DS7

Devoir surveillé type parisiennes du 19/12/2023

Durée : 3h

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats doivent être encadrés.
La calculatrice n'est pas autorisée.

Notations et objectifs :

Soit E un espace vectoriel réel et A une partie non vide de E.
Soit a un élément de A. On dit que a est un point extrémal de A si :

$$\forall (x,y) \in A^2, \quad \left(\frac{x+y}{2} = a\right) \Rightarrow (x = y = a).$$

Les parties 0 et 1 permettent de se familiariser avec la notion de point extrémal.

La partie 2 prouve que les points d'une partie donnant le diamètre de cette partie sont extrémaux.

Enfin la partie 3 étudie des propriétés des matrices de permutation, en particulier de l'isobarycentre de ces matrices. On obtient finalement une preuve du fait que les points extrémaux de l'ensemble des matrices bistochastiques sont les matrices de permutation.

Partie 0 : étude d'un premier exemple dans $\mathbb{R}$.

1. On prend ici $E = \mathbb{R}$ et $A =]0,1[$. Montrer qu'aucun point de A n'est extrémal.
2. On considère maintenant $E = \mathbb{R}$ et $A = [0,1]$. Montrer que les points extrémaux de A sont 0 et 1.

Partie 1 : étude d'un second exemple dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Dans cette partie, on note A_2 l'ensemble $\left\{ M_a = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1-\alpha & \alpha \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}),\ \alpha \in [0,1] \right\}$ et J la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Par ailleurs, I_2 désigne la matrice identité de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

3. **Description et propriétés des éléments de A_2.**
   (a) Vérifier que : $\quad A_2 = \{\alpha I_2 + (1-\alpha)J,\ \alpha \in [0,1]\}$.
   (b) Soient $(\alpha, \beta) \in [0,1]^2$ et $(M_\alpha, M_\beta) \in (A_2)^2$. Montrer que : $\dfrac{1}{2}(M_\alpha + M_\beta) \in A_2$.
   (c) Déterminer les éléments M_α de A_2 qui sont inversibles dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Pour ceux-ci, donner l'expression de $(M_\alpha)^{-1}$ et préciser pour quelles valeurs de α dans $[0,1]$, on a $(M_\alpha)^{-1} \in A_2$.
4. **Points extrémaux de A_2.**
   (a) Montrer que I_2 et J sont des points extrémaux de A_2.
   (b) Soit $\alpha \in]0, \frac{1}{2}]$. Vérifier que $M_\alpha = \dfrac{1}{2}(M_{2\alpha} + J)$. En déduire que M_α n'est pas extrémal.
   (c) Par une méthode similaire, montrer que si $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1[$, M_α n'est pas extrémal.
5. **Réduction simultanée des matrices de A_2.**
   (a) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de la matrice J.

(b) Montrer qu'il existe une matrice inversible P de $GL_2(\mathbb{R})$ telle que, pour tout α de $[0,1]$, $P^{-1}M_\alpha P$ est une matrice diagonale D_α. On précisera P et D_α.

(c) On note u_α l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ représenté par la matrice M_α dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Déterminer les réels α de $]0,1]$ tels que u_α soit un projecteur de $\mathbb{R}^2$. On précisera l'image et le noyau du ou des projecteurs ainsi trouvés.

Partie 2 : Points extrémaux et diamètre d'une partie bornée d'un espace euclidien.

On suppose dans cette partie que E est un espace euclidien de dimension finie non nulle, muni d'un produit scalaire noté $\langle\ ,\ \rangle$. On note $\|\ \|$ la norme euclidienne associée.

On considère A une partie non vide de E telle qu'il existe un réel R positif tel que, pour tout vecteur v de A, on ait : $\|v\| \leq R$.

6. Montrer que l'ensemble $\{\ \|v-w\|\ ,\ (v,w) \in A^2\ \}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$.

   Cet ensemble admet donc une borne supérieure. On la note alors $\delta(A) = \sup\ \{\ \|v-w\|\ ,\ (v,w) \in A^2\ \}$ et on l'appelle *diamètre de A*.

Dans la suite de cette partie, on suppose que la partie A vérifie la propriété (H) suivante :

$$(H) : \text{ il existe } (a,b) \in A^2 \text{ tel que } \delta(A) = \|b-a\|.$$

On se propose de démontrer que a est un point extrémal de A.

7. On considère donc $(c,d) \in A^2$ tel que $\dfrac{c+d}{2} = a$.

   (a) Vérifier que : $\|a-b\| \leq \dfrac{1}{2}\left(\ \|c-b\| + \|d-b\|\ \right) \leq \|a-b\|$.
   En déduire que : $\|c-b\| = \|d-b\| = \delta(A)$.

   (b) Vérifier que : $\|c-b\|^2 = \|c-a\|^2 + \|a-b\|^2 + 2\langle c-a, a-b\rangle$.
   En déduire que : $\|c-a\|^2 = -2\langle c-a, a-b\rangle$.

   (c) Montrer de même que : $\|d-a\|^2 = -2\langle d-a, a-b\rangle$.

   (d) Montrer alors que $c-d$ et $a-b$ sont orthogonaux.

   (e) En déduire que a, c et d sont égaux. Conclure.

Partie 3 : Étude de l'ensemble des matrices bistochastiques et de ses points extrémaux.

Dans toute la suite du problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
On définit les deux ensembles suivants :

$$A_n = \left\{ M = (m_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \ / \ \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ m_{i,j} \geq 0,\ \forall i \in [\![1,n]\!], \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = 1 \text{ et } \forall j \in [\![1,n]\!], \sum_{i=1}^{n} m_{i,j} = 1 \right\}$$

l'ensemble des matrices bistochastiques de E,

$$F_n = \left\{ M = (m_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \ / \ \forall i \in [\![1,n]\!], \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = 0 \ et\ \forall j \in [\![1,n]\!], \sum_{i=1}^{n} m_{i,j} = 0 \right\}.$$

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique.
Enfin, $\mathscr{B}_0 = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

8. **Premières propriétés de A_n.**

(a) Soit (M, M') dans A_n^2. Montrer que : $\frac{1}{2}(M+M') \in A_n$ et que ${}^tM \in A_n$ (où ${}^tM$ désigne la matrice transposée de M).

On note $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le vecteur colonne dont toutes les composantes valent 1.

(b) Soit $M \in A_n$. Montrer que $MX_0 = X_0$.

(c) Réciproquement, soit M une matrice de E dont tous les coefficients sont positifs, et vérifiant : $MX_0 = X_0$ et ${}^tMX_0 = X_0$. Montrer que $M \in A_n$.

(d) Soit (M, M') dans A_n^2. Montrer que : $MM' \in A_n$.

9. **Endomorphismes et matrices de permutation.**

On note S_n l'ensemble des permutations de $[\![1,n]\!]$, c'est-à-dire l'ensemble des bijections de $[\![1,n]\!]$ sur lui-même. On rappelle que le cardinal de S_n est $n!$.

Soit $\sigma \in S_n$. On note f_σ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que : $\forall j \in [\![1,n]\!],\ f_\sigma(e_j) = e_{\sigma(j)}$.

On note M_σ la matrice de f_σ dans la base canonique $\mathscr{B}_0$. On dit que M_σ est la matrice de permutation associée à σ.

(a) Si σ est l'identité de $[\![1,n]\!]$, (pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\sigma(i) = i$), que sont f_σ et M_σ ?

(b) Si σ est une permutation de S_n, montrer que $M_\sigma \in A_n$. Déterminer $\tau \in S_n$ telle que ${}^tM_\sigma = M_\tau$.

(c) Soit $(\sigma, \sigma') \in S_n^2$, montrer que $f_\sigma \circ f_{\sigma'} = f_{\sigma\circ\sigma'}$.
En déduire que M_σ est inversible et déterminer son inverse.

(d) Justifier que les matrices M_σ sont des matrices orthogonales.

(e) Justifier que les matrices M_σ sont exactement les matrices présentant sur chaque ligne et sur chaque colonne une fois la valeur 1 et $n-1$ fois la valeur 0.

10. Soit $\sigma \in S_n$, montrer que M_σ est un point extrémal de A_n.

11. **Étude d'un projecteur :** on note $p = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} f_\sigma$ et $P = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} M_\sigma$.

(a) Soit τ fixé dans S_n. Montrer que l'application $\varphi_\tau \ :\ \sigma \longmapsto \tau \circ \sigma$ est une bijection de S_n dans lui même.
Montrer alors que : $f_\tau \circ p = p$.

(b) En déduire que p est un projecteur de $\mathbb{R}^n$.

(c) Montrer que : $\mathrm{Im}(p) = \{x \in \mathbb{R}^n \ /\ \forall \sigma \in S_n,\ f_\sigma(x) = x\}$.

(d) Montrer alors que $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Vect}(x_0)$, où $x_0 = \sum_{i=1}^{n} e_i$.

(e) (Cubes) Calculer ${}^tP$. En déduire que p est un projecteur orthogonal. Déterminer alors P.

(f) (Cubes) Vérifier que $P \in A_n$.

12. **Diamètre de A_n.**

(a) Si $M = (m_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ et $N = (n_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ sont deux matrices de E, calculer $\mathrm{Tr}({}^tMN)$.

(b) Montrer que l'application $(M, N) \longmapsto \mathrm{Tr}({}^tMN)$ est un produit scalaire sur E.
Si (M, N) sont dans E, on note $(M|N) = \mathrm{Tr}({}^tMN)$ ce produit scalaire, et $\|M\|_2 = \sqrt{\mathrm{Tr}({}^tMN)}$ la norme associée.

(c) Soit $\sigma \in S_n$. Calculer $\|M_\sigma\|_2$.

(d) Dans cette question seulement, on suppose que $n = 2$. Soit $(\alpha, \beta) \in [0,1]^2$ et $(M_\alpha, M_\beta) \in A_2^2$. Calculer $\|M_\alpha - M_\beta\|_2$. Montrer alors que $\delta(A_2) = 2$.

(e) On revient au cas général avec $n \geq 2$. Soit $M \in A_n$. Montrer que $\|M\|_2^2 \leq n$.

(f) Montrer alors que : $\forall (M, N) \in A_n^2\ ,\ \|M - N\|_2 \leq \sqrt{2n}$.

(g) Soit $\sigma \in S_n$. Construire $\tau \in S_n$ tel que $(M_\sigma | M_\tau) = 0$.

(h) En déduire le diamètre de A_n et retrouver que les matrices de permutation sont des points extrémaux de A_n.

13. **Structure et dimension de F_n.**

(a) Vérifier que F_n est un sous-espace vectoriel de E.

(b) Soit $\Phi\ :\ F_n \to \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ qui, à toute matrice $M = (m_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}$ de F_n, associe la matrice $\Phi(M) = (m_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,n-1]\!]^2}$.
Montrer que Φ est un isomorphisme de F_n dans $\mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{R})$. En déduire la dimension de F_n.

14. On désire montrer que les matrices de permutation sont les seuls points extrémaux de A_n.
On raisonne par récurrence sur $n \geq 2$. On note $(\mathscr{P}_n)$ la proposition :

$(\mathscr{P}_n)$: si M est un point extrémal de A_n, alors M est une matrice de permutation.

(a) Vérifier, à l'aide de la partie 1, que la proposition $(\mathscr{P}_2)$ est vérifiée.

On considère un entier naturel $n \geq 3$ tel que $(\mathscr{P}_{n-1})$ soit réalisé, et on se donne une matrice $M \in E$ un point extrémal de A_n.

On suppose d'abord que la matrice M a au moins $2n$ coefficients non nuls : il existe $2n$ couples $(i_k, j_k)_{k \in [\![1,2n]\!]}$ deux à deux distincts tels que m_{i_k,j_k} est non nul.

On pose alors $H = \text{Vect}\,(E_{i_k,j_k},\ k \in [\![1,2n]\!])$ où les matrices $(E_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}$ sont les matrices élémentaires de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire $E_{i,j}$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls, à l'exception du coefficient en position (i, j) qui vaut 1.

(b) Montrer que $H \cap F_n \neq \{0_E\}$.

(c) On prend N non nul dans $H \cap F_n$, et pour tout réel t, on note $Q_t = M + tN$. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que : $\forall t \in \,]-\varepsilon, \varepsilon[,\ Q_t \in A_n$.

(d) En considérant $t \in \,]-\varepsilon, \varepsilon[$ et les matrices Q_t et Q_{-t} , montrer qu'on aboutit à une contradiction.

On a donc prouvé que la matrice M a au plus $2n - 1$ coefficients non nuls.

(e) Montrer alors qu'il existe une colonne de M n'ayant qu'un seul terme non nul, et que ce terme vaut 1.

On note s l'indice d'une telle colonne et r l'indice tel que $m_{r,s} = 1$.

(f) Justifier que la ligne d'indice r de M a tous ses coefficients nuls sauf $m_{r,s}$.

(g) On considère alors la matrice M' obtenue à partir de M en lui enlevant la colonne d'indice s et la ligne d'indice r. Montrer que $M' \in A_{n-1}$ et que M' est un point extrémal de A_{n-1}.

(h) En déduire que M' est une matrice de permutation de A_{n-1} et que M est une matrice de permutation de A_n.