TD0b

Analyse asymptotique, fonctions convexes

Analyse asymptotique

Exercice 0.7 (★)

Calculer les développements limités suivants en 0 :

1. $x \mapsto \dfrac{1}{2+x}$ à l'ordre 4 ;
2. $x \mapsto \ln(e+x)$ à l'ordre 4 ;
3. $x \mapsto a^x + b^x$ à l'ordre 3 ;
4. $x \mapsto \cos(x) - \dfrac{\sin(x^2)}{2}$ à l'ordre 4 ;
5. $x \mapsto (1+\exp(x))^2$ à l'ordre 3.
6. $x \mapsto \sin(x)\cos(2x)$ à l'ordre 4.
7. $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{1-x^2}$ à l'ordre 4.
8. $x \mapsto \dfrac{1+x}{1-x}$ à l'ordre 3.

Exercice 0.8 (★★)

Calculer le développement limité des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \cos x$ à l'ordre 4 au voisinage de $\frac{\pi}{3}$.
2. $f : x \mapsto e^x$ à l'ordre 4 au voisinage de 1.
3. $f : x \mapsto \dfrac{x}{x-1} e^{\frac{1}{x}}$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 0.9 (★)

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \ln(1+x)}{x^2}$;
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - \cos(x) - x}{(\ln(1+x))^2}$;
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x(\ln(1+x) + 1 - e^x)}{\sin(x) - x}$;
4. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x+2)(x-1)}{x\ln(x)}$.

Exercice 0.10 (★)

1. À l'aide de la formule de Taylor-Young, montrer que $\arctan(x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$.
2. En déduire $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan(x) - x}{2x - 2\ln(1+x) - (\sin(x))^2}$.

1. Rappelons pour commencer le résultat suivant :

> **Rappel. Existence d'un développement limité d'ordre n.**
> Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}$. **Si** f est classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I, **alors** f admet un développement limité d'ordre n en a, donné par la formule de Taylor-Young :
> $$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \underset{x\to a}{o}((x-a)^n).$$

La fonction $f = \arctan$ étant de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, elle admet un développement limité à

l'ordre 3 en 0 qui est d'après la formule de Taylor Young :

$$\arctan(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + o(x^3).$$

Comme arctan est impaire, il n'y a que des termes impairs dans son DL, de sorte qu'on peut préciser :

$$\arctan(x) = f'(0)x + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + o(x^3).$$

Reste donc à calculer les valeurs manquantes :

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad , \quad f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{-2(1+x^2)^2 + 8x^2(1+x^2)}{(1+x^2)^4}$$

soit $f'(0) = 1$ et $f^{(3)}(0) = -2$. On en déduit en remplaçant dans le développement limité que :

$$\arctan(x) = x + \frac{-2}{3!}x^3 + o(x^3) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

2. À l'aide du DL obtenu à la question précédente, on en déduit l'équivalent $\arctan(x) - x \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^3}{3}$. D'autre part :

$$\begin{aligned} 2x - 2\ln(1+x) - (\sin(x))^2 &= 2x - 2\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) - (x + o(x^2))^2 \\ &= 2x - 2x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 - x^2 + o(x^3) = -\frac{2}{3}x^3 + o(x^3) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{2}{3}x^3 \end{aligned}$$

Ainsi, $\dfrac{\arctan(x) - x}{2x - 2\ln(1+x) - (\sin(x))^2} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{-\frac{x^3}{3}}{-\frac{2x^3}{3}} = \dfrac{1}{2}$, ce qui permet de conclure :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x) - x}{2x - 2\ln(1+x) - (\sin(x))^2} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 0.11 (★★)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{x-1}$.

1. Donner le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de 0. En déduire la tangente T_0 à $\mathscr{C}_f$ en 0 et leurs positions relatives.
2. Montrer que $f(x) \underset{+\infty}{=} x + 1 + \dfrac{3}{2x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Que dire de $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$?

1. On dispose des DL en 0 suivants :

$$x\sqrt{x^2+1} \underset{x\to 0}{=} x \times (1 + o(x)) = x + o(x^2) \quad \text{et} \quad \frac{1}{x-1} \underset{x\to 0}{=} -1 - x - x^2 + o(x^2).$$

D'où par produit :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} (x + o(x^2)) \times (-1 - x - x^2 + o(x^2)) = -x - x^2 + o(x^2).$$

On obtient alors la tangente en 0 en conservant les termes de degrés 0 et 1. La tangente à

f en 0 est donc $y = -x$. De plus :

$$f(x) + x \underset{x\to 0}{=} -x^2 + o(x^2) \underset{x\to 0}{\sim} -x^2.$$

$f(x) + x$ est donc du signe de $-x^2$ au voisinage de 0, donc négatif. On peut en conclure que T_0 est au dessus de $\mathscr{C}_f$ au voisinage de 0.

2. Factorisons pour faire apparaitre le terme $\frac{1}{x}$ (qui tend vers 0 lorsque $x \to +\infty$) :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{1-\frac{1}{x}} = x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \times \frac{1}{1+\frac{1}{x}}.$$

Calculons :

$$\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \underset{x\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}\right) + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

et

$$\frac{1}{1-\frac{1}{x}} \underset{x\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

D'où par produit :

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to+\infty}{=} x\left(1 + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \times \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &\underset{x\to+\infty}{=} x\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &\underset{x\to+\infty}{=} x + 1 + \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

En particulier :

$$f(x) - (x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{3}{2x}.$$

Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (x+1) = 0$, et $f(x) - (x+1)$ est du signe de $\dfrac{3}{2x}$, donc positif, au voisinage de $+\infty$. On peut interpréter ce résultat graphiquement en disant que la courbe $\mathscr{C}_f$ « tend » en $+\infty$ vers la droite d'équation $y = x + 1$, et qu'elle est au dessus de cette droite au voisinage de $+\infty$. On parle d'asymptote oblique à la courbe en $+\infty$.

On retiendra de cet exercice les points suivants :

✍ À retenir. Étude locale d'une fonction.

- Pour déterminer la tangente à $\mathscr{C}_f$ en un point a, on peut effectuer un $DL_1(a)$ de f : l'équation de la tangente est alors donnée par les termes de degrés 0 et 1 de ce développement limité.
- Pour déterminer la position relative de la courbe représentative d'une fonction f par rapport à sa tangente, on cherche un équivalent de $x \mapsto f(x) - f(a) - (x-a)f'(a)$ en a en effectuant un DL de f :

$$f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) \underset{x\to a}{\sim} a_p(x-a)^p \quad \text{avec} \quad a_p \in \mathbb{R}^* \text{ et } p \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}.$$

Alors $x \mapsto f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$ est du signe de $a_p(x-a)^p$ au voisinage de a :

- si p est pair, $f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$ est de signe constant au voisinage de a. La courbe est au-dessus ou en-dessous de sa tangente en a (suivant le signe de a_p).
- si p est impair, $f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$ change de signe en a. La courbe traverse sa tangente en a. On parle de *point d'inflexion*.

✍ À retenir. Asymptotes obliques.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f admet une *asymptote oblique* en $\pm\infty$ s'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x) - ax - b$ tende vers 0 en $\pm\infty$.

Exercice 0.12 (★)

Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. Si $u_n = (2n-1)^3$, alors :

   ☐ $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(n^3)$ ☐ $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 8n^3$ ☐ $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(n^4)$ ☐ $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^3$ ☐ $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{n^4}{2}\right)$

2. Si $u_n = \frac{2}{n} - \frac{3}{n\sqrt{n}} + \frac{1}{n^2}$, alors :

   ☐ $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n}$ ☐ $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$ ☐ $\frac{1}{n} = \underset{n\to+\infty}{o}(u_n)$ ☐ $u_n = \frac{2}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$

   ☐ $u_n = \frac{2}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$

3. Soit (u_n) une suite réelle. Alors on a $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$

4. Soient (u_n), (v_n), (a_n), (b_n) des suites telles que $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(a_n)$ et $v_n = \underset{n\to+\infty}{o}(b_n)$, alors :

   ☐ si $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$, alors $u_n + v_n = \underset{n\to+\infty}{o}(b_n)$ ☐ si $a_n = \underset{n\to+\infty}{o}(b_n)$, alors $u_n + v_n = \underset{n\to+\infty}{o}(b_n)$.

5. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors :

   ☐ $u_n + 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n + 1$ ☐ $2u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ ☐ $-u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -v_n$ ☐ $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n^2$ ☐ $u_n - v_n = o(v_n)$

   ☐ $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(v_n)$ ☐ $e^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{v_n}$

1. Fait en cours.

2. Fait en cours.

3. Rappelons que $u_{n+1} \sim u_n$ si, et seulement si, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. En écrivant cela, on se doute (?) qu'on peut trouver une suite réelle ne satisfaisant pas cette condition. Cette affirmation est effectivement fausse, et un contre-exemple est donné (par exemple) par une suite géométrique de raison $q \neq 1$. En effet, si (u_n) est définie par $u_n = q^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{q^{n+1}}{q^n} = q \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} q \neq 1.$$

4. On suppose que $u_n = o(a_n)$ et que $v_n = o(b_n)$, ce qui s'écrit encore $\lim \dfrac{u_n}{a_n} = 0$ et $\lim \dfrac{v_n}{b_n} = 0$.

   ☐ Tentons de le vérifier en revenant à la définition :

$$\frac{u_n + v_n}{b_n} = \frac{u_n}{b_n} + \frac{v_n}{b_n} = \frac{u_n}{a_n} \times \frac{a_n}{b_n} + \frac{v_n}{b_n} \longrightarrow 0 \times 1 + 0 = 0.$$

   Ainsi, l'affirmation $u_n + v_n = o(b_n)$ est vraie.

   ☐ Là aussi, tentons de le vérifier :

$$\frac{u_n + v_n}{b_n} = \frac{u_n}{b_n} + \frac{v_n}{b_n} = \frac{u_n}{a_n} \times \frac{a_n}{b_n} + \frac{v_n}{b_n} \longrightarrow 0 \times 0 + 0 = 0.$$

   Donc l'affirmation $u_n + v_n = o(b_n)$ est vraie.

5. On suppose que $u_n \sim v_n$, soit $\dfrac{u_n}{v_n} \longrightarrow 1$.

   ☐ Il est peu probable que cette affirmation soit vraie, puisqu'on somme ici des équivalents. Il faut donc déterminer un contre-exemple. Je vous laisse vérifier que $u_n = -1 + \dfrac{1}{n}$ et $v_n = -1 + \dfrac{1}{n^2}$ conviennent.

   ☐ Cette affirmation est fausse puisque :

$$\frac{2u_n}{v_n} = 2\frac{u_n}{v_n} \longrightarrow 2 \times 1 = 2 \neq 1.$$

   Donc l'affirmation $2u_n \sim v_n$ est fausse.

   ☐ Cette affirmation est vraie, ce qu'on vérifie aisément en revenant à la définition :

$$\frac{-u_n}{-v_n} = \frac{u_n}{v_n} \longrightarrow 1.$$

   ☐ En se souvenant que les équivalents sont compatibles avec le produit, on obtient :

$$u_n \times v_n \sim u_n \times u_n = u_n^2.$$

   L'affirmation est donc vraie.

   ☐ Cette affirmation est vraie. En effet, et on l'avait établi au chapitre 0 :

$$u_n \sim v_n \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{u_n}{v_n} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{u_n - v_n}{v_n}\right) = 0 \Leftrightarrow u_n - v_n = o(v_n).$$

   Et cette affirmation peut-être bien utile en exercice.

> **À retenir. Équivalence de deux suites.**
> On dispose de l'équivalence suivante :
>
> $$\boxed{u_n \sim v_n \quad \Longleftrightarrow \quad u_n - v_n = o(v_n) \quad \text{(ou encore } u_n = v_n + o(v_n))}.$$

   ☐ Cette affirmation est probablement fausse en général, puisqu'on compose ici par le logarithme. Cherchons un contre-exemple : $u_n = 1 + \dfrac{1}{n}$ et $v_n = 1 + \dfrac{1}{n^2}$ conviennent (je vous laisse le vérifier).

   ☐ Même chose ici, on compose des équivalents par le logarithme. Cette affirmation est bien fausse : prendre $u_n = n$ et $v_n = n + 1$ pour le montrer.

Exercice 0.13 (★★)
Déterminer un équivalent simple des suites suivantes :

1. $u_n = \exp\left(\dfrac{1-\sqrt{n}}{1+n}\right) - 1$
2. $v_n = \sqrt{n^2+1} - \sqrt[3]{n^3+n}$
3. $w_n = \sin\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{n}{2^n}\right)\right)$

1. Puisque $\dfrac{1-\sqrt{n}}{1+n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{-\sqrt{n}}{n} = -\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, on en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1-\sqrt{n}}{1+n} = 0$. Comme de plus

$e^u - 1 \underset{u\to 0}{\sim} u$, on obtient (par l'équivalent usuel $\exp(u) - 1 \underset{u\to 0}{\sim} u$:

$$\exp\left(\frac{1-\sqrt{n}}{1+n}\right) - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1-\sqrt{n}}{1+n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

2. Cette expression fait apparaitre une différence entre deux termes, ce qui nous pousse à passer par un développement limité. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} v_n &= \sqrt{n^2+1} - \sqrt[3]{n^3+n} = n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} - n\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}} \\ &= n\left(1 + \frac{1}{2n^2} - 1 - \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{1}{6n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{6n}. \end{aligned}$$

3. On sait que $\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin(\theta)$, d'où ici pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$w_n = \sin\left(\sin\left(\frac{n}{2^n}\right)\right).$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{2^n} = 0$ par croissances comparées, et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin(\frac{n}{2^n}) = 0$ par composition avec la fonction continue sin. D'où, en se rappelant que $\sin(u) \underset{u\to 0}{\sim} u$:

$$w_n = \left(\sin\left(\frac{n}{2^n}\right)\right) \sim \sin\left(\frac{n}{2^n}\right) \sim \frac{n}{2^n}.$$

Exercice 0.14 (★★)

Déterminer les limites des suites suivantes :

1. $u_n = \dfrac{3n^2 + (-1)^n}{\sqrt{n^2+2} + \ln(n)}$
2. $v_n = \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^2}$
3. $w_n = n^2\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - \cos\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)$

Exercice 0.15 (★★★)

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $\tan x = x$ admet une unique solution dans $\left]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right[$ que l'on notera x_n. On définit ainsi une suite $(x_n)_{n\geq 0}$.
2. Montrer que $x_n \sim n\pi$.
3. Montrer que $x_n - n\pi \sim \frac{\pi}{2}$.
4. Montrer que $x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} \sim -\frac{1}{n\pi}$. En déduire que $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 0.16 (★★ - Pour s'entrainer encore)

1. Déterminer un équivalent simple au point considéré des fonctions suivantes :
   (a) $x \mapsto \dfrac{\sin(x) + \cos(x) - 1}{\tan(x - x\cos(x))}$ en 0.
   (b) $x \mapsto \dfrac{\sqrt{1+\tan(x)^2} - 1}{\tan(x)}$ en 0.
2. Déterminer un équivalent simple des suites suivantes :
   (a) $u_n = \dfrac{n - \ln(n) + 4/n}{e^n - n^2}$.
   (b) $u_n = \left[\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}\right)\right]^n$.
3. Étudier les limites suivantes :

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x \ln(1+x) - x}{\sqrt{1+2x}-1}$

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right)^{1/x}$.

(c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^{x^2+x} - e^{2x}}{\cos(\pi x/2)}$.

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 + x^2 + \sin(x)^3}{\sqrt[3]{1+x}-1}$.

1. (a) On cherche un équivalent du numérateur, puis du dénominateur pour commencer.

   Au numérateur apparait des sommes, on va donc passer par un développement limité :

   $$\sin(x) + \cos(x) - 1 = x + o(x^2) + 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1 = -\frac{x^2}{2} + o(x^2) \sim -\frac{x^2}{2}.$$

   Au dénominateur, remarquons que $x - x\cos(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Par substitution dans l'équivalent usuel $\tan(u) \underset{u\to 0}{\sim} u$, on obtient :

   $$\tan(x - x\cos(x)) \underset{x\to 0}{\sim} x - x\cos(x) = x(1-\cos(x)) \underset{x\to 0}{\sim} x \times \frac{x^2}{2}.$$

   Par quotient d'équivalent, on en déduit :

   $$\frac{\sin(x) + \cos(x) - 1}{\tan(x - x\cos(x))} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-\frac{x^2}{2}}{\frac{x^3}{2}} = -\frac{1}{x}.$$

   (b) On procède de même qu'à la question précédente. Au dénominateur, $\tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$. Au numérateur, en substituant dans l'équivalent $(1+u)^{1/2} \underset{u\to 0}{\sim} \frac{1}{2}u$ (en notant que $\tan(x)^2 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$) :

   $$\sqrt{1+\tan(x)^2} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2}\tan(x)^2 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2}x^2.$$

   Par quotient d'équivalents :

   $$\frac{\sqrt{1+\tan(x)^2} - 1}{\tan(x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x} = \frac{1}{2}x.$$

2. (a) Commençons par nous intéresser au numérateur. Le terme prépondérant semble être n. Factorisons pour le montrer :

   $$n - \ln(n) + \frac{4}{n} = n \times \underbrace{\left[1 - \frac{\ln(n)}{n} - \frac{4}{n^2}\right]}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1} \underset{n\to+\infty}{\sim} n$$

   en notant que $\lim \frac{\ln(n)}{n} = 0$ par croissances comparées.

   Au dénominateur, c'est le terme e^n qui semble prépondérant. Procédons de même pour le montrer :

   $$e^n - n^2 = e^n \times \underbrace{\left[1 - \frac{n^2}{e^n}\right]}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^n$$

   en notant que $\lim \frac{n^2}{e^n} = 0$ par croissances comparées.

Par quotient d'équivalents, on obtient :

$$u_n \sim \frac{n}{e^n}.$$

En particulier, $\lim u_n = 0$ par croissances comparées.

(b) Écrivons u_n sous forme exponentielle :

$$u_n = \exp\left(n \ln\left(\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n})\right)\right)$$

et intéressons nous au terme à l'intérieur de l'exponentielle. Puisque $\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \tan(\frac{\pi}{4}) = 1$, on peut écrire :

$$\ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}\right)\right) = \ln\left(1 + \underbrace{\left[\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}\right) - 1\right]}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}\right) - 1$$

en substituant dans l'équivalent usuel $\ln(1+u) \underset{u\to0}{\sim} u$. À l'aide des formules de trigonométrie :

$$\begin{aligned}\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}\right) - 1 &= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{1}{n}\right) + \sin\left(\frac{1}{n}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{1}{n}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{1}{n}\right)} - 1 \\ &= \frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right) + \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\cos\left(\frac{1}{n}\right) - \sin\left(\frac{1}{n}\right)} - 1 = \frac{2\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\cos\left(\frac{1}{n}\right) - \sin\left(\frac{1}{n}\right)}.\end{aligned}$$

Or, $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$ et $\cos\left(\frac{1}{n}\right) - \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ converge vers 1 (et est donc équivalent à 1). Et donc :

$$n \ln\left(\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n})\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n \times \left[\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}\right) - 1\right] \underset{n\to+\infty}{\sim} n \times \frac{\frac{2}{n}}{1} = 2.$$

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} n \ln\left(\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n})\right) = 2$, et par composition de **limite** par l'exponentielle qui est continue en 2 :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = e^2.$$

3. (a) On cherche un équivalent du numérateur et du dénominateur.

Pour le numérateur, on va passer par un DL (puisqu'il s'agit d'une différence de deux fonctions) :

$$\begin{aligned}e^x \ln(1+x) - x &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2)\right) \times \left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - x \\ &= x - \frac{x^2}{2} + x^2 + o(x^2) - x = \frac{x^2}{2} + o(x^2) \underset{x\to0}{\sim} \frac{x^2}{2}.\end{aligned}$$

Au numérateur, on peut utiliser l'équivalent usuel :

$$\sqrt{1+2x} - 1 = (1+2x)^{\frac{1}{2}} - 1 \underset{x\to0}{\sim} \frac{1}{2}(2x) = x.$$

Par quotient d'équivalent, on obtient :

$$\frac{e^x \ln(1+x) - x}{\sqrt{1+2x} - 1} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

(b) Passons sous forme exponentielle, et effectuons une astuce du banquier :

$$\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^{1/x} = \exp\left(\frac{1}{x}\ln\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)\right) = \exp\left(\frac{1}{\ln(x)}\frac{\ln(x)}{x}\ln\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)\right).$$

Cette astuce du banquier permet de faire apparaitre le terme $\frac{\ln(x)}{x}\ln\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)$, de la forme $u\times\ln(u)$ avec $u = \frac{\ln(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées. Or $\lim\limits_{u\to 0} u\times\ln(u) = 0$ toujours par croissances comparées. Ainsi,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln(x)} \times \frac{\ln(x)}{x}\ln\left(\frac{\ln(x)}{x}\right) = 0 \times 0 = 0.$$

Et par composition avec l'exponentielle qui est continue en 0 :

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^{1/x} = 1.$$

(c) Posons $h = x - 1 \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 0$. Alors $x = h + 1$, et en substituant dans l'expression de l'énoncé :

$$\frac{e^{x^2+x} - e^{2x}}{\cos(\pi x/2)} = \frac{e^{(h+1)^2+h+1} - e^{2h+2}}{\cos\left(\frac{\pi h}{2} + \frac{\pi}{2}\right)} = e^{2h+2}\frac{e^{h^2+h} - 1}{-\sin\left(\frac{\pi h}{2}\right)}$$

à l'aide d'une formule de trigonométrie au dénominateur (qu'on retrouvera en traçant un cercle trigo si besoin). On dispose des équivalents $e^{2h+2} \underset{h\to 0}{\sim} e^2$, $e^{h^2+h} - 1 \underset{h\to 0}{\sim} h^2 + h \underset{h\to 0}{\sim} h$ et $\sin\left(\frac{\pi h}{2}\right) \underset{h\to 0}{\sim} \frac{\pi h}{2}$. Par produit et quotient d'équivalents, on obtient :

$$e^{2h+2}\frac{e^{h^2+h} - 1}{-\sin\left(\frac{\pi h}{2}\right)} \underset{h\to 0}{\sim} -e^2\frac{h}{\frac{\pi h}{2}} = -\frac{2e^2}{\pi}.$$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to 1} \frac{e^{x^2+x} - e^{2x}}{\cos(\pi x/2)} = -\frac{2e^2}{\pi}$.

(d) On effectue un développement limité au dénominateur :

$$\sin(x)^3 \underset{x\to 0}{\sim} x^3 = o(x).$$

D'autre part,

$$e^x - 1 + x^2 = 1 + x + o(x) - 1 + x^2 = x + o(x).$$

Par somme, on obtient :

$$e^x - 1 + x^2 + \sin(x)^3 = x + o(x) \underset{x\to 0}{\sim} x.$$

Au dénominateur, on dispose de l'équivalent usuel $\sqrt[3]{1+x}-1 \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x}{3}$. Par quotient, il suit :

$$\frac{e^x-1+x^2+\sin(x)^3}{\sqrt[3]{1+x}-1} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{\frac{x}{3}} = 3.$$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1+x^2+\sin(x)^3}{\sqrt[3]{1+x}-1} = 3.$