DS6

Devoir surveillé du 19/12/2023

Durée : 3h

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats doivent être encadrés.

La calculatrice n'est pas autorisée.

Exercice 1

Soit n un entier naturel et soit $E = \mathbb{R}_n[x]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n .

Pour tout polynôme P de E , on pose : $\varphi(P) = P'' - 2xP'$.

1. (a) Montrer que φ est un endomorphisme de E .
- (b) Déterminer la matrice associée à φ dans la base canonique de E .
- (c) Montrer que φ est diagonalisable et donner ses valeurs propres.
2. Pour tout (P, Q) de E^2 , on note :

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2} dt.$$

- (a) Montrer que pour tout $(P, Q) \in E^2$, $\langle P, Q \rangle$ est bien défini.
- (b) Montrer que $(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle$ définit un produit scalaire sur E .
On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.
3. (a) Montrer à l'aide d'une intégration par partie que pour tout $(P, Q) \in E^2$, on a :

$$\langle \varphi(P), Q \rangle = - \int_{-\infty}^{+\infty} P'(t)Q'(t)e^{-t^2} dt.$$

- (b) En déduire que :

$$\forall (P, Q) \in E^2, \quad \langle \varphi(P), Q \rangle = \langle P, \varphi(Q) \rangle.$$

4. On définit une famille $(P_0, \dots, P_n)$ de polynômes de E par :

$$P_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad P_k = x^k - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\langle P_i, x^k \rangle}{\langle P_i, P_i \rangle} P_i.$$

- (a) Montrer que pour tout $0 \leq k \leq n$, le polynôme P_k est bien défini et de degré k .
- (b) Montrer que $(P_0, \dots, P_n)$ est une famille orthogonale.
Indication : montrer par récurrence sur $k \leq n$ que $(P_0, P_1, \dots, P_k)$ est orthogonale.
- (c) Justifier que pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $\text{Vect}(P_0, \dots, P_k) = \mathbb{R}_k[x]$.
- (d) En déduire que pour tout $1 \leq k \leq n$ et pour tout $P \in \mathbb{R}_{k-1}[x]$, on a : $\langle P_k, P \rangle = 0$.
5. Soit $k \in \{0, \dots, n\}$.

- (a) Justifier l'égalité : $\varphi(P_k) = \sum_{i=0}^n \langle \varphi(P_k), P_i \rangle \frac{P_i}{\|P_i\|^2}$.

- (b) Justifier que pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$ distinct de k , on a : $\langle \varphi(P_k), P_i \rangle = 0$.

- (c) Montrer que :

$$\langle \varphi(P_k), P_k \rangle = \langle \varphi(x^k), P_k \rangle, \quad \text{puis que} \quad \langle \varphi(P_k), P_k \rangle = -2k \langle P_k, P_k \rangle.$$

- (d) En déduire une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de φ .

Exercice 2**Partie 1.**

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et on considère un endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est une matrice M telle que $\text{rg}(M) = 1$. On note C la première colonne de M et on suppose que C est non nulle.

1. Donner la dimension de $\text{Ker}(f)$ et en déduire une valeur propre de f .
2. (a) Montrer qu'il existe une matrice $L = \begin{pmatrix} 1 & \ell_2 & \dots & \ell_n \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ telle que $M = CL$.
 (b) On rappelle que $\text{Tr}(M)$ désigne la trace de la matrice M . Montrer que $\text{Tr}(M) = LC$.
 (c) Établir que l'on a l'égalité :

$$M^2 = \text{Tr}(M)M$$

3. Montrer que $\text{Tr}(M)$ est valeur propre de f .
4. On suppose $\text{Tr}(M) = 0$. Montrer que M n'est pas diagonalisable.
5. On suppose $\text{Tr}(M) \neq 0$. À l'aide des questions précédentes, déterminer les valeurs propres de f et montrer que f est diagonalisable.

Partie 2.

On désigne par a, b, c trois réels non nuls et on considère l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/a & 1/b \\ a & 1 & 1/c \\ b & c & 1 \end{pmatrix}$.

On suppose que A n'est pas inversible.

6. (a) En considérant le système $AX = 0$, où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, établir, en raisonnant par l'absurde, la relation : $ac = b$.
 (b) En déduire le rang de A .
7. (a) Conclure que g est diagonalisable et donner ses valeurs propres.
 (b) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, A^n appartient à $\text{Vect}(A)$.

Exercice 3

On désigne par c un réel strictement supérieur à 2 et on suppose que toutes les variables aléatoires rencontrées dans cet exercice, sont définies sur le même espace probabilisé.

Partie 1 : étude d'une loi de probabilité.

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} \frac{c}{x^{c+1}} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$.

1. Montrer que f peut être considérée comme une densité.

On considère dans la suite une variable aléatoire X telle que $X(\Omega) = [1, +\infty[$, de densité f et on note F sa fonction de répartition. On dit que X suit la loi de Pareto de paramètre c .

2. Montrer que X possède une espérance et une variance et les déterminer.
3. Déterminer, pour tout réel x , l'expression de $F(x)$ en fonction de x et c .
4. On pose $Y = \ln X$ et on admet que Y est une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que f . On note G sa fonction de répartition.
 - (a) Pour tout réel x , exprimer $G(x)$ à l'aide de la fonction F .
 - (b) En déduire que Y suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.
 - (c) Écrire une fonction Python d'en-tête `def simulx(c)` utilisant `rd.exponential` et permettant de simuler X .

Partie 2 : produit de deux variables suivant la loi de Pareto de paramètre c .

On considère deux variables aléatoires X_1 et X_2 indépendantes et suivant toutes les deux la loi de Pareto de paramètre c . On pose $Y_1 = \ln(X_1)$, $Y_2 = \ln(X_2)$ et $Z = X_1 X_2$.

5. Écrire une fonction Python d'en-tête `def simulz(c)` utilisant la fonction `simulx(c)` et permettant de simuler Z .
6. Déterminer l'espérance et le moment d'ordre 2 de Z puis vérifier que la variance de Z est donnée par :

$$V(Z) = \frac{c^2(2c^2 - 4c + 1)}{(c - 2)^2(c - 1)^4}$$

7. (a) Donner la loi commune suivie par cY_1 et cY_2 .
(b) En déduire la loi de $cY_1 + cY_2$.
8. (a) Soit H la fonction de répartition de $Y_1 + Y_2$ et K celle de $cY_1 + cY_2$. Pour tout réel x , exprimer $H(x)$ à l'aide de K , puis vérifier qu'une densité de $Y_1 + Y_2$ est la fonction h définie par :

$$h(x) = \begin{cases} c^2 x e^{-cx} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

- (b) Soit F_Z la fonction de répartition de Z . Exprimer, pour tout réel x , $F_Z(x)$ à l'aide de H . En déduire qu'une densité f_Z de Z est donnée par :

$$f_Z(x) = \begin{cases} \frac{c^2 \ln x}{x^{c+1}} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}.$$

9. (a) Pour tout réel α strictement supérieur à 1, montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} dx$ converge et donner sa valeur.
(b) Retrouver alors les valeurs de $E(Z)$ et $V(Z)$ déterminées à la question 6.