{S})$ et en déduire toutes les solutions de $(\mathscr{S})$.

Exercice 1.7 (★)

Calculer le rang et l'inverse s'il existe des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1.8 (★★)

Déterminer le rang des matrices suivantes, en discutant suivant les valeurs du paramètre réel α :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1+\alpha \\ 1 & 1 & -\alpha^2 \end{pmatrix}. \quad \Big| \quad B = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \quad \Big| \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & \alpha & 2 \\ 2 & \alpha & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 1.9 (★★★ - Matrices à diagonale strictement dominante - ✍)

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $|a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$.

Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = 0$, et soit $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $|x_{i_0}| = \max_{i \in [\![1,n]\!]} |x_i|$.

Montrer que $x_{i_0} = 0$, et en déduire que A est inversible.

Trace d'une matrice carrée

Exercice 1.10 (★)

Montrer qu'il n'existe pas deux matrices $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A \times B - B \times A = I_n$.

Exercice 1.11 (★★★ - ✍)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{Tr}({}^tAA) = 0$ si et seulement si $A = 0_n$.

Matrices semblables

Exercice 1.12 (★ - Matrices semblables - ✍)

1. Montrer les propriétés suivantes pour des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$:
   - *Réflexivité :* A est semblable à A
   - *Symétrie :* $[A$ est semblable à $B] \Leftrightarrow [B$ est semblable à $A]$
   - *Transitivité :* $[A$ est semblable à $B]$ et $[B$ est semblable à $C] \Rightarrow [A$ est semblable à $C]$

   On dit que « être semblable à » est une *relation d'équivalence*.
2. Montrer que si A et B sont inversibles et semblables, alors A^{-1} et B^{-1} sont aussi semblables.

Polynômes d'une matrice

Exercice 1.13 (★)

Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$ avec :

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$;
- $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$, $\theta \in \mathbb{R}$;
- $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 1.14 (★)

Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $P : x \mapsto x^2 - 3x + 2$ est un polynôme annulateur de A.
2. En déduire que A est inversible et exprimer son inverse A^{-1} comme un polynôme en A.

Exercice 1.15 (★★)

Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. **Première méthode : calcul des puissances de A à l'aide d'un polynôme annulateur.**
   (a) Déterminer un polynôme annulateur de degré 2 de A.
   (b) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe $\alpha_p, \beta_p \in \mathbb{R}$ tels que $A^p = \alpha_p A + \beta_p I_3$.
   (c) Déterminer une relation de récurrence satisfaite par α_p et β_p. En déduire α_p et β_p en fonction de p.
   (d) En déduire A^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.
2. **Deuxième méthode : calcul des puissances de A par la formule du binôme.**
   (a) Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer J^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

(b) En déduire A^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 1.16 (★★)
On considère la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $P : x \mapsto x^3 - 2x^2 + x$ est un polynôme annulateur de B.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $Q_n \in \mathbb{R}[x]$ et $(a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3$ tels que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^n = P(x)Q_n(x) + a_n x^2 + b_n x + c_n.$$
3. Déterminer a_n, b_n, c_n en fonction de n.
4. En déduire l'expression de B^n en fonction de n.

Exercice 1.17 (★)
On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
2. Calculer la matrice $D = P^{-1}AP$ ainsi que D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Mêmes questions avec les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 1.18 (★★★ - Polynôme annulateur d'une matrice diagonale - ✍)
Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{R}^r$ ($r \leqslant n$) des réels distincts deux à deux et $(m_1, \dots, m_r) \in (\mathbb{N}^*)^r$ tels que :
$$m_1 + \cdots + m_r = n$$
On pose $D = \operatorname{diag}(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{m_1 \text{ termes}}, \underbrace{\lambda_2, \dots, \lambda_2}_{m_2 \text{ termes}}, \dots, \underbrace{\lambda_r, \dots, \lambda_r}_{m_r \text{ termes}}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

1. Montrer que :
$$\forall P \in \mathbb{R}[x],\ P(D) = \operatorname{diag}(\underbrace{P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_1)}_{m_1 \text{ termes}}, \dots, \underbrace{P(\lambda_r), \dots, P(\lambda_r)}_{m_r \text{ termes}})$$
2. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que P soit un polynôme annulateur de D.
3. On suppose que A est semblable à D. Déterminer un polynôme annulateur de A.
4. À l'aide de l'exercice précédent, déterminer un polynôme annulateur de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Exercice 1.19 (★★★ - QSP ESCP 2016)
Soit N une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ($n \geq 2$) nilpotente, i.e. telle qu'il existe $p \geq 1$ tel que $N^p = 0$.

1. Montrer que la matrice $A = I_n - N$ est inversible et déterminer son inverse.
2. Montrer que $I_n - A^{-1}$ est nilpotente.
